Az Eszközárazás Második Alaptétele

ha teljes a piac

Kövi Dániel

Budapest Corvinus Egyetem

Október 2008

A Második Alaptétel

A Tétel lényege:

Diszkrét véges időhorizonton, ha a piac teljes, akkor az ekvivalens martingálmérték egyértelmű.

Azaz: ha teljes a piac, az árak egyértelműek, mert minden jövőbeli követelést tökéletesen lehet hedgelni.

A Második Alaptétel

Definition

S m-dimenziós folyamatból álló piac a $t = 0, 1, 2, \ldots, T$ időszakon teljes, ha minden H_T $\mathcal{F}_T$-mérhető követeléshez $\exists$ olyan előrejelezhető stratégia

$$(\theta_i(t))_{i=1}^{m}, \quad t = 1, \ldots, T$$

és λ valós szám amelyre

$$H_T = \lambda + \sum_{t=1}^{T} [S(t) - S(t-1)]\,\theta(t).$$

A Második Alaptétel

Theorem

Tegyük föl, hogy nincs arbitrázs az S által definiált piacon

$$S = \left(S_i\left(t\right)\right)_{i=1}^{m}, \quad t = 0, \ldots, T.$$

A piac akkor és csak akkor teljes, ha az ekvivalens martingál mérték, $\mathbf{Q}$ *(ami alatt S martingál) egyértelmű a* $\left(\Omega, \mathcal{F}_T\right)$ *téren.*

A Második Alaptétel Bizonyítása

A bizonyítás két lépésből áll.

1. Tegyük fel, hogy a piac teljes, és $\mathbf{Q}$ meg $\mathbf{R}$ két eltérő, $\mathbf{P}$-vel ekvivalens martingál mérték. Mivel a két mérték eltérő, ezért $\exists\ F \in \mathcal{F}_T$, amire $\mathbf{Q}(F) \neq \mathbf{R}(F)$. Mivel a piac teljes, minden $\mathcal{F}_T$-mérhető követeléshez $\exists$ $(\theta(t))_{t=1}^{T}$ m-dimenziós replikáló önfinanszírozó stratégia, még χ_F-hez is:

$$\chi_F = \lambda + \sum_{t=1}^{T} [S(t) - S(t-1)]\,\theta(t).$$

Ekkor már csak be kéne látni, hogy $\mathbf{E}^{\mathbf{Q}}(\chi_F) = \mathbf{E}^{\mathbf{R}}(\chi_F)$. A bizonyítás lényege, hogy $\forall$ $\mathbf{P}$ martingál mértékre (ami alatt S martingál):

$$\mathbf{E}^{\mathbf{P}}\left(\sum_{t=1}^{T} [S(t) - S(t-1)]\,\theta(t)\right) = 0$$

amiből következik, hogy $\mathbf{Q}(F) = \lambda = \mathbf{R}(F)$, ami viszont ellentmondás. Az első tétel bizonyításában sem tehettük fel a stratégiák korlátosságát, így nem lehet kihasználni az integrálok additivitását sem.

A Második Alaptétel Bizonyítása 2

A sztochasztikus integrálok fő problémája az, hogy az eredményük csak lokális martingál, és nem martingál, így az $\int \theta dS$ is csak lokális martingál.

Ám diszkrét és véges időhorizonton az integrálható lokális martingálok (feltételes várható értékkel rendelkezők) valódi martingálok is egyben. Mivel χ_F integrálható, ezért a $\int \theta dS$ valódi martingál 0 várható értékkel.

Ezt csak a következő alkalommal látjuk be.

A Második Alaptétel Bizonyítása 3

2. Tegyük fel, hogy a piac nem teljes. Ha feltesszük, hogy nincs arbitrázs, akkor $\exists$ $\mathbf{Q}$, ami alatt S martingál. Legyen

$$L \circeq \left\{ \lambda + \sum_{t=1}^{T} \left[S(t) - S(t-1) \right] \theta(t) \right\},$$

ahol θ előrejelzhető, és $\lambda \in \mathbb{R}$. Ha a piac nem teljes, akkor $L \neq L^0 (\Omega, \mathcal{F}_T, \mathbf{Q})$. Legyen $H_T \in L^0 \setminus L$. Mivel a mértéket meg lehet úgy változtatni ekvivalens módon, hogy véges számú valószínűségi változó integrálható legyen rajta ($\mathbf{P}'(A) = \int_A \exp(-\|\eta\|) \, d\mathbf{P}$), ezért feltehető, hogy S és H_T integrálhatóak $\mathbf{P}$-re nézve. Az első alaptétel miatt feltehető, hogy a $d\mathbf{Q}/d\mathbf{P}$ Radon–Nikodym derivált korlátos, ezért feltehető.hogy S és H_T integrálható $\mathbf{Q}$-ra nézve is.
Belátjuk, hogy L zárt altere $L^1 (\Omega, \mathcal{F}_T, \mathbf{Q})$-nek.

Viszont a

$$K \mathrel{\hat{=}} \left\{ \sum_{t=1}^{T} \left(S\left(t\right) - S\left(t-1\right), \theta\left(t\right) \right) \right\}$$

altér zárt L^0-ban. Így a Markov-egyenlőtlenség miatt az L^1-beli konvergenciából következik a sztochasztikus konvergencia, ezért a $K \cap L^1$ zárt altere L^1-nek.

Mivel a vizsgált mértékek valószínűségi mértékek $1 \in L^1$-nek ($\int_\Omega 1 d\mathbf{P} = 1$), így $L \cap L^1 = K + E$, ahol E a konstans val.változók altere. L zártságához elég lenne belátni, hogy $1 \in K$.
Ha $1 \notin K$, akkor $\forall l \in L$ előáll $l = \lambda 1 + r$ formában. Ha $l_n \to l_\infty$ akkor $l_\infty \in L$, a kérdés csak az, hogy az így keletkező $\left(\lambda_n\right)$ sorozat korlátos-e.

A Második Alaptétel Bizonyítása 5

Legyen K és 1 távolsága d, és mivel K zárt, és $1 \notin K$, ezért $d > 0$. Az (l_n) korlátossága miatt $\exists c$ amire $\|l_n\| \leq c$ $\forall n$-re. Mivel K altér, ezért ha $(r_n) \in K$, akkor $(-r_n/\lambda_n) \in K$, így

$$c \geq |\lambda_n 1 + r_n| = |\lambda_n| \left|1 + \frac{r_n}{\lambda_n}\right| = |\lambda_n| \left|1 - \left(-\frac{r_n}{\lambda_n}\right)\right| \geq |\lambda_n| \, d.$$

Mivel $d > 0$, ezért $c/d \geq |\lambda_n|$, azaz (λ_n) korlátos tehát van konvergens részsorozata, így $(\lambda_n 1)$-nek is. Ezért $l_n = \lambda_n 1 + r_n$ miatt (r_n) is konvergens, és K zártsága miatt (r_n) hatértéke is K-ban van. Tehát $(\lambda_n 1 + r_n)$ határértéke is K-beli, így L is zárt.

$H_T \notin L$ integrálható, $L^1 \backslash L \neq \{\varnothing\}$, így a Hahn–Banach tétel értelmében $\exists$ $z \in L^\infty(\Omega, \mathcal{F}_T, \mathbf{Q})$, amire:

$$\langle z, l \rangle = \int_\Omega z \cdot l d\mathbf{Q} = \mathbf{E}^{\mathbf{Q}}(z \cdot l) = 0, \quad l \in L.$$

Ha $\theta(t) = 0$ és $\lambda = 1$, mint előrejelezhető stratégia, akkor:

$$\langle z, 1 \rangle \circeq \int_\Omega z \cdot 1 d\mathbf{Q} = \int_\Omega z d\mathbf{Q} = 0.$$

Legyen $g \circeq 1 + z \; / \; 2\|z\|_\infty \geq 1/2 > 0$, és $\mathbf{R}(A) \circeq \int_A g \, d\mathbf{Q}$. A $g = d\mathbf{R}/d\mathbf{Q}$ derivált korlátos és pozitív, így $\mathbf{Q}$ és $\mathbf{R}$ ekvivalensek, és

$$\mathbf{R}(\Omega) = \mathbf{E}^{\mathbf{Q}}(1) + \frac{\mathbf{E}^{\mathbf{Q}}(z)}{2\|z\|_\infty} = 1,$$

így $\mathbf{R}$ egy ekvivalens valószínűségi mérték.

Tetszőleges előrejelezhető θ stratégia és $\lambda \in R$ mellett $\int_0^T \theta dS \in L$, mert θ korlátos, és a szeparáló z definícióját kihasználva

$$\begin{aligned}
& \mathbf{E}^{\mathbf{R}}\left(\sum_{t=1}^{T}\left[S(t)-S(t-1)\right]\cdot\theta(t)\right) \circeq \\
\circeq \quad & \mathbf{E}^{\mathbf{Q}}\left(\sum_{t=1}^{T}\left(\left[S(t)-S(t-1)\right]\cdot\theta(t)\right)\left(1+\frac{z}{2\left\|z\right\|_{\infty}}\right)\right) = \\
= \quad & \mathbf{E}^{\mathbf{Q}}\left(\sum_{t=1}^{T}\left[S(t)-S(t-1)\right]\cdot\theta(t)\right).
\end{aligned}$$

A Második Alaptétel Bizonyítása 8

Mivel S martingál $\mathbf{Q}$ alatt, és θ előrejelezhető a jobboldalra igaz, hogy:

$$\mathbf{E}^{\mathbf{Q}}\left(\sum_{t=1}^{T}\left[S(t)-S(t-1)\right]\cdot\theta(t)\right)=$$

$$=\mathbf{E}^{\mathbf{Q}}\left(\left[S(t)-S(t-1)\right]\cdot\theta(t)\right)=$$

$$=\sum_{t=1}^{T}\mathbf{E}^{\mathbf{Q}}\left(\mathbf{E}^{\mathbf{Q}}\left(\left[S(t)-S(t-1)\right]\cdot\theta(t)\mid\mathcal{F}_{t-1}\right)\right)=$$

$$=\sum_{t=1}^{T}\mathbf{E}^{\mathbf{Q}}\left(\mathbf{E}^{\mathbf{Q}}\left(\left[S(t)-S(t-1)\right]\mid\mathcal{F}_{t-1}\right)\cdot\theta(t)\right)=$$

$$=\sum_{t=1}^{T}\mathbf{E}^{\mathbf{Q}}\left(0\cdot\theta(t)\right)=0.$$

$\forall$ előrejelezhető θ-ra. Így $\mathbf{E}^{\mathbf{R}}\left(\int_0^T\theta dS\right)=0.$

Ha $\theta = 0$ a $(t-1)$-től eltérő időpontokra, ahol egyébként χ_F $(F \in \mathcal{F}_{t-1})$, akkor:

$$\mathbf{E}^{\mathbf{R}}\left(\left[S\left(t\right) - S\left(t-1\right)\right]\chi_F\right) = 0,$$

ami viszont megegyezik azzal, hogy

$$\int_F S\left(t\right) d\mathbf{R} = \int_F S\left(t-1\right) d\mathbf{R},$$

azaz a feltételes várható érték definíciójából
$\mathbf{E}^{\mathbf{R}}\left(S\left(t\right) \mid \mathcal{F}_{t-1}\right) = S\left(t-1\right)$, azaz $\mathbf{R}$ is martingál mérték, de $\mathbf{R} \neq \mathbf{Q}$, azaz $\nexists$ egyértelmű martingálmérték.

$\square$

Európai Derivatívok Árazása Diszkrét Időhorizonton

Az első és második alaptétel segítségével európai típusú derivatívok árazása könnyen megoldható. Legyen H_T egy pénzügyi követelés a T időpontban. Mivel a követelés a T időpontban teljesítődik a H_T változó $\mathcal{F}_T$-mérhető.

Ebből adódik a kérdés: mennyit ér a H_T követelés a $t = 0$ időpontban?

Tegyük fel, hogy nincs arbitrázs a piacon, és a piac teljes. Ekkor az első alaptétel értelmében $\exists \mathbf{Q}$ martingál mérték. A második tétel értelmében pedig H_T előállítható

$$H_T = \lambda + \sum_{t=1}^{T} \left[S(t) - S(t-1) \right] \theta(t).$$

Európai Derivatívok Árazása Diszkrét Időhorizonton 2

A no-arbitrage feltétel miatt λ egyértelmű. Ha nem lenne az, akkor $\exists \lambda_1, \lambda_2$, amire:

$$H_T = \lambda_i + \sum_{t=1}^{T} \left[S(t) - S(t-1) \right] \theta_i(t) \quad , \qquad i = 1, 2$$

ahol $\lambda_1 > \lambda_2$ esetén a $(\theta_2 - \theta_1)$ stratégia arbitrage.

A H_T követelés egyetlen értelmes ára, $\pi(H_T)$, az az összeg ami nem okoz arbitrázst a piacon.

Mi köze van λ-nak a $\mathbf{Q}$ mértékhez? Feltehető, hogy a H_T integrálható a $\mathbf{P}$ mérték alatt. Mivel a Radon–Nikodym derivált korlátos, ezért a $\mathbf{Q}$ mérték alatt is integrálható, és diszkrét időben a $\mathbf{E}^{\mathbf{Q}}\left(\int \theta dS\right) = 0$, mert S martingál $\mathbf{Q}$ alatt.

Így H_T-t repilkáló előállítás $\mathbf{Q}$ szerinti várható értékét véve:

$$\mathbf{E}^{\mathbf{Q}}(H_T) = \lambda + \mathbf{E}^{\mathbf{Q}}\left(\sum_{t=1}^{T}[S(t) - S(t-1)]\,\theta(t)\right) = \lambda + 0 = \pi(H_T)$$

A piac teljességét csak a H_T-t replikáló stratégia létezésénél használtuk ki. Amennyiben a piac nem teljes, de viszont a replikáló előállítás fennál a no-arbitrage feltétel miatt (mindennek csak egy ára van) mindegy, hogy melyik ekvivalens martingál mérték szerint vesszük a várható értéket, az ár, $\pi(H_T)$, egyértelmű, tehát független a mértéktől.

Meglepő Megjegyzés

Theorem

Ha a piac teljes, és nincsen arbitrage, akkor a $(\Omega, \mathcal{F}_T, \mathbf{P})$ *valószínűségi tér véges számú atomból áll.*

Meglepő Megjegyzés 2

Bizonyítás:
Legyen H_T egy tetsztőleges $\mathcal{F}_T$ mérhető követelés. Megfelelően megváltoztatva a mértéket feltehető, hogy a H_T integrálható $\mathbf{P}$ alatt. A Radon–Nikodym derivált korlátossága miatt H_T integrálható $\mathbf{Q}$ alatt is.

A feltevés miatt minden H_T integrálható $\mathbf{Q}$-n, emiatt Ω-nak csak véges számú pozitív diszjunkt halmaza van $\mathbf{Q}$ alatt (*ha végtelen számú lenne, akkor az* $\frac{1}{n}\mathbf{Q}(A_i)$ *alakú függvények nem lennének integrálhatóak*), emiatt az atomok száma véges kell, hogy legyen.
Véve véges számú atom diszjunkt uniójának komplementerét: $\mathbf{Q}(\Omega \setminus \uplus A_i)$ vagy 0 (*azaz véges atomos a tér*), vagy pozitív. Ekkor az atommentes résznek létezne pozitív mértékű részhalmaza, és ennek a komplementerére is fenn kéne állnia ugyanennek. Ami miatt létezne megszámlálhatóan sok diszjunkt pozitív zárt halmaz, ami ellentmondás. Tehát a $(\Omega, \mathcal{F}_T, \mathbf{Q})$ tér véges számú atomból áll.

Mivel $\mathbf{Q}$ és $\mathbf{P}$ ekvivalensek, ezért ez $\mathbf{P}$-re is fennál.

Diszkrét Idejű Lokális Martingálok

Feltételes Várható Érték

Nem negatív ξ valószínűségi változó esetén az $\mathbf{E}(\xi \mid \mathcal{F})$ feltételes várható érték jól definiált.
Így a feltételes várható érték operátor monotonitása és additívitása, valamint a torony-szabály könnyen igazolható. Azaz ha ξ és η nem negatívak, és ξ $\mathcal{F}$-mérhető, akkor

$$\mathbf{E}(\xi\eta \mid \mathcal{F}) = \xi\mathbf{E}(\eta \mid \mathcal{F}).$$

Előfordulhat viszont, hogy ξ-nek nincs véges várható értéke, így $\mathbf{E}(\xi \mid \mathcal{F})$ sem valószínűségi változó, azaz nem minden kimenetelre véges.

Feltételes Várható Érték

Definition

Tetszőleges ξ valószínűségi változó és $\mathcal{F}$ σ-algebra esetén, ha ξ^{+}-nak és ξ^{-}-nak véges a feltételes várható értéke, akkor a

$$\mathbf{E}\left(\xi \mid \mathcal{F}\right) \circeq \mathbf{E}\left(\xi^{+} \mid \mathcal{F}\right) - \mathbf{E}\left(\xi^{-} \mid \mathcal{F}\right)$$

kifejezés jól definiált, ezért tekinthetjük ezt az általánosított feltételes várható érték egy defininíciójának.

Definition (1)

A $(\xi_n, \mathcal{F}_n)$ sorozat diszrét idejű általánosított martingál, ha

1. az általánosított feltételes várható érték, $\mathbf{E}\left(\xi_{n+1} \mid \mathcal{F}_n\right)$ létezik $\forall n$-re,
2. és $\forall n$-re

$$\mathbf{E}\left(\xi_{n+1} \mid \mathcal{F}_n\right) \circeq \mathbf{E}\left(\xi_{n+1}^{+} \mid \mathcal{F}_n\right) - \mathbf{E}\left(\xi_{n+1}^{-} \mid \mathcal{F}_n\right) = \xi_n,$$

Mi akkor a különbség a martingál és az általánosított martingál között?

Definition (2)

A $(\xi_n, \mathcal{F}_n)$ sorozat lokális martingál, ha létezik megállítási idők egy sorozata (τ_k), amire $\tau_k \nearrow \infty$, és a megállított folyamat

$$\xi_n^{\tau_k} \circeq \chi(\tau_k > 0)\, \xi_{n \wedge \tau_k}$$

martingál $\mathcal{F}_n$-re, az adott filtrációra nézve $\forall k$-ra.

Martingál Transzformált

Definition (3)

A $(\xi_n, \mathcal{F}_n)$ sorozat martingál transzformált, azaz diszkrét idejű sztochasztikus integrál, ha létezik egy $(M_n, \mathcal{F}_n)$ martingál, és egy (θ_n) előrejelezhető folyamat, amire

$$\xi_n = \xi_0 + \sum_{k=1}^{n} \theta_k \left(M_k - M_{k-1}\right).$$

Állítás

A következő három állítás egymással ekvivalens:

1. ξ_n általánosított martingál

Állítás

A következő három állítás egymással ekvivalens:

1. ξ_n általánosított martingál
2. ξ_n lokális martingál

Állítás

A következő három állítás egymással ekvivalens:

1. ξ_n általánosított martingál
2. ξ_n lokális martingál
3. ξ_n martingál transzformált

Bizonyítás 2 $\Longrightarrow$ 1:
Legyen (ξ_n) egy lokális martingál, és legyen (τ_k) egy lokalizációs sorozat. A $\xi_{n+1}^{\tau_k}$ valószínűségi változó várható értéke véges, tehát a feltételes várható értékek is végesek, így

$$\begin{aligned}
\infty &> \mathbf{E}\left(\left|\xi_{n+1}^{\tau_k}\right| \mid \mathcal{F}_n\right) \overset{\circ}{=} \mathbf{E}\left(\left|\xi_{(n+1)\wedge\tau_k}\right| \chi\left(\tau_k > 0\right) \mid \mathcal{F}_n\right) \geq \\
&\geq \mathbf{E}\left(\left|\xi_{(n+1)\wedge\tau_k}\right| \chi\left(\tau_k > n\right) \mid \mathcal{F}_n\right) = \\
&= \mathbf{E}\left(\left|\xi_{n+1}\right| \chi\left(\tau_k > n\right) \mid \mathcal{F}_n\right) = \\
&= \chi\left(\tau_k > n\right) \mathbf{E}\left(\left|\xi_{n+1}\right| \mid \mathcal{F}_n\right).
\end{aligned}$$

Az utolsó sorban kihasználtuk, hogy τ_k megállítási idő, azaz $\chi\left(\tau_k > 0\right)$ $\mathcal{F}_n$-mérhető $\forall n$-re, így kiemelhető.

Bizonyítás 2 -> 1

A lokalizációs sorozat (τ_k) definíciója miatt $\tau_k(\omega) \to \infty$ majdnem minden ω-ra. Így m.m. ω-ra, ha k elég nagy, akkor

$$\mathbf{E}\left(\left|\xi_{n+1}\right| \mid \mathcal{F}_n\right)(\omega) = \chi\left(\tau_k(\omega) > n\right)\mathbf{E}\left(\left|\xi_{n+1}\right| \mid \mathcal{F}_n\right)(\omega) < \infty.$$

Ezért a feltételes várható érték létezik és véges. De ettől még a klasszikus feltételes várható értéket definiáló integrál nem feltétlenül értelmes. Legyen $\mathcal{G}_n$ olyan $\mathcal{F}_n$-beli halmazok halmaza, melyre

$$\mathbf{E}\left(\left|\xi_{n+1}\right| \mid \mathcal{F}_n\right)(\omega) = \chi\left(\tau_k(\omega) > n\right)\mathbf{E}\left(\left|\xi_{n+1}\right| \mid \mathcal{F}_n\right)(\omega) < \infty.$$

$\xi_n^{\tau_k}$ martingál, ezért $\left|\xi_n^{\tau_k}\right|$ szubmartingál, így

$$\begin{aligned}\int_{F\cap\{\tau_k>n\}} \left|\xi_n\right| d\mathbf{P} &= \int_{F\cap\{\tau_k>n\}} \left|\xi_n^{\tau_k}\right| d\mathbf{P} \leq \\ &\leq \int_{F\cap\{\tau_k>n\}} \left|\xi_{n+1}^{\tau_k}\right| d\mathbf{P} = \int_{F\cap\{\tau_k>n\}} \left|\xi_{n+1}\right| d\mathbf{P}.\end{aligned}$$

Bizonyítás 2 -> 1

Tehát, ha $k \to \infty$, akkor a Monoton Konvergencia Tétel értelmében

$$\int_F |\xi_n| \, d\mathbf{P} \leq \int_F |\xi_{n+1}| \, d\mathbf{P} < \infty,$$

Ami miatt

$$\begin{aligned}
\int_{F \cap \{\tau_k > n\}} \xi_n d\mathbf{P} &= \int_{F \cap \{\tau_k > n\}} \xi_n^{\tau_k} d\mathbf{P} = \\
\int_{F \cap \{\tau_k > n\}} \xi_{n+1}^{\tau_k} d\mathbf{P} &= \int_{F \cap \{\tau_k > n\}} \xi_{n+1} d\mathbf{P}.
\end{aligned}$$

Bizonyítás 2 -> 1

Ekkor a Dominált Konvergencia Tételt kihasználva az egyenlet mindkét oldalára

$$\int_F \xi_n d\mathbf{P} = \int_F \xi_{n+1} d\mathbf{P}, \quad F \in \mathcal{G}_n$$

Így $\mathcal{G}_n$ minden halmazára ξ_n és ξ_{n+1} integrálható valószínűségi változók, így a feltételes várható érték definíciója miatt $\forall F \in \mathcal{G}_n$-re

$$\begin{aligned}
\int_F \xi_{n+1} d\mathbf{P} &= \int_F \xi_{n+1}^+ - \xi_{n+1}^- d\mathbf{P} = \int_F \xi_{n+1}^+ d\mathbf{P} - \int_F \xi_{n+1}^- d\mathbf{P} = \\
&= \int_F \mathbf{E}\left(\xi_{n+1}^+ \mid \mathcal{F}_n\right) d\mathbf{P} - \int_F \mathbf{E}\left(\xi_{n+1}^- \mid \mathcal{F}_n\right) d\mathbf{P} = \\
&= \int_F \mathbf{E}\left(\xi_{n+1}^+ \mid \mathcal{F}_n\right) d\mathbf{P} - \mathbf{E}\left(\xi_{n+1}^- \mid \mathcal{F}_n\right) d\mathbf{P} \mathrel{\mathring{=}} \\
&\mathrel{\mathring{=}} \int_F \mathbf{E}\left(\xi_{n+1} \mid \mathcal{F}_n\right) d\mathbf{P},
\end{aligned}$$

ahol az utolsó két sorban ki lett használva az általánosított feltételes várható érték definíciója, és hogy F-en integrálható $\xi_{n+1}^{\pm}$.

Bizonyítás 2 -> 1

Emiatt

$$\int_H \xi_n d\mathbf{P} = \int_H \mathbf{E}\left(\xi_{n+1} \mid \mathcal{F}_n\right) d\mathbf{P}, \quad \forall H \in \mathcal{F}_n, H \subseteq F \in \mathcal{G}_n.$$

Így

$$\xi_n \overset{m.m.}{=} \mathbf{E}\left(\xi_{n+1} \mid \mathcal{F}_n\right),$$

tehát (ξ_n) általánosított martingál

$\square$

Bizonyítás 1 $\Longrightarrow$ 3:
Tegyük fel, hogy (ξ_n) általánosított martingál, és az egyszerűség kedvéért feltesszük azt is, hogy (ξ_n) valószínűségi változói végesek. Legyen

$$A(n,k) \doteq \{k \leq \mathbf{E}(|\xi_n - \xi_{n-1}| \mid \mathcal{F}_n) < k+1\}.$$

Így mivel (ξ_n) martingál $\cup_k A(n,k) \subseteq \Omega$ $\forall n$-re, és $A(n,k) \cap A(n,l) = \emptyset$. Ekkor legyen

$$u_n \doteq \sum_{k\geq 0} (k+1)^{-3} (\xi_n - \xi_{n-1}) \chi_{A(n-1,k)}.$$

u_n véges és $\mathcal{F}_n$-mérhető, és $|u_n| \leq \sum (k+1)^{-3} |\xi_n - \xi_{n-1}| \chi_{A(n-1,k)}$.
Az $\mathcal{F}_{n-1}$-re vonatkozó feltételes várható értéket véve mindkét oldalra, majd a Monoton Konvergencia Tételt, a feltételes várható érték additivitását és a toronyszabályt felhasználva nem negatív valószínűségi .változókra

$$\mathbf{E}(|u_n| \mid \mathcal{F}_{n-1}) \leq \sum_{k\geq 0} \frac{\chi_{A(n-1,k)}}{(k+1)^3} \mathbf{E}(|\xi_n - \xi_{n-1}| \mid \mathcal{F}_{n-1}) \leq \sum_{k\geq 0} \frac{1}{(k+1)^2} < \infty.$$

Bizonyítás 1 -> 3

Azaz

$$\mathbf{E}\left(|u_n|\right) = \mathbf{E}\left(\mathbf{E}\left(|u_n| \mid \mathcal{F}_{n-1}\right)\right) \leq \sum_{k\geq 0} \frac{1}{(k+1)^2} < \infty.$$

Tehát (u_n) integrálható. Minden k-ra $|\xi_n - \xi_{n-1}|\chi_{A(n-1,k)}$ is integrálható, és mivel integrálható változókra a feltételes várható érték és az általánosított feltételes várható érték megegyezik

$$\mathbf{E}\left(\left(\xi_n - \xi_{n-1}\right)\chi_{A(n-1,k)} \mid \mathcal{F}_{n-1}\right) =$$

$$= \mathbf{E}\left(\left(\xi_n - \xi_{n-1}\right)^+ \chi_{A(n-1,k)} \mid \mathcal{F}_{n-1}\right) - \mathbf{E}\left(\left(\xi_n - \xi_{n-1}\right)^- \chi_{A(n-1,k)} \mid \mathcal{F}_{n-1}\right)$$

$$= \chi_{A(n-1,k)}\mathbf{E}\left(\left(\xi_n - \xi_{n-1}\right)^+ \mid \mathcal{F}_{n-1}\right) - \chi_{A(n-1,k)}\mathbf{E}\left(\left(\xi_n - \xi_{n-1}\right)^- \mid \mathcal{F}_{n-1}\right) =$$

$$= \chi_{A(n-1,k)}\mathbf{E}\left(\xi_n - \xi_{n-1} \mid \mathcal{F}_{n-1}\right) =$$

$$= \chi_{A(n-1,k)}\left(\mathbf{E}\left(\xi_n \mid \mathcal{F}_{n-1}\right) - \mathbf{E}\left(\xi_{n-1} \mid \mathcal{F}_{n-1}\right)\right)$$

$$= \chi_{A(n-1,k)}\left(\mathbf{E}\left(\xi_n \mid \mathcal{F}_{n-1}\right) - \xi_{n-1}\right) = 0.$$

Kihasználva a Domináns Konvergencia Tételt a feltételes várható értékre, és azt, hogy $\mathbf{E}\left(|u_n|\right) \leq \sum (k+1)^{-2}$, azt kapjuk, hogy

$$\mathbf{E}\left(u_n \mid \mathcal{F}_{n-1}\right) = \mathbf{E}\left(\sum_{k\geq 0} \frac{1}{(k+1)^3}\left(\xi_n - \xi_{n-1}\right)\chi_{A(n-1,k)} \mid \mathcal{F}_{n-1}\right) = 0.$$

Azaz (u_n) martingálok különbségeinek sorozata, így $M_n \doteq \sum_{k=1}^{n} u_k$ martingál. Legyen

$$\theta_n \doteq \sum_{k\geq 0} (k+1)^3 \chi_{A(n-1,k)}.$$

Mivel az $A(n-1,k)$-k diszjunktak és $\mathcal{F}_{n-1}$ mérhetőek (θ_n) megfelelően definiált, és előrejelezhető. Ekkor

$$(M_n - M_{n-1})\,\theta_n = u_n\theta_n =$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(k+1)^3} (\xi_n - \xi_{n-1})\,\chi_{A(n-1,k)} \sum_{k=0}^{\infty} (k+1)^3 \chi_{A(n-1,k)} =$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{l=0}^{\infty} \frac{1}{(k+1)^3} (\xi_n - \xi_{n-1})\,\chi_{A(n-1,k)} (l+1)^3 \chi_{A(n-1,l)} =$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(k+1)^3}{(k+1)^3} \chi_{A(n-1,k)} (\xi_n - \xi_{n-1}) = \xi_n - \xi_{n-1}.$$

Azaz $\xi = \theta \bullet M$.

$\square$

Bizonyítás 3 $\Longrightarrow$ 2:
Tegyük fel, hogy (ξ_n) martingál transzformált, és $\xi = \theta \bullet M$. Legyen

$$\tau_k \circeq \inf \{n \geq 0 : |\theta_{n+1}| > k\} .$$

Így

$$\begin{aligned}
\{\tau_k = 0\} &= \{|\theta_1| > k\} \\
\{\tau_k = 1\} &= \{|\theta_1| \leq k\} \cap \{|\theta_2| > k\} \\
\{\tau_k = 2\} &= \{|\theta_1| \leq k\} \cap \{|\theta_2| \leq k\} \cap \{|\theta_3| > k\} \\
&\vdots
\end{aligned}$$

Azaz τ_k megállítási idő $\forall k$-ra.

Bizonyítás 3 -> 2

Mivel (θ_n) előrejelezhető és τ_k megállítási idő, a megállított folyamatok $(\theta_n^{\tau_k})_n$ is elérejelezhető, azaz $\forall n$-re és $\forall \alpha$-ra

$$\{\theta_n^{\tau_k} < \alpha\} =$$

$$= (\{\theta_n < \alpha\} \cap \{\tau_k \geq n\}) \cup (\{\theta_1 < \alpha\} \cap \{\tau_k = 1\}) \cup \ldots \cup (\{\theta_{n-1} < \alpha\} \cap$$

és mivel

$$\{\tau_k \geq n\} = \{\tau_k < n\}^c = \{\tau_k \leq n-1\}^c \in \mathcal{F}_{n-1}$$

ezért $\{\theta_n^{\tau_k} < \alpha\} \in \mathcal{F}_{n-1}$, azaz $(\theta_n^{\tau_k})_n$ előrejelezhető.

Bizonