

Sztochasztikus folyamatok

Martingálok és a megállási opciókról szóló tétele

Medvegyev Péter

2008

A feltételes várható érték definíciója

Definition

Ha ζ tetszőleges valószínűségi változó és \mathcal{F} egy tetszőleges σ -algebra, akkor az $\mathbf{E}(\zeta \mid \mathcal{F})$ valószínűségi változót a ζ \mathcal{F} -re vonatkozó feltételes várható értékének mondjuk, ha

1. az $\mathbf{E}(\zeta \mid \mathcal{F})$ mérhető az \mathcal{F} σ -algebrára nézve,
2. minden $F \in \mathcal{F}$ esetén érvényes a következő egyenlőség:

$$\int_F \zeta d\mathbf{P} = \int_F \mathbf{E}(\zeta \mid \mathcal{F}) d\mathbf{P}.$$

Akárcsak a ζ az $\mathbf{E}(\zeta \mid \mathcal{F})$ is valószínűségi változó, így csak majdnem mindenhol értelemben definiált. A ζ -nek integrálhatónak kell lenni, bár nem kell az integrálnak végesnek lenni.

A feltételes várható érték tulajdonságai

1. Ha $\xi \geq 0$, vagy a ξ -nek létezik véges várható értéke, akkor az $\mathbf{E}(\xi \mid \mathcal{F})$ jól definiált. Az első esetben az értéke lehet $+\infty$ a második esetben az értéke véges.

A feltételes várható érték tulajdonságai

1. Ha $\xi \geq 0$, vagy a ξ -nek létezik véges várható értéke, akkor az $\mathbf{E}(\xi \mid \mathcal{F})$ jól definiált. Az első esetben az értéke lehet $+\infty$ a második esetben az értéke véges.
2. A feltételes várható érték additív, vagyis ha a ξ -nek és az η -nak létezik véges feltétles várható értéke, akkor az összegnek is van, és az összeg feltétles várható értéke a feltételes várható értékek összege. Az additivitás akkor is értelmes, ha a két változó nem negatív.

A feltételes várható érték tulajdonságai

1. Ha $\xi \geq 0$, vagy a ξ -nek létezik véges várható értéke, akkor az $\mathbf{E}(\xi \mid \mathcal{F})$ jól definiált. Az első esetben az értéke lehet $+\infty$ a második esetben az értéke véges.
2. A feltételes várható érték additív, vagyis ha a ξ -nek és az η -nak létezik véges feltétles várható értéke, akkor az összegnek is van, és az összeg feltétles várható értéke a feltételes várható értékek összege. Az additivitás akkor is értelmes, ha a két változó nem negatív.
3. Ha a ξ mérhető az \mathcal{F} -re és a feltételes várható érték létezik, akkor $\mathbf{E}(\xi \mid \mathcal{F}) = \xi$.

A feltételes várható érték tulajdonságai

1. Ha $\zeta \geq 0$, vagy a ζ -nek létezik véges várható értéke, akkor az $\mathbf{E}(\zeta \mid \mathcal{F})$ jól definiált. Az első esetben az értéke lehet $+\infty$ a második esetben az értéke véges.
2. A feltételes várható érték additív, vagyis ha a ζ -nek és az η -nak létezik véges feltétles várható értéke, akkor az összegnek is van, és az összeg feltétles várható értéke a feltételes várható értékek összege. Az additivitás akkor is értelmes, ha a két változó nem negatív.
3. Ha a ζ mérhető az \mathcal{F} -re és a feltételes várható érték létezik, akkor $\mathbf{E}(\zeta \mid \mathcal{F}) = \zeta$.
4. Érvényes a kiemelési szabály, ha az η korlátos és \mathcal{F} -mérhető, és az ζ -nek létezik véges feltételes várható értéke, akkor

$$\mathbf{E}(\eta\zeta \mid \mathcal{F}) = \eta\mathbf{E}(\zeta \mid \mathcal{F}).$$

Az egyenlőség akkor is teljesül, ha ζ és η nem negatív.

A feltételes várható érték tulajdonságai

1. Ha $\zeta \geq 0$, vagy a ζ -nek létezik véges várható értéke, akkor az $\mathbf{E}(\zeta \mid \mathcal{F})$ jól definiált. Az első esetben az értéke lehet $+\infty$ a második esetben az értéke véges.
2. A feltételes várható érték additív, vagyis ha a ζ -nek és az η -nak létezik véges feltétles várható értéke, akkor az összegnek is van, és az összeg feltétles várható értéke a feltételes várható értékek összege. Az additivitás akkor is értelmes, ha a két változó nem negatív.
3. Ha a ζ mérhető az \mathcal{F} -re és a feltételes várható érték létezik, akkor $\mathbf{E}(\zeta \mid \mathcal{F}) = \zeta$.
4. Érvényes a kiemelési szabály, ha az η korlátos és \mathcal{F} -mérhető, és az ζ -nek létezik véges feltételes várható értéke, akkor

$$\mathbf{E}(\eta\zeta \mid \mathcal{F}) = \eta\mathbf{E}(\zeta \mid \mathcal{F}).$$

Az egyenlőség akkor is teljesül, ha ζ és η nem negatív.

