Sztochasztikus folyamatok

Ez az a tantárgy, amit meg kell tanulni

Medvegyev Péter

2008

Mi a sztochasztikus folyamat?

1. $X(t,\omega)$ kétváltozós függvény, amely alkalmas mérhetőségi, illetve topológiai tulajdonságokkal bír.

Mi a sztochasztikus folyamat?

1. $X(t,\omega)$ kétváltozós függvény, amely alkalmas mérhetőségi, illetve topológiai tulajdonságokkal bír.
2. Ha az ω változó függvényeként nézzük valószínűségi változó.

Mi a sztochasztikus folyamat?

1. $X(t, \omega)$ kétváltozós függvény, amely alkalmas mérhetőségi, illetve topológiai tulajdonságokkal bír.
2. Ha az ω változó függvényeként nézzük valószínűségi változó.
3. Ha a t, idő paraméter függvényeként nézzük, akkor egy függvény, amit **trajektóriának** mondunk.

Mi a sztochasztikus folyamat?

1. $X(t, \omega)$ kétváltozós függvény, amely alkalmas mérhetőségi, illetve topológiai tulajdonságokkal bír.
2. Ha az ω változó függvényeként nézzük valószínűségi változó.
3. Ha a t, idő paraméter függvényeként nézzük, akkor egy függvény, amit **trajektóriának** mondunk.
4. A véletlen nem az egyes t időpontokban hat, hanem a trajektóriát választja ki.

Mi a sztochasztikus folyamat?

1. $X(t, \omega)$ kétváltozós függvény, amely alkalmas mérhetőségi, illetve topológiai tulajdonságokkal bír.
2. Ha az ω változó függvényeként nézzük valószínűségi változó.
3. Ha a t, idő paraméter függvényeként nézzük, akkor egy függvény, amit **trajektóriának** mondunk.
4. A véletlen nem az egyes t időpontokban hat, hanem a trajektóriát választja ki.
5. A trajektória általában vagy jobbról, vagy balról **reguláris**. Ez utóbbi azt jelenti, hogy van jobb és bal oldali határérték és a függvény vagy jobbról, vagy balról folytonos.

Mi a sztochasztikus folyamat?

1. $X(t,\omega)$ kétváltozós függvény, amely alkalmas mérhetőségi, illetve topológiai tulajdonságokkal bír.
2. Ha az ω változó függvényeként nézzük valószínűségi változó.
3. Ha a t, idő paraméter függvényeként nézzük, akkor egy függvény, amit **trajektóriának** mondunk.
4. A véletlen nem az egyes t időpontokban hat, hanem a trajektóriát választja ki.
5. A trajektória általában vagy jobbról, vagy balról **reguláris**. Ez utóbbi azt jelenti, hogy van jobb és bal oldali határérték és a függvény vagy jobbról, vagy balról folytonos.
6. A regularitás miatt beszélhetünk a $\Delta X(t,\omega) \circeq X(t+,\omega) - X(t-,\omega)$ ugrásokról.

Milyen mérhetőségi struktúrákra lesz szükségünk?

1. $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$ közönséges valószínűség mező. Technikai okokból a mező teljes, vagyis ha $B \subseteq A$ és $\mathbf{P}(A) = 0$, akkor $B \in \mathcal{A}$ szintén teljesül. A számegyenesen a Borel-mérhető halmazok nem teljesek, de a Lebesgue-mérhetőek igen.

Milyen mérhetőségi struktúrákra lesz szükségünk?

1. $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$ közönséges valószínűség mező. Technikai okokból a mező teljes, vagyis ha $B \subseteq A$ és $\mathbf{P}(A) = 0$, akkor $B \in \mathcal{A}$ szintén teljesül. A számegyenesen a Borel-mérhető halmazok nem teljesek, de a Lebesgue-mérhetőek igen.
2. Adott egy $\mathcal{F}$-fel jelölt filtráció. A filtráció elemei maguk is σ-algebrák. Ha $s < t$, akkor $\mathcal{F}_s \subseteq \mathcal{F}_t \subseteq \mathcal{A}$.

Milyen mérhetőségi struktúrákra lesz szükségünk?

1. $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$ közönséges valószínűség mező. Technikai okokból a mező teljes, vagyis ha $B \subseteq A$ és $\mathbf{P}(A) = 0$, akkor $B \in \mathcal{A}$ szintén teljesül. A számegyenesen a Borel-mérhető halmazok nem teljesek, de a Lebesgue-mérhetőek igen.
2. Adott egy $\mathcal{F}$-fel jelölt filtráció. A filtráció elemei maguk is σ-algebrák. Ha $s < t$, akkor $\mathcal{F}_s \subseteq \mathcal{F}_t \subseteq \mathcal{A}$.
3. $\mathcal{F}_{t+} \overset{\circ}{=} \cap_{s>t} \mathcal{F}_s$, a filtráció **jobbról folytonos**, ha $\mathcal{F}_t = \mathcal{F}_{t+}$ minden t időpontban.

Milyen mérhetőségi struktúrákra lesz szükségünk?

1. $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$ közönséges valószínűség mező. Technikai okokból a mező teljes, vagyis ha $B \subseteq A$ és $\mathbf{P}(A) = 0$, akkor $B \in \mathcal{A}$ szintén teljesül. A számegyenesen a Borel-mérhető halmazok nem teljesek, de a Lebesgue-mérhetőek igen.
2. Adott egy $\mathcal{F}$-fel jelölt filtráció. A filtráció elemei maguk is σ-algebrák. Ha $s < t$, akkor $\mathcal{F}_s \subseteq \mathcal{F}_t \subseteq \mathcal{A}$.
3. $\mathcal{F}_{t+} \stackrel{\circ}{=} \cap_{s>t}\mathcal{F}_s$, a filtráció **jobbról folytonos**, ha $\mathcal{F}_t = \mathcal{F}_{t+}$ minden t időpontban.
4. Az $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P}, \mathcal{F})$ teljesíti a **szokásos feltételeket**, ha az $\mathcal{F}$ jobbról folytonos és az $\mathcal{F}_0$ tartalmazza az $\mathcal{A}$ összes nullmértékű halmazát.

Milyen mérhetőségi struktúrákra lesz szükségünk?

1. $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$ közönséges valószínűség mező. Technikai okokból a mező teljes, vagyis ha $B \subseteq A$ és $\mathbf{P}(A) = 0$, akkor $B \in \mathcal{A}$ szintén teljesül. A számegyenesen a Borel-mérhető halmazok nem teljesek, de a Lebesgue-mérhetőek igen.
2. Adott egy $\mathcal{F}$-fel jelölt filtráció. A filtráció elemei maguk is σ-algebrák. Ha $s < t$, akkor $\mathcal{F}_s \subseteq \mathcal{F}_t \subseteq \mathcal{A}$.
3. $\mathcal{F}_{t+} \stackrel{\circ}{=} \cap_{s>t}\mathcal{F}_s$, a filtráció **jobbról folytonos**, ha $\mathcal{F}_t = \mathcal{F}_{t+}$ minden t időpontban.
4. Az $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P}, \mathcal{F})$ teljesíti a **szokásos feltételeket**, ha az $\mathcal{F}$ jobbról folytonos és az $\mathcal{F}_0$ tartalmazza az $\mathcal{A}$ összes nullmértékű halmazát.
5. A szokásos feltételek nélkül nincs élet a sztochasztikus folyamatok elméletében.

Milyen mérhetőségi fogalmakra lesz szükségünk?

Definition

Ha minden t-re az $X(t)$ mérhető az $\mathcal{F}_t$-re nézve, akkor adaptált folyamatokról beszélünk. Ez a parciális mérhetőségnek felel meg és túl enyhe megkötés.

Definition

Ha minden t-re.a folyamat leszűkítése a $[0, t]$-re mérhető az

$$\mathcal{B}([0, t]) \times \mathcal{F}_t$$

szorzatra, akkor progresszíven mérhető folyamatokról beszélünk.

Klasszikus példa progresszíven mérhető folyamatra a reguláris folyamatok ugrásaiból álló folyamat.

Jobbról reguláris folyamatok progresszíven mérhetőek

Theorem

Ha az X adaptált folyamat minden realizációja minden időpontban vagy balról vagy jobbról folytonos, akkor az X progresszíven mérhető.

Jelölje $\mathcal{F}$ a filtrációt. Tegyük fel, hogy a folyamat trajektóriái jobbról folytonosak. Rögzítsünk le egy $t > 0$ időpontot. Jelölje X a leszűkített folyamatot. Minden $n \in \mathbb{N}$ természetes számra osszuk fel a $[0, t]$ intervallumot 2^n részre, és

$$X_n(s, \omega) \circeq \begin{cases} X\left(\frac{kt}{2^n}, \omega\right) & \text{ha} \quad s \in \left(\frac{(k-1)t}{2^n}, \frac{kt}{2^n}\right] \\ X(0, \omega) & \text{ha} \quad s = 0 \end{cases}.$$

Mivel az $s \mapsto \mathcal{F}_s$ monoton, ezért az X_n lépcsős folyamat $\mathcal{B}([0, t]) \times \mathcal{F}_t$ mérhető. A feltételezett jobbról való folytonosság miatt, ha $(s, \omega) \in [0, t] \times \Omega$, akkor

$$\lim_{n \to \infty} X_n(s, \omega) = X(s, \omega),$$

ezért az X is $\mathcal{B}([0, t]) \times \mathcal{F}_t$ mérhető.

Adaptált folyamat, amely nem progresszíven mérhető

Legyen $\Theta \doteq \Omega \doteq [0,1]$, a σ-algebra mind a két halmazon legyen $\mathcal{B}([0,1])$. Az $\mathcal{F}$ filtráció minden t-re álljon a $[0,1]$ egy pontból álló halmazai által generált σ-algebra halmazaiból. Legyen

$$X(t,\omega) \doteq \begin{cases} 1 & \text{ha} \quad t=\omega \\ 0 & \text{ha} \quad t \neq \omega \end{cases} .$$

Vagyis X legyen a

$$\Delta \doteq \{(t,\omega) : t=\omega\} \subseteq [0,1] \times [0,1]$$

átló karakterisztikus függvénye. Az $X(t)$ minden t időpontban triviálisan adaptált az $\mathcal{F}$ filtrációra nézve. Ugyanakkor az X például nem $\mathcal{B}(\Theta) \times \mathcal{F}_{1/2}$ mérhető, és ezért az X nem progresszíven mérhető. Ha a folyamat szorzat mérhető lenne, akkor a $[0,1/2] \times \Omega \cap \Delta$ halmaz is szorzat mérhető halmaz lenne és az Ω halmazra való vetületének, vagyis a $[0,1/2]$ halmaznak $\mathcal{F}$-mérhetőnek kellene lenni.

Wiener-folyamat definíciója

Definition

A $\{w(t,\omega)\}_{t\geq 0}$ folyamatot Wiener-folyamatnak mondjuk, ha teljesíti az alábbi négy feltételt:

1. $w(0) \equiv 0$,
2. a w növekményei függetlenek,
3. tetszőleges $0 \leq s < t$ értékekre a $w(t) - w(s) \cong N\left(0, \sqrt{t-s}\right)$, vagyis a $w(t) - w(s)$ változó sűrűségfüggvénye
$$g_{t-s}(x) \doteq \frac{1}{\sqrt{2\pi(t-s)}} \exp\left(\frac{-x^2}{2(t-s)}\right).$$
4. A w folytonos abban az értelemben, hogy minden ω kimenetelre a $w(\omega)$ trajektória folytonos.

Nem jobbról folytonos filtráció

Az X folyamat legyen egy w Wiener–folyamat és a filtráció legyen a generált filtráció. F legyen az olyan ω kimenetelek halmaza, amelyhez van $\varepsilon > 0$, hogy a $[0, \varepsilon]$ szakaszon a $w(\omega)$ trajektória nulla. Világos, hogy $F = \cup_n F_n$, ahol F_n az olyan kimenetelek halmaza, ahol a $w(\omega)$ nulla a $[0, 1/n]$ szakaszon. Az F_n mérhető, hiszen ekvivalens a $w(r_n, \omega) = 0$, $r_n \in [0, 1/n] \cap \mathbb{Q}$ feltétellel. A folyamat értékének eloszlása minden időpontban folytonos, ugyanis a $w(t)$ minden t-re normális eloszlású, így nulla annak a valószínűsége, hogy w a folyamat megszámlálható előre megadott pontban nulla értéket vegyen fel. Így $\mathbf{P}(F_n) = 0$, ezért az F is mérhető és $\mathbf{P}(F) = 0$. Definíció szerint $w(0) \equiv 0$, ezért $\mathcal{F}_0^0 = \{\Omega, \emptyset\}$, ugyanis tetszőleges konstans értékű függvény által generált σ-algebra csak az üres halmazból, illetve az alaphalmazból áll. Tehát $F \notin \mathcal{F}_0^0$. Ha $t > 0$ és $1/n \leq t$, akkor $F_n \in \mathcal{F}_t^0$, amiből $\cup_{1/n \leq t} F_n \in \mathcal{F}_t^0$. Ugyanakkor tetszőleges t-re $\cup_{1/n \leq t} F_n = F$, ugyanis evidens módon $\cup_{1/n \leq t} F_n \subseteq F$, de ha $\omega \in F$, akkor alkalmasan nagy n-re $\omega \in F_n \subseteq \cup_{1/n \leq t} F_n$. Ebből viszont $F \in \cap_{t>0} \mathcal{F}_t^0 = \mathcal{F}_{0+}^0$, vagyis $\mathcal{F}_0^0 \neq \mathcal{F}_{0+}^0$.

Szokásos feltételek és a nullmértékű halmazok

Emlékeztetünk, hogy a kibővített filtrációt úgy kapjuk, hogy a filtrációt kibővítjük a nulla halmazokkal. Wiener folyamat esetén a folyamat által generált filtráció kibővített filtrációja esetén $\mathcal{F}_0$ az összes nullmértékű halmazokból áll.

Theorem

Ha $\mathcal{F}$ jelöli valamely w Wiener-folyamat kibővített filtrációját, akkor az $\mathcal{F}$ jobbról folytonos.

Véges változású függvények

Definition

Egy $[a, b]$ szakaszon értelmezett F függvényt korlátos változásúnak mondunk, ha létezik olyan K szám, hogy az $[a, b]$ minden

$$a = t_0 < t_1 < \ldots < t_n = b$$

felbontására

$$\sum_{i=0}^{n-1} |F(t_{i+1}) - F(t_i)| \leq K.$$

A lehetséges K számok infimumát $\operatorname{Var}(F)_a^b$ módon fogjuk jelölni és az F $[a, b]$ szakaszon való teljes megváltozásának fogjuk mondani. Ha valamely az $\mathbb{R}_+$ félegyenesen értelmezett F függvény az összes kompakt szakaszon korlátos változású, akkor a függvényt véges megváltozásúnak mondjuk.

Véges változású függvények és mértékek

Definition

Egy μ mértéket lokálisan végesnek mondunk, ha minden kompakt szakasz mértéke véges.

Theorem

Ha μ egy lokálisan véges mérték az $\mathbb{R}_+$ félegyenesen, akkor az $F(x) \overset{\circ}{=} \mu((0, x])$ egy jobbról reguláris, véges változású függvény. Megfordítva minden F jobbról reguláris véges változású függvényhez létezik olyan μ mérték, amelyre az egyenlőség teljesül. A megfeleltetés egyértelmű.

Érdemes megjegyezni, hogy az $(a, b]$ alakú halmazokra definiáltuk a μ mértéket és nem az $[a, b)$ alakúakra. Ez a sztochasztikus analízisben követett eljárás, így az eloszlásfüggvények jobbról és nem balról folytonosak. Ennek megfelelően az $\int_a^b f d\mu$ jelölés az $(a, b]$ halmazon való integrálásra utal.

Pi és Lambda rendszerek

Definition

Valamely X alaphalmazon értelmezett korlátos, valós értékű függvények $\mathcal{L}$ családját λ-rendszernek mondjuk, ha

1. 1, vagyis az azonosan 1 függvény eleme az $\mathcal{L}$-nek,
2. az $\mathcal{L}$ vektortér,
3. ha $0 \leq f_n \nearrow f$, $f_n \in \mathcal{L}$ és az f korlátos, akkor $f \in \mathcal{L}$.

Definition

Valamely X alaphalmazon értelmezett valós függvényekből álló $\mathcal{P}$ családot π-rendszernek mondunk, ha a $\mathcal{P}$ zárt a szorzásra, vagyis ha $f_1, f_2 \in \mathcal{P}$, akkor $f_1 f_2 \in \mathcal{P}$.

Monoton osztály tétel

Theorem

Ha $\mathcal{P}$ π-rendszer és $\mathcal{L}$ λ-rendszer és $\mathcal{P} \subseteq \mathcal{L}$, akkor az $\mathcal{L}$ tartalmazza az összes $\sigma\left(\mathcal{P}\right)$-mérhető, korlátos valós értékű függvényt.

Vegyük észre, hogy az $\mathcal{L}$ eleve csak korlátos függényekből áll .Vegyük észre, hogy az $\mathcal{L}$ tartalmazza a $\mathcal{P}$ elemeiből képzett összes polinómot. Némiképpen elnagyolva az állítás szerint az első olyan osztály amely zárt a monoton konvergenciára nézve és tartalmazza a polinómokat éppen a mérhető függvények osztálya.

Progresszív mérhetőség és adaptáltság

Theorem

Legyen V jobbról reguláris és adaptált folyamat. Tegyük fel továbbá, hogy a V mindegyik trajektóriája véges változású, vagyis az összes $[0, t]$. kompakt időszakaszon az összes trajektória korlátos változású.

1. *Ha minden ω kimenetelre az $X(\omega)$ trajektóriák a $V(\omega)$ mértékre nézve az összes véges időszakaszon integrálhatóak, akkor az*

$$Y(t, \omega) \stackrel{\circ}{=} \int_0^t X(s, \omega) V(ds, \omega)$$

   parametrikus integrálok jobbról regulárisak. Speciálisan ez a tulajdonság teljesül, ha az X trajektóriái regulárisak.

2. *Ha az X progresszíven mérhető, akkor az Y adaptált.*

Az állítás bizonyítása I.

Az állítás első fele a majorált konvergencia tétel közvetlen következménye. Például

$$\begin{aligned} Y(t+,\omega) &\stackrel{\circ}{=} \lim_{h\searrow 0}\int_0^{t+h} X(s,\omega)\,V(ds,\omega) = \\ &= \lim_{h\searrow 0}\int_0^{t+1} \chi([0,t+h])\,X(s,\omega)\,V(ds,\omega) = \\ &= \int_0^{t+1} \lim_{h\searrow 0} \chi([0,t+h])\,X(s,\omega)\,V(ds,\omega) = \\ &= \lim_{h\searrow 0}\int_0^{t+1} \chi([0,t])\,X(s,\omega)\,V(ds,\omega) = \\ &= \int_0^{t} X(s,\omega)\,V(ds,\omega) \stackrel{\circ}{=} Y(t,\omega)\,. \end{aligned}$$

A reguláris trajektória definíciója miatt a V minden trajektóriája folytonos a $t=0$ pontban, így a $\{t=0\}$ pont mértéke az összes kimenetelre nulla.

Az állítás bizonyítása II.

Az első tulajdonság második fele az alábbi következménye:

Theorem

Egy reguláris függvény minden kompakt halmazon korlátos.

Ha ez nem így lenne és egy reguláris f függvény egy kompakt $[a, b]$ szakaszon nem lenne korlátos, akkor egy alkalmas az $[a, b]$ szakaszból vett (t_n) sorozatra $|f(t_n)| \geq n$ lenne. Mivel az $[a, b]$ kompakt ezért feltehető, hogy a sorozatnak van részsorozata, amely egy $t^* \in [a, b]$ ponthoz konvergál. A számegyenes elemi tulajdonsága miatt a t^* vagy egy jobbról vagy balról vett sorozattal és elérhető. De ez triviálisan ellentmond annak, hogy az f-nek minden pontban van jobbról és balról is határértéke.

Az állítás bizonyítása III.

Jelölje $\mathcal{H}$ az olyan korlátos folyamatok családját, amelyre az $Y(t)$ minden t-re $\mathcal{F}_t$-mérhető. Véges időszakaszokon a V minden trajektóriája korlátos változású, ezért az általa generált mérték minden kimenetelre minden véges időszakaszon véges, így a korlátos függvények integrálhatóak, következésképpen a $\mathcal{H}$ lineáris tér és a $1 \in \mathcal{H}$. Ha $0 \leq H_n \in \mathcal{H}$ és $H_n \nearrow H$ és a H korlátos, akkor a majorált konvergencia tétel miatt $H \in \mathcal{H}$. Ebből következően a $\mathcal{H}$ egy λ-rendszer. Ha $C \in \mathcal{F}_t$ és $s_1 \leq s_2 \leq t$, valamint $B \stackrel{\circ}{=} (s1, s2] \times C$, akkor mivel a V adaptált az

$$\int_0^t \chi_B(s,\omega) V(ds,\omega) = \chi_C(\omega)\left(V(s_2,\omega) - V(s_1,\omega)\right)$$

$\mathcal{F}_t$-mérhető. A $(s_1, s_2] \times C$ alakú mérhető téglák π-rendszert alkotnak, így a monoton osztály tétel miatt a $\mathcal{H}$ tartalmazza a χ_B alakú függvények által generált σ-algebrát.

Az állítás bizonyítása IV.

Mivel a $C \in \mathcal{F}_t$ tetszőleges lehet ezért a $\mathcal{B}((0,t]) \times \mathcal{F}_t$ σ-algebra szerint mérhetőek.benne vannak a $\mathcal{H}$-ban. Az X progresszíven mérhető, így a $[0,t]$ szakaszra való leszűkítése $(\mathcal{B}((0,t]) \times \mathcal{F}_t)$-mérhető. Így az állítás teljesül, ha az X korlátos és progresszíven mérhető. Az általános eset a majorált konvergencia tételből már következik.

Megállási idők definíciója

Definition

Legyen adva az Ω kimenetelek halmaza és az $\mathcal{F}$ filtráció. Legyen $\tau : \Omega \to \Theta \cup \{\infty\}$.

1. A τ függvényt az $\mathcal{F}$ filtrációhoz tartozó megállási időnek, vagy megállási szabálynak mondjuk, ha minden $t \in \Theta$ esetén
$$\{\tau \leq t\} \in \mathcal{F}_t.$$
2. A $\tau : \Omega \to \Theta \cup \{\infty\}$ az $\mathcal{F}$ filtrációhoz tartozó gyenge megállási idő, vagy gyenge megállási szabály ha minden $t \in \Theta$ esetén
$$\{\tau < t\} \in \mathcal{F}_t.$$

Megállási idők és a jobbról folytonos filtrációk

Theorem

Minden megállási idő gyenge megállási idő. Ha az $\mathcal{F}$ filtráció jobbról folytonos, akkor minden gyenge megállási idő megállási idő.

Felhasználva, hogy minden filtráció monoton nő

$$\{\tau < t\} = \cup_n \left\{\tau \leq t - \frac{1}{n}\right\} \in \mathcal{F}_t.$$

Megfordítva, ha az $\mathcal{F}$ jobbról folytonos, vagyis ha $\mathcal{F}_{t+} = \mathcal{F}_t$, akkor

$$\{\tau \leq t\} = \cap_n \left\{\tau < t + \frac{1}{n}\right\} \in \cap_n \mathcal{F}_{t+1/n} \overset{\circ}{=} \mathcal{F}_{t+} = \mathcal{F}_t.$$

Megállási időkkel kapcsolatos műveletek

Theorem

Ha τ és σ megállási idők, akkor a $\tau \wedge \sigma$ és a $\tau \vee \sigma$ is megállási idő. Ha (τ_n) megállási idők monoton növekedő sorozata, akkor a $\tau \stackrel{\circ}{=} \lim_{n\to\infty} \tau_n$ is megállási idő. Ha az $\mathcal{F}$ filtráció jobbról folytonos és (τ_n) megállási idők monoton csökkenő sorozata, akkor a $\tau \stackrel{\circ}{=} \lim_{n\to\infty} \tau_n$ szintén megállási idő. Ha az $\mathcal{F}$ filtráció jobbról folytonos és (τ_n) megállási időkből álló sorozat, akkor a $\limsup_n \tau_n$, és a $\liminf_n \tau_n$ határértékek szintén megállási idők.

Legyenek τ és σ megállási idők.

$$
\begin{aligned}
\{\tau \wedge \sigma \leq t\} &= \{\tau \leq t\} \cup \{\sigma \leq t\} \in \mathcal{F}_t, \\
\{\tau \vee \sigma \leq t\} &= \{\tau \leq t\} \cap \{\sigma \leq t\} \in \mathcal{F}_t.
\end{aligned}
$$

Ha $\tau_n \nearrow \tau$, akkor minden t-re $\{\tau \leq t\} = \cap_n \{\tau_n \leq t\} \in \mathcal{F}_t$. Ha $\tau_n \searrow \tau$, akkor minden t-re $\{\tau \geq t\} = \cap_n \{\tau_n \geq t\} \in \mathcal{F}_t$ vagyis $\{\tau < t\} = \cup_n \{\tau_n < t\} \in \mathcal{F}_t$. Ha az $\mathcal{F}$ filtráció jobbról folytonos, akkor a τ megállási idő.

Halmazok kezdőideje

Definition

Ha $\Gamma \subseteq \mathbb{R}_+ \times \Omega$, akkor a

$$\tau_\Gamma(\omega) \circeq \inf\{t : (t,\omega) \in \Gamma\}$$

kifejezést a Γ halmaz kezdőidejének nevezzük. Ha $B \subseteq \mathbb{R}$ és X sztochasztikus folyamat, akkor a

$$\tau_B(\omega) \circeq \inf\{t : X(t,\omega) \in B\}$$

esetenként a

$$\tau_B(\omega) \circeq \inf\{t > 0 : X(t,\omega) \in B\}$$

változót a B halmaz elérési, vagy találati idejének fogjuk nevezni.

Ha $\tau(\omega) = \infty$, akkor ezt úgy interpretáljuk, hogy az ω kimenetelre az τ által leírt esemény nem következik be.

Miért kell a teljessége az alaptérnek?

Theorem (Vetítési tétel)

Ha az $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$ *valószínűségi mező teljes és*

$$U \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n) \times \mathcal{A},$$

akkor

$$\mathrm{proj}_{\Omega} U \stackrel{\circ}{=} \{x : \exists t, (t, x) \in U\} \in \mathcal{A}.$$

Érdemes hangsúlyozni, hogy az állítás érvényét veszti, ha az $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$ nem teljes. Meg kell még jegyezni, hogy a tétel akkor sem teljesül, ha a $\mathcal{B}(\mathbb{R}^n) \times \mathcal{A}$ helyett egy bővebb σ-algebrát veszünk, ami egyúttal a Borel és a szorzatmérhetőség fogalmak fontosságát nyomatékosítja.

Megállási idők konstruálása

Theorem

Ha az $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P}, \mathcal{F})$ *kielégíti a szokásos feltételeket és a* Γ *halmaz progresszíven mérhető, akkor a* Γ *kezdőideje megállási idő. Speciálisan, ha* B *Borel-mérhető, akkor a*

$$\tau_B(\omega) \circeq \inf\{t : X(t,\omega) \in B\}$$

illetve a

$$\tau_B(\omega) \circeq \inf\{t > 0 : X(t,\omega) \in B\}$$

találati idők megállási idők.

A tétel második részét az elsőből a $\Gamma \circeq \{(t,\omega) : X(t,\omega) \in B\}$, illetve a $\Gamma \circeq \{(t,\omega) : X(t,\omega) \in B\} \cap (\{t > 0\} \times \Omega)$ halmazok esetén kapjuk.

A tétel bizonyítása

Vegyük a $\Gamma_t \triangleq \Gamma \cap [0,t) \times \Omega$ halmazt. Az elérési idő definíciója alapján $\{\tau_\Gamma < t\} = \text{proj}_\Omega(\Gamma_t)$, ugyanis ha $\tau_\Gamma(\omega) < t$, akkor van olyan s, hogy $(s,\omega) \in \Gamma_t$, vagyis az ω eleme a vetületnek, megfordítva, ha ω eleme a vetületnek, akkor alkalmas $s \in [0,t)$ esetén $(s,\omega) \in \Gamma$, vagyis $\tau_\Gamma(\omega) \le s < t$. A Γ progresszíven mérhető, ezért $\Gamma_t \in \mathcal{B}([0,t]) \times \mathcal{F}_t$. Emlékeztetünk, hogy általában valamely szorzatmérhető halmaz vetülete nem lesz mérhető. Az $\mathcal{A}$ a feltétel szerint teljes, az $\mathcal{F}_t$ a szokásos feltételek teljesülése miatt tartalmazza a nulla halmazokat, ezért az $\mathcal{F}_t$ is teljes, így a vetítési tétel alapján a Γ_t szorzatmérhető halmaz vetülete $\mathcal{F}_t$-mérhető, vagyis

$$\{\tau_\Gamma < t\} = \text{proj}_\Omega(\Gamma_t) \in \mathcal{F}_t,$$

Az $\mathcal{F}$ jobbról folytonos, ezért minden gyenge megállási idő megállási idő, vagyis a τ_Γ megállási idő.

Megállított változók, folyamatok eseményterek

Definition

Legyen X sztochasztikus folyamat, τ megállási idő.

1. Megállított folyamaton az

$$X^{\tau}(t,\omega) \circeq X(\tau(\omega) \wedge t, \omega)$$

folyamatot,

2. megállított változón az

$$X_{\tau}(\omega) \circeq X(\tau(\omega), \omega)$$

változót értjük. Az X_{τ} helyett legtöbbször a jobban olvasható $X(\tau)$ jelölést fogjuk használni.

3. Az $\mathcal{F}_{\tau}$ megállított σ-algebra az olyan $A \in \mathcal{A}$ halmazokból áll, amelyekre minden t-re $A \cap \{\tau \leq t\} \in \mathcal{F}_{t}$.

A végtelenben felvett érték definíciója

Vegyük észre, hogy a megállított változó definíciója pontatlan, ugyanis nem világos, hogy amennyiben a folyamat nem terjeszthető ki a $+\infty$ időpontra, akkor mi a megállított változó értéke a $\{\tau = +\infty\}$ halmazon. Ilyenkor szokás az

$$X_\tau(\omega) \triangleq X(\tau(\omega), \omega)\, \chi(\tau < \infty)(\omega)$$

definícióval élni. Amennyiben az X valamilyen játék értéke, és τ a játék befejezésének időpontja, akkor a definíció alapján, ha a játéknak valamely ω kimenetelre soha sincsen vége, akkor a játék nyereménye nulla. A jelölés egyszerűsítés kedvéért a $\chi(\tau < \infty)$ kifejezéssel való szorzást rendszerint elhagyjuk.

A nullában való megállítás definíciója

Időnként hasonló probléma léphet fel a megállított folyamattal is. A megállítással egy folyamat értéke a nulla időpontban nem módosítható, így gyakran az

$$X^{\tau}(t,\omega) \overset{\circ}{=} \chi(\tau(\omega) > 0) X(\tau(\omega) \wedge t, \omega)$$

definícióval szokás élni. Ennek előnye, hogy ha a $t = 0$ pontban a "megállítás feltétele" már teljesül, vagyis ha $\tau(\omega) = 0$, akkor a megállított folyamatot a $t = 0$ időpontban nullának definiáljuk. Valamely folyamatot általában akkor szokás megállítani, ha az értéke egy szintet átlép. Ha már a $t = 0$ pontban is nagy volt a folyamat értéke, akkor ott az értékét "elhagyjuk".

Alapvető tulajdonságok

Theorem

Legyen $\mathcal{F}$ tetszőleges filtráció, τ és σ legyenek megállási idők.

1. *A τ változó $\mathcal{F}_\tau$-mérhető.*
2. *Ha $\sigma \leq \tau$, akkor $\mathcal{F}_\sigma \subseteq \mathcal{F}_\tau$.*
3. $\mathcal{F}_\sigma \cap \mathcal{F}_\tau = \mathcal{F}_{\sigma \wedge \tau}$.

Bizonyítás

1. Elegendő megmutatni, hogy minden a-re a $\{\tau \leq a\}$ halmaz $\mathcal{F}_\tau$-mérhető. Ez az $\mathcal{F}_\tau$ definíciója szerint azt jelent, hogy minden t-re $\{\tau \leq a\} \cap \{\tau \leq t\} \in \mathcal{F}_t$. Világos, hogy a jobb oldalon álló metszet éppen $\{\tau \leq \min(a, t)\}$. Mivel a τ megállási idő, ezért

$$\{\tau \leq \min(a, t)\} \in \mathcal{F}_{\min(t,a)} \subseteq \mathcal{F}_t$$

ahol az utolsó tartalmazás az $\mathcal{F}$ monotonitásából evidens.

2. Ha $\sigma \leq \tau$, akkor $\{\tau \leq t\} \subseteq \{\sigma \leq t\}$. Ha $A \in \mathcal{F}_\sigma$, akkor

$$A \cap \{\tau \leq t\} = (A \cap \{\sigma \leq t\}) \cap \{\tau \leq t\} \in \mathcal{F}_t,$$

ugyanis a metszet mindkét tényezője eleme az $\mathcal{F}_t$-nek, így $A \in \mathcal{F}_\tau$.

3. Az előző pont alapján $\mathcal{F}_{\tau\wedge\sigma} \subseteq \mathcal{F}_\tau \cap \mathcal{F}_\sigma$. Ugyanakkor, ha $F \in \mathcal{F}_\tau \cap \mathcal{F}_\sigma$, akkor

$$\begin{aligned} F \cap \{\sigma \wedge \tau \leq t\} &= F \cap (\{\sigma \leq t\} \cup \{\tau \leq t\}) = \\ &= (F \cap \{\sigma \leq t\}) \cup (F \cap \{\tau \leq t\}) \in \mathcal{F}_t, \end{aligned}$$

vagyis $F \in \mathcal{F}_{\sigma\wedge\tau}$.

Megállított folyamatok adaptáltsága

Theorem

Ha X progresszíven mérhető és τ tetszőleges megállási idő, akkor az X_τ megállított változó $\mathcal{F}_\tau$-mérhető, az X^τ megállított folyamat progresszíven mérhető.

Az első állítás következik a másodikból, ugyanis ha B Borel-mérhető és X progresszíven mérhető, akkor minden s-re

$$\begin{aligned} \{X_\tau \in B\} \cap \{\tau \leq s\} &= \{X(\tau \wedge s) \in B\} \cap \{\tau \leq s\} = \\ &= \{X^\tau(s) \in B\} \cap \{\tau \leq s\} \in \mathcal{F}_s, \end{aligned}$$

ugyanis a metszet mind a két tagja eleme az $\mathcal{F}_t$ eseménytérnek. Vagyis az X_τ megállított változó $\mathcal{F}_\tau$-mérhető.

Bizonyítás

Tekintsük tehát az állítás második felét. Legyen

$$Y(t,\omega) \circeq \begin{cases} 1 & \text{ha} \quad t < \tau(\omega) \\ 0 & \text{ha} \quad t \geq \tau(\omega) \end{cases} .$$

Az Y triviálisan jobbról reguláris. A τ megállási idő, így

$$\{Y(t) = 0\} = \{\tau \leq t\} \in \mathcal{F}_t.$$

Tehát az Y adaptált, így az Y progresszíven mérhető. Ha $\tau(\omega) = 0$ akkor $Z(\omega) = 0$. Ha $\tau(\omega) > 0$, akkor

$$Z(t,\omega) \circeq \int_{(0,t]} X(s,\omega) Y(ds,\omega) = \begin{cases} 0 & \text{ha} \quad t < \tau(\omega) \\ -X(\tau(\omega),\omega) & \text{ha} \quad t \geq \tau(\omega) \end{cases} .$$

Mivel az X progresszíven mérhető a Z adaptált és jobbról reguláris, így szintén progresszíven mérhető. Elemi megfontolással

$$X^{\tau} = XY - Z + X(0)\chi(\tau = 0),$$

így az X^{τ} triviálisan progresszíven mérhető.

Megállított folyamatok adaptáltsága

Theorem

Ha X progresszíven mérhető, τ tetszőleges megállási idő, akkor az X^{τ} megállított folyamat adaptált.