5. Ha ζ független az \mathcal{F} -től, akkor $\mathbf{E}(\zeta \mid \mathcal{F}) = \mathbf{E}(\zeta)$.

A torony szabály

1. Ha $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{G}$, akkor

$$\mathbf{E}(\mathbf{E}(\xi | \mathcal{F}) | \mathcal{G}) = \mathbf{E}(\xi | \mathcal{F}).$$

A torony szabály

1. Ha $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{G}$, akkor

$$\mathbf{E}(\mathbf{E}(\xi | \mathcal{F}) | \mathcal{G}) = \mathbf{E}(\xi | \mathcal{F}).$$

2. Ha $\mathcal{G} \subseteq \mathcal{F}$ akkor

$$\mathbf{E}(\mathbf{E}(\xi | \mathcal{F}) | \mathcal{G}) = \mathbf{E}(\xi | \mathcal{G}).$$

A torony szabály

1. Ha $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{G}$, akkor

$$\mathbf{E}(\mathbf{E}(\xi | \mathcal{F}) | \mathcal{G}) = \mathbf{E}(\xi | \mathcal{F}).$$

2. Ha $\mathcal{G} \subseteq \mathcal{F}$ akkor

$$\mathbf{E}(\mathbf{E}(\xi | \mathcal{F}) | \mathcal{G}) = \mathbf{E}(\xi | \mathcal{G}).$$

3. Speciálisan ha $\mathcal{G} = \{\emptyset, \Omega\}$, akkor

$$\mathbf{E}(\mathbf{E}(\xi | \mathcal{F})) = \mathbf{E}(\mathbf{E}(\xi | \mathcal{F}) | \mathcal{G}) = \mathbf{E}(\xi).$$

Ezt szokás a teljes várható érték tételnek is mondani.

A feltételes várható érték és a konvergencia

1. Ha $|\xi_n| \leq \eta$ és η -nak van véges várható értéke és $\xi_n \rightarrow \xi$, akkor

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbf{E}(\xi_n | \mathcal{F}) = \mathbf{E}\left(\lim_{n \rightarrow \infty} \xi_n | \mathcal{F}\right) = \mathbf{E}(\xi | \mathcal{F})$$

speciálisan a feltételes várható érték folytonos az L^1 -ben.

A feltételes várható érték és a konvergencia

1. Ha $|\xi_n| \leq \eta$ és η -nak van véges várható értéke és $\xi_n \rightarrow \xi$, akkor

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbf{E}(\xi_n | \mathcal{F}) = \mathbf{E}\left(\lim_{n \rightarrow \infty} \xi_n | \mathcal{F}\right) = \mathbf{E}(\xi | \mathcal{F})$$

speciálisan a feltételes várható érték folytonos az L^1 -ben.

2. Ha $0 \leq \xi_1 \leq \xi_2 \dots$ akkor

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbf{E}(\xi_n | \mathcal{F}) = \mathbf{E}\left(\lim_{n \rightarrow \infty} \xi_n | \mathcal{F}\right).$$

Martingálok definíciója

Definition

Egy X adaptált folyamat definíció szerint logikai martingál, ha az $X(t)$ minden t időpontra integrálható, és tetszőleges $s < t$ időpontok esetén teljesül az

$$\mathbf{E}(X(t)|\mathcal{F}_s) \stackrel{m.m.}{=} X(s)$$

Definition

Folytonos időhorizonton egy logikai martingált csak akkor tekintünk martingálnak, ha a trajektóriái jobbról regulárisak.

Definition

Az X és az Y folyamatok módosítás erejéig egybeesnek, ha minden t -re $X(t) \stackrel{m.m.}{=} Y(t)$ vagy ami ugyan az minden t -re az $X(t)$ és az $Y(t)$ ugyanazt a valószínűségi változót reprezentálja.

Szokásos feltételek és martingálok

Theorem

Ha teljesülnek a szokásos feltételek, akkor minden logikai martingálhoz van olyan martingál, amely értékei minden t időpontban majdnem mindenhol megegyeznek a logikai martingál értékeivel. Ezt úgy is ki szokás fejezni, hogy a szokásos feltételek teljesülése esetén a logikai martingálok regularizálhatóak.

Martingálok és filtráció

Example

Ha teljesülnek a szokásos feltételek és ζ tetszőleges integrálható valószínűségi változó, akkor van olyan X martingál, hogy tetszőleges t -re

$$X(t) \stackrel{m.m.}{=} \mathbf{E}(\zeta | \mathcal{F}_t).$$

Mivel teljesülnek a szokásos feltételek elegendő belátni, hogy a $t \mapsto \mathbf{E}(\zeta | \mathcal{F}_t)$ logikai martingál. A torony szabály miatt minden $t > s$ esetén

$$\mathbf{E}(X(t) | \mathcal{F}_s) \stackrel{m.m.}{=} \mathbf{E}(\mathbf{E}(\zeta | \mathcal{F}_t) | \mathcal{F}_s) \stackrel{m.m.}{=} \mathbf{E}(\zeta | \mathcal{F}_s) \stackrel{m.m.}{=} X(s).$$

Vagyis az így kapott változók logikai martingált alkotnak. A szokásos feltételek miatt az idézett tétel alapján a folyamatnak van reguláris verziója, amely már definíció szerint martingált alkot.

Független és stacionárius növekmény

Definition

Az X sztochasztikus folyamat

1. független növekményű, ha minden $0 \leq t_0 < t_1 < t_2 < \dots < t_n$ időpont sorozatra az

$$X(t_0), X(t_1) - X(t_0), \dots, X(t_k) - X(t_{k-1}), \dots, X(t_n) - X(t_{n-1})$$

növekmények függetlenek,

2. stacionárius növekményű, ha $t > s$ esetén az $X(t) - X(s)$ eloszlása megegyezik az $X(t-s) - X(0)$ eloszlásával.
3. Ha a folyamathoz rendelt \mathcal{F} filtráció adott, akkor a folyamatot független növekményűnek mondjuk, ha minden t -re és $h > 0$ számra az $X(t+h) - X(t)$ növekmény független az \mathcal{F}_t σ -algebrától.

Lévy-folyamat

Definition

A X folyamat Lévy-folyamat, ha

1. $X(0) = 0$,
2. az X független és stacionárius növekményű, és
3. a trajektóriák jobbról regulárisak, vagyis jobbról folytonosak, és minden időpontban van bal oldali határértékük.

Független növekményű folyamatok és martingálok

Example

Ha teljesülnek a szokásos feltételek és X független növekményű folyamat és minden időpontban létezik a folyamat várható értéke, akkor az

$$Y(t) \doteq X(t) - \mathbf{E}(X(t))$$

kompenzált folyamat martingál.

Ha $t > s$, akkor

$$\begin{aligned} \mathbf{E}(Y(t)|\mathcal{F}_s) &= \mathbf{E}(Y(t) - Y(s) + Y(s)|\mathcal{F}_s) \stackrel{m.m.}{=} \\ &\stackrel{m.m.}{=} \mathbf{E}(Y(t) - Y(s)|\mathcal{F}_s) + \mathbf{E}(Y(s)|\mathcal{F}_s) \stackrel{m.m.}{=} \end{aligned}$$

$$\stackrel{m.m.}{=} \mathbf{E}(Y(t) - Y(s)) + \mathbf{E}(Y(s)|\mathcal{F}_s) = \mathbf{E}(Y(s)|\mathcal{F}_s) \stackrel{m.m.}{=} Y(s)$$

A szokásos feltételek miatt az Y regulárizálható. Minden független növekményű folyamat jobbról reguláris, ezért az $\mathbf{E}(X(t))$ függvény szükségszerűen jobbról reguláris, így az Y folyamat is jobbról reguláris.

Lévy folyamatok és martingálok

Example

Ha teljesülnek a szokásos feltételek és X egy Lévy-folyamat és minden időpontban létezik a folyamat várható értéke, akkor az

$$Y(t) \doteq X(t) - t \cdot \mathbf{E}(X(1))$$

kompenzált folyamat martingál.

A Lévy-folyamatok stacionárius és független növekményű folyamatok. Be kell látni, hogy $\mathbf{E}(X(t)) = t \cdot \mathbf{E}(X(1))$. A stacionárius növekedés feltétele miatt

$$\begin{aligned} \mathbf{E}(X(na)) &= \mathbf{E}(X(na) - X((n-1)a)) + \mathbf{E}(X((n-1)a)) = \\ &= \mathbf{E}(X(a)) + \mathbf{E}(X((n-1)a)) = \dots = n\mathbf{E}(X(a)). \end{aligned}$$

Lévy folyamatok várható értéke

Ebből

$$n\mathbf{E}\left(X\left(\frac{1}{n}\right)\right) = \mathbf{E}(X(1)),$$

így ha $t = p/q$, akkor

$$\mathbf{E}(X(t)) \stackrel{\circ}{=} \mathbf{E}\left(X\left(\frac{p}{q}\right)\right) = p\mathbf{E}\left(X\left(\frac{1}{q}\right)\right) = \frac{p}{q}\mathbf{E}(X(1)).$$

A szokásos feltételek teljesülnek, így az előző példa miatt $\mathbf{E}(X(t))$ jobbról reguláris, ezért minden t -re $\mathbf{E}(X(t)) = t \cdot \mathbf{E}(X(1))$.

Fourier transzformáció

Definition

Legyen ξ valószínűségi változó. A

$$t \in \mathbb{R} \mapsto \varphi(t) \doteq \mathbf{E}(\exp(it\xi)) = \mathbf{E}(\cos t\xi) + i\mathbf{E}(\sin t\xi)$$

függvényt a ξ Fourier-transzformáltjának nevezzük. Ha a ξ eloszlásfüggvénye F , akkor

$$\varphi(t) = \int_{\mathbb{R}} \exp(itx) dF(x) = \int_{\mathbb{R}} \cos tx dF(x) + i \int_{\mathbb{R}} \sin tx dF(x).$$

Ha a $\xi = (\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_m)$ vektor változó, akkor

$$\begin{aligned} \varphi(\mathbf{t}) &= \varphi(t_1, t_2, \dots, t_m) \doteq \\ &\doteq \mathbf{E}(\exp(i(t_1\xi_1 + t_2\xi_2 + \dots + t_m\xi_m))) = \mathbf{E}(\exp(i(\mathbf{t}, \xi))). \end{aligned}$$

Poisson eloszlás

Example

A λ paraméterű Poisson-eloszlás Fourier-transzformáltja

$$\varphi(t) = \exp(\lambda(\exp(it) - 1)).$$

Valóban

$$\begin{aligned}\varphi(t) &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda^k}{k!} \exp(-\lambda) \exp(itk) = \exp(-\lambda) \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda^k}{k!} (\exp(it))^k = \\ &= \exp(\lambda(\exp(it) - 1)).\end{aligned}$$

Normális eloszlás

Example

Az $N(0, 1)$ standard normális eloszlás Fourier-transzformáltja

$$\varphi(t) = \exp\left(-\frac{t^2}{2}\right).$$

$$\begin{aligned}\varphi(t) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} \exp\left(-\frac{x^2}{2}\right) (\cos tx + i \sin tx) dx = \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} \exp\left(-\frac{x^2}{2}\right) \cos tx dx\end{aligned}$$

A bederiválós trükk

A t szerinti deriváltva, majd a deriváltat parciálisan integrálva x szerint

$$\begin{aligned}\varphi'(t) &= -\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} \exp\left(-\frac{x^2}{2}\right) x \sin tx dx = \\ &= \left[\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{x^2}{2}\right) \sin tx \right]_{-\infty}^{\infty} - \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{x^2}{2}\right) t \cos tx dx \\ &= -t\varphi(t).\end{aligned}$$

$\varphi(0) = 1$, ezért teljesül a

$$\frac{d\varphi}{dt} = -t\varphi(t), \quad \varphi(0) = 1$$

egyenlet. Közvetlen behelyettesítéssel látható, hogy a $\varphi(t) = \exp(-t^2/2)$.

Unicitási tétel

Theorem

Ha a ξ_1 és a ξ_2 vektorok Fourier-transzformáltjai megegyeznek, akkor az eloszlásaik is megegyeznek.

Jelölje \mathcal{L} az olyan u korlátos mérhető függvények halmazát, amelyekre

$$\mathbf{E}(u(\xi_1)) = \mathbf{E}(u(\xi_2)).$$

Az \mathcal{L} triviálisan λ -rendszer, amely tartalmazza, az $\exp(i(\mathbf{u}, \mathbf{x}))$ alakú trigonometrikus függvények π -rendszerét. A monoton osztály tétel miatt az \mathcal{L} tartalmazza a trigonometrikus polinomok által generált σ -algebra elemeinek karakterisztikus függvényeit. Ez utóbbi σ -algebra megegyezik a folytonos függvények által generált σ -algebrával, vagyis a Borel-halmazokkal. Ebből következően tetszőleges B Borel-mérhető halmazra

$$\mathbf{P}(\xi_1 \in B) = \mathbf{E}(\chi_B(\xi_1)) = \mathbf{E}(\chi_B(\xi_2)) = \mathbf{P}(\xi_2 \in B),$$

vagyis a két eloszlás valóban megegyezik.

Laplace transzformált

Definition

Az

$$L(s) = \mathbf{E}(\exp(-s\zeta))$$

kifejezést az ζ Laplace-transzformáltjának mondjuk. A valószínűségszámításban inkább az

$$M(s) = \mathbf{E}(\exp(s\zeta))$$

úgynevezett momentumgeneráló függvényt szokás használni.

Mindkét fogalom hátránya, hogy csak az értelmezési tartományuk nem feltétlenül az egész számegegyenes. A Laplace-transzformált jól használható, ha $\zeta \geq 0$.

Theorem

Ha $\zeta \geq 0$, akkor az L egyértelműen meghatározza a ζ eloszlását.

A normális eloszlás Laplace-transzformáltja

Example

Ha a ξ eloszlása $N(0, 1)$, akkor a Laplace-transzformáltja $\exp(-s^2/2)$.

$$\begin{aligned} \mathbf{E}(\exp(-s\xi)) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} \exp\left(-\frac{x^2}{2}\right) \exp(-sx) dx = \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(\frac{s^2}{2}\right) \int_{\mathbb{R}} \exp\left(-\frac{(x+s)^2}{2}\right) dx = \\ &= \exp\left(\frac{s^2}{2}\right). \end{aligned}$$

Függetlenség

1. Ha A és B két esemény, akkor az A és a B független, ha $\mathbf{P}(A \cap B) = \mathbf{P}(A) \mathbf{P}(B)$.
2. Ha \mathcal{A} és \mathcal{B} két σ -algebra, akkor \mathcal{A} és \mathcal{B} függetlenek, ha minden $A \in \mathcal{A}$ és minden $B \in \mathcal{B}$ esetén az A és a B függetlenek.
3. Ha ξ és η két valószínűségi változó, akkor a ξ és az η függetlenek, ha a generált σ -algebrák függetlenek, vagyis minden C és D Borel-mérhető halmaz esetén

$$\mathbf{P}(\xi \in C, \eta \in D) = \mathbf{P}(\xi \in C) \mathbf{P}(\eta \in D).$$

4. A definíciók értelemszerűen átvihetők véges részhalmazokra, ahol hangsúlyozni kell, hogy minden részhalmazra is teljesülni kell a szorzatrabonthatóság feltételének.
5. Tetszőleges számosságú halmazok vagy változók esetén az összes véges részhalmaz függetlenségét követeljük meg.

Függetlenség és eloszlásfüggvény

Theorem

A ξ_1 és ξ_2 valószínűségi vektorok pontosan akkor függetlenek, ha $F = F_1 \cdot F_2$, ahol F_1 a ξ_1 és F_2 a ξ_2 eloszlásfüggvénye, és F a (ξ_1, ξ_2) közös eloszlásfüggvénye.

Ha a ξ_1 és a ξ_2 függetlenek, akkor a felbontás teljesül. Rögzítsünk egy y számot és legyen \mathcal{L} az olyan korlátos mérhető u függvények halmaza, amelyekre

$$\mathbf{E}(u(\xi_1)\chi\{\xi_2 < y\}) = \mathbf{E}(u(\xi_1)) \cdot \mathbf{P}(\xi_2 < y).$$

Az \mathcal{L} λ -rendszer. A feltétel szerint az \mathcal{L} tartalmazza az $u(x) = \chi(-\infty, x)$ függvények π -rendszerét. Így tartalmazza ezen π -rendszer által generált σ -algebra szerint mérhető halmazok karakterisztikus függvényeit. Így minden C Borel-mérhető halmazra

$$\mathbf{P}(\xi_1 \in C, \xi_2 < y) = \mathbf{P}(\xi_1 \in C)\mathbf{P}(\xi_2 < y).$$

A gondolatmenetet rögzített C -vel megismételve éppen az állítást kapjuk.

Függetlenség és Fourier-transzformáció

Theorem

A ξ_1 és ξ_2 valószínűségi vektorok pontosan akkor függetlenek, ha $\varphi = \varphi_1 \cdot \varphi_2$, ahol φ_1 a ξ_1 és φ_2 a ξ_2 Fourier-transzformáltja, és φ a (ξ_1, ξ_2) közös eloszlásának Fourier-transzformáltja.

Ha a ξ_1 és a ξ_2 függetlenek, akkor a felbontás teljesül. Rögzítsünk egy \mathbf{v} vektort és legyen \mathcal{L} az olyan korlátos mérhető u függvények halmaza, amelyekre

$$\mathbf{E}(u(\xi_1) \exp(i(\mathbf{v}, \xi_2))) = \mathbf{E}(u(\xi_1)) \cdot \mathbf{E}(\exp(i(\mathbf{v}, \xi_2))).$$

Az \mathcal{L} λ -rendszer. A feltétel szerint az \mathcal{L} tartalmazza az $u(\mathbf{x}) = \exp(i(\mathbf{u}, \mathbf{x}))$ függvények π -rendszerét. Így tartalmazza ezen π -rendszer által generált σ -algebra szerint mérhető halmazok karakterisztikus függvényeit. Így minden B Borel-mérhető halmazra

$$\begin{aligned} \mathbf{E}(\chi_B(\xi_1) \exp(i(\mathbf{v}, \xi_2))) &= \mathbf{E}(\chi_B(\xi_1)) \mathbf{E}(\exp(i(\mathbf{v}, \xi_2))) = \\ &= \mathbf{P}(\xi_1 \in B) \mathbf{E}(\exp(i(\mathbf{v}, \xi_2))). \end{aligned}$$

Megfordítva

Most legyen \mathcal{L} az olyan korlátos és mérhető v függvények halmaza, amelyekre

$$\mathbf{E}(\chi_B(\xi_1)v(\xi_2)) = \mathbf{P}(\xi_1 \in B)\mathbf{E}(v(\xi_2)).$$

Ismét a monoton osztály tétel miatt

$$\mathbf{P}(\xi_1 \in B, \xi_2 \in D) = \mathbf{E}(\chi_B(\xi_1)\chi_D(\xi_2)) = \mathbf{P}(\xi_1 \in B)\mathbf{P}(\xi_2 \in D).$$

A bizonyításban hallgatólagosan kihasználtuk, hogy a trigonometrikus polinómok által generált σ -algebra azonos a folytonos függvények által generált σ -algebrával.

Exponenciális martingál

Legyen X Lévy-folyamat. Tetszőleges t -re definiálhatjuk a

$$\varphi_t(u) \doteq \varphi(u, t) \doteq \mathbf{E}(\exp(iuX(t)))$$

Fourier-transzformáltakból álló folyamatot. Mivel a Lévy-folyamatok definíció szerint jobbról regulárisak a majorált konvergencia tétele miatt a $\varphi_t(u)$ minden u -ra jobbról reguláris. A független és a stacionárius növekmény feltételét kihasználva

$$\begin{aligned}\varphi_{t+s}(u) &\doteq \mathbf{E}(\exp(iuX(t+s))) = \\ &= \mathbf{E}(\exp(iu(X(t+s) - X(t))) \exp(iuX(t))) = \\ &= \mathbf{E}(\exp(iu(X(t+s) - X(t)))) \cdot \mathbf{E}(\exp(iuX(t))) = \\ &= \mathbf{E}(\exp(iuX(s))) \cdot \mathbf{E}(\exp(iuX(t))) \doteq \varphi_t(u) \cdot \varphi_s(u).\end{aligned}$$

Folytonosság

Következésképpen

$$|\varphi_{t+s}(u)| = |\varphi_t(u)| \cdot |\varphi_s(u)|.$$

Mivel $|\varphi_t(u)| \leq 1$ és $|\varphi_0(u)| = 1$ a Cauchy-féle függvényegyenletből $|\varphi_t(u)| = \exp(t \cdot c(u))$. Ebből következően a $\varphi_t(u)$ soha sem lehet nulla. Ha $t > 0$ és $h > 0$, akkor a jobbról való folytonosság miatt

$$\begin{aligned} |\varphi_t(u) - \varphi_{t-h}(u)| &= |\varphi_{t-h}(u)| \left| \frac{\varphi_t(u)}{\varphi_{t-h}(u)} - 1 \right| = \\ &= |\varphi_{t-h}(u)| |\varphi_h(u) - 1| \leq \\ &\leq |\varphi_h(u) - 1| \rightarrow 0, \end{aligned}$$

ha $h \searrow 0$. Következésképpen a $\varphi_t(u)$ balról is folytonos. Tehát a $\varphi_t(u)$ minden u -ra a t időváltozóban folytonos.

Lévy-folyamatok nulla valószínűséggel ugranak

Ennek érdekes következménye, hogy

$$\begin{aligned}\mathbf{E}(iu(X(t) - X(t-))) &= \frac{\varphi_t(u)}{\lim_{h \searrow 0} \varphi_{t-h}(u)} = \\ &= \frac{\varphi_t(u)}{\varphi_{t-}(u)} = 1.\end{aligned}$$

A Fourier-transzformáció egyértelműen jellemzi az eloszlást, következésképpen $X(t-) \stackrel{m.m.}{=} X(t)$. Másképpen fogalmazva Lévy-folyamatok esetén tetszőleges t -re az ugrás valószínűsége nulla.

Lévy-folyamat exponenciális martingálja

Definition

Egy X Lévy-folyamat exponenciális martingálja

$$Z(t, u, \omega) \doteq \frac{\exp(iuX(t, \omega))}{\varphi_t(u)}.$$

Egy X Lévy-folyamat exponenciális martingáljám szokás az

$$Z(t, s, \omega) \doteq \frac{\exp(-sX(t, \omega))}{L_t(s)}$$

kifejezést is érteni.

Wiener-folyamat exponenciális martingálja

Example

Wiener-folyamat exponenciális martingálja

$$\begin{aligned}\varphi_t(u) &= \mathbf{E} \left(\exp \left(iu \left(N \left(0, \sqrt{t} \right) \right) \right) \right) = \\ &= \mathbf{E} \left(\exp \left(iu\sqrt{t} \left(N \left(0, 1 \right) \right) \right) \right) = \exp \left(-\frac{(u\sqrt{t})^2}{2} \right) = \\ &= \exp \left(-t\frac{u^2}{2} \right).\end{aligned}$$

$$Z(t, u) = \exp \left(iuw(t) + t\frac{u^2}{2} \right).$$

Ha a Fourier-transzformált helyett a Laplace-transzformáltat vesszük, akkor

$$Z(t, s) = \exp \left(-sw(t) - t\frac{s^2}{2} \right).$$

Exponenciális martingál

Example

Ha X tetszőleges Lévy-folyamat, akkor az X -hez tartozó exponenciális martingál valóban martingál.

$$\begin{aligned}\mathbf{E}(Z_t(u) | \mathcal{F}_s) &= \mathbf{E} \left(\frac{\exp(iu(X(t, \omega) - X(s, \omega)))}{\varphi_{t-s}(u)} \frac{\exp(iuX(s, \omega))}{\varphi_s(u)} \mid \mathcal{F}_s \right) = \\ &= \frac{\exp(iuX(s, \omega))}{\varphi_s(u)} \mathbf{E} \left(\frac{\exp(iu(X(t, \omega) - X(s, \omega)))}{\varphi_{t-s}(u)} \mid \mathcal{F}_s \right) = \\ &= \frac{\exp(iuX(s, \omega))}{\varphi_s(u)} \mathbf{E} \left(\frac{\exp(iu(X(t, \omega) - X(s, \omega)))}{\varphi_{t-s}(u)} \right) = \frac{\exp(iuX(s, \omega))}{\varphi_s(u)}.\end{aligned}$$

A megállási opciókról szóló tétel

Theorem

Legyen (X, \mathcal{F}) martingál, és legyenek $\tau_1 \leq \tau_2$ megállási idők. Ha a τ_1, τ_2 megállási idők korlátosak, vagyis ha van olyan c konstans, hogy $\tau_1 \leq \tau_2 \leq c$, akkor

$$X(\tau_1) \stackrel{m.m.}{=} \mathbf{E}(X(\tau_2) | \mathcal{F}_{\tau_1}).$$

A korlátosság fontos

Example

A megállási opciókról szóló tételben a megállási idő korlátossága fontos.

Legyen w egy Wiener-folyamat és jelölje τ az $a = 1$ pont találati idejét. Mivel a w folytonos és majdnem minden kimenetelre a w trajektóriái nem korlátosak, ezért egy valószínűséggel minden trajektória előbb vagy utóbb átmetszi az $a = 1$ szintet. Így egy valószínűséggel $\tau < \infty$. Világos, hogy ebből $w(\tau) \stackrel{m.m.}{=} 1$ és így

$$\mathbf{E}(w(\tau)) = 1 > 0 = \mathbf{E}(w(0)),$$

ami miatt a megállási opciókról szóló tétel a $\tau_1 = 0$, $\tau_2 = \tau$ szereposztással nem alkalmazható.

Egyenletes integrálhatóság

Definitions

Egy (X, \mathcal{A}, μ) téren értelmezett mérhető függvényekből álló valamely $(f_\alpha)_\alpha$ függvényhalmazt egyenletesen integrálhatónak mondunk, ha

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \sup_{\alpha} \int_{|f_\alpha| \geq N} |f_\alpha| d\mu = 0.$$

Egy X martingált egyenletesen integrálható martingálnak mondunk ha az X értékeiből álló halmaz, vagyis az $(X_t)_t$ halmaz egyenletesen integrálható.

Világos, hogy ha f egy integrálható függvény, akkor a majorált konvergenciáról szóló tétel miatt

$$\lim_{N \rightarrow 0} \int_{|f| \geq N} |f| d\mu = 0.$$

Így minden véges számú integrálható függvényből álló halmaz egyenletesen integrálható.

Majorált halmazok egyenletesen integrálhatóak

Example

Ha a $\sup_{\sigma} |f_{\alpha}|$ mérhető és $\sup_{\sigma} |f_{\alpha}| \in L^p(\Omega)$, ahol $p \geq 1$, akkor az $(f_{\alpha})_{\alpha}$ család egyenletesen integrálható.

Ha $p = 1$, akkor az (f_{α}) családnak triviálisan van integrálható majoránusa: A definícióból világos, hogy ha egy \mathcal{A} halmaznak van integrálható majoránusa, akkor az \mathcal{A} halmaz triviálisan egyenletesen integrálható. Általában az L^p -norma monotonitása miatt minden $p \geq 1$ esetén

$$\|f_{\alpha}\|_p \leq \left\| \sup_{\sigma} |f_{\alpha}| \right\|_p,$$

így az (f_{α}) korlátos az L^p térben. Meg lehet mutatni, hogy ha $p > 1$, akkor az L^p térben való korlátosságból következik az egyenletes integrálhatóság. Hangsúlyozni kell, hogy a $p = 1$ esetben ez nem igaz, tehát lehet példát mutatni, olyan L^1 -ben korlátos halmazra, amely nem egyenletesen integrálható.

Feltételes várható értéke halmaza egyenletesen integrálható

Example

Ha ζ tetszőleges integrálható változó, és (\mathcal{F}_α) tetszőleges σ -algebrákból álló halmaz, akkor az

$$\eta_\alpha \stackrel{\circ}{=} \mathbf{E}(\zeta \mid \mathcal{F}_\alpha)$$

család egyenletesen integrálható. Speciálisan, ha X egy olyan martingál, amelyre $X(t) = \mathbf{E}(X(\infty) \mid \mathcal{F}_t)$, akkor az X egyenletesen integrálható martingál.

Example

A Wiener-folyamatok nem egyenletesen integrálhatóak az egész \mathbb{R}_+ félegyenesen, de tetszőleges véges időszakaszon egyenletesen integrálhatóak. Minden martingál minden véges időszakaszon egyenletesen integrálható, a kérdés csak az, hogy az \mathbb{R}_+ időtengelyen vajon egyenletesen integrálható vagy sem?

Martingál konvergencia tétel és az egyenletes integrálhatóság

Theorem

Legyen X egy martingál az \mathbb{R}_+ félegyenesen.

- 1. Ha az X korlátos az $L^1(\Omega)$ térben, akkor van olyan $X(\infty) \in L^1(\Omega)$, hogy majdnem minden kimenetelre $\lim_{t \nearrow \infty} X(t) = X(\infty)$.*
- 2. Ha az X ezen kívül még egyenletesen is integrálható, akkor a konvergencia $L^1(\Omega)$ -ban is érvényes.*

Emlékeztetünk, hogy az egyenletes integrálhatóság implikálja az $L^1(\Omega)$ korlátosságot, de nem fordítva. Csak $p > 1$ esetén ekvivalens a kettő.

Martingál konvergencia tétel és az egyenletes integrálhatóság

Theorem

Az \mathbb{R}_+ félegyenesen értelmezett X martingál pontosan akkor egyenletesen integrálható, ha martingálként kiterjeszthető a $[0, \infty]$ -re vagyis ha létezik $X(\infty)$, amelyre $L^1(\Omega)$ -ben és majdnem mindenhol $X(t) \rightarrow X(\infty)$.

A feltételes várható érték $L^1(\Omega)$ -ban folytonos. Az $L^1(\Omega)$ -ban való konvergencia miatt

$$X(t) = \lim_{N \rightarrow \infty} \mathbf{E}(X(N) \mid \mathcal{F}_t) = \mathbf{E}\left(\lim_{N \rightarrow \infty} X(N) \mid \mathcal{F}_t\right) = \mathbf{E}(X(\infty) \mid \mathcal{F}_t)$$

Kiterjesztés tetszőleges megállási időkre

Egyenletesen integrálható martingál esetén az $X(\infty)$ értelmes, így az $X(\tau)$ is értelmes minden τ megállási idő esetén.

Theorem (Megállási opciókról szóló tétel)

Legyen (X, \mathcal{F}) egy egyenletesen integrálható martingál, és legyenek $\tau_1 \leq \tau_2$ tetszőleges megállási idők. Ekkor

$$X(\tau_1) \stackrel{m.m.}{=} \mathbf{E}(X(\tau_2) | \mathcal{F}_{\tau_1}).$$

A várható érték megmaradása és martingálok

Theorem

Egy X jobbról reguláris és adaptált folyamat pontosan akkor martingál, ha minden τ korlátos megállási időre $X(\tau) \in L^1(\Omega)$ és $\mathbf{E}(X(\tau)) = \mathbf{E}(X(0))$. Az egyenlőség pontosan akkor igaz minden megállási időre, ha az X egyenletesen integrálható martingál.

Ha az X martingál, illetve egyenletesen integrálható martingál, akkor a megállási opciókról szóló tétel miatt az állítás teljesül.

A várható érték megmaradása és martingálok

Megfordítva. Legyen $s < t$ és $A \in \mathcal{F}_s$. A $\tau \doteq t\chi_{A^c} + s\chi_A$ megállási idő. A feltétel szerint

$$\mathbf{E}(X(0)) = \mathbf{E}(X_\tau) = \mathbf{E}(X(t)\chi_{A^c}) + \mathbf{E}(X(s)\chi_A).$$

De a $\tau \equiv t$ szintén megállási idő, tehát

$$\mathbf{E}(X(0)) = \mathbf{E}(X(t)) = \mathbf{E}(X(t)\chi_{A^c}) + \mathbf{E}(X(t)\chi_A).$$

A két oldalt összehasonlítva $\mathbf{E}(X(s)\chi_A) = \mathbf{E}(X(t)\chi_A)$, vagy ami ugyanaz

$$\mathbf{E}(X(s) \mid \mathcal{F}_s) = \mathbf{E}(X(t) \mid \mathcal{F}_s).$$

Az adaptáltság miatt az $X(s)$ \mathcal{F}_s -mérhető, így $X(s) = \mathbf{E}(X(t) \mid \mathcal{F}_s)$. Ha minden megállási idő megengedett, akkor a feltétel szerint az $X(\infty)$ létezik és integrálható, valamint a $t = \infty$ megengedett, következésképpen az X egyenletesen integrálható.

A martingálmegmaradási tétel

Theorem

Ha X martingál, és τ megállási idő, akkor az X^τ megállított folyamat is martingál.

Ha az X jobbról reguláris, akkor az X^τ megállított folyamat is jobbról reguláris. Miként az általános elmélet tárgyaláskor láttuk, az a X^τ megállított folyamat adaptált marad. Legyen ϕ korlátos megállási idő. A $v \doteq \min(\phi, \tau)$ szintén korlátos. Mivel

$$\{v \leq t\} = \{\phi \leq t\} \cup \{\tau \leq t\} \in \mathcal{F}_t,$$

ezért a v is megállási idő.

$$\mathbf{E}(X^\tau(\phi)) = \mathbf{E}(X(v)) = \mathbf{E}(X(0)) = \mathbf{E}(X^\tau(0)),$$

következésképpen az előző állítás miatt az X^τ martingál.

Megállási opciók és a jobbról való folytonosság

Example

A martingálok jobbról való folytonossága lényeges.

Legyen P egy λ paraméterű Poisson-folyamat és legyen $\pi(t) \stackrel{\circ}{=} P(t) - \lambda t$ az úgynevezett kompenzált Poisson-folyamat. Miként láttuk a π martingál. Ha a folyamatot nem jobbról, hanem balról tesszük folytonossá, és a $\tau > 0$ a folyamat első ugrásának az időpontja, és $N > 0$, akkor a $T \stackrel{\circ}{=} \tau \wedge N > 0$ egy korlátos megállási idő, de

$$\mathbf{E}(\pi(0)) = 0 < \mathbf{E}(-\lambda T) = \mathbf{E}(P_T - \lambda T) = \mathbf{E}(\pi_T).$$

Intervallumból való kilépés

Example

Ha $a < 0 < b$ és w egy Wiener-folyamat, akkor a w folyamat τ_a és τ_b találati idejére

$$\mathbf{P}(\tau_a < \tau_b) = \frac{b}{b-a}, \quad \mathbf{P}(\tau_b < \tau_a) = \frac{-a}{b-a}.$$

A Wiener-folyamat trajektóriái 1 valószínűséggel nem korlátosak, tehát majdnem minden az origóból kiinduló trajektória valamelyik oldalon kilép az $[a, b]$ szakaszból, tehát

$$\mathbf{P}(\tau_a < \tau_b) + \mathbf{P}(\tau_b < \tau_a) = 1.$$

Intervallumból való kilépés II.

Ha $\tau \stackrel{\circ}{=} \min(\tau_a, \tau_b)$, akkor a w^τ korlátos martingál, ugyanis $a \leq w^\tau \leq b$. Minden korlátos martingál triviálisan egyenletesen integrálható. Így alkalmazhatjuk a megállási opciókról szóló tételt. A w_τ^τ vagy a , vagy b , ennek megfelelően

$$\mathbf{E}(w_\tau^\tau) = a\mathbf{P}(\tau_a < \tau_b) + b\mathbf{P}(\tau_b < \tau_a) = \mathbf{E}(w^\tau(0)) = 0.$$

Két egyenletünk van két ismeretlennel, amit megoldva éppen a keresett összefüggéseket kapjuk.

A kilépési idő Laplace-transzformáltja

Example

Valamely Wiener-folyamat valamely a időponthoz tartozó τ_a találati idejének Laplace-transzformáltja

$$L(s) \stackrel{\circ}{=} \mathbf{E}(\exp(-s\tau_a)) = \exp\left(-|a|\sqrt{2s}\right), \quad s \geq 0.$$

Legyen $a > 0$. A Laplace-transzformálttal képzett

$$X(t) \stackrel{\circ}{=} \exp\left(sw(t) - s^2\frac{t}{2}\right)$$

exponenciális martingál miként láttuk martingál, ezért az X^{τ_a} megállított folyamat is martingál. Ha $s \geq 0$, akkor

$$0 \leq X^{\tau_a}(t) \leq \exp\left(sa - \frac{s^2 t}{2}\right) \leq \exp(as),$$

ezért az X^{τ_a} korlátos martingál.

A kilépési idő Laplace-transzformáltja II.

Minden korlátos martingál egyenletesen integrálható, így alkalmazható a megállási opciókról szóló tétel, tehát

$$\mathbf{E} \left(X_{\tau_a}^{\tau_a} \right) = \mathbf{E} \left(\exp \left(sa - \frac{s^2 \tau_a}{2} \right) \right) = \mathbf{E} \left(X^{\tau_a} (0) \right) = 1,$$

amiből

$$\mathbf{E} \left(\exp \left(-\frac{s^2 \tau_a}{2} \right) \right) = \exp(-sa).$$

Egyszerű helyettesítéssel, ha $s \geq 0$

$$L(s) \doteq \mathbf{E} \left(\exp(-s\tau_a) \right) = \exp\left(-a\sqrt{2s}\right).$$

Ha $a < 0$, akkor a $-w$ Wiener-folyamatra és az $|a| = -a > 0$ pontra megismételve a számolást

$$L(s) = \exp\left(-|a|\sqrt{2s}\right).$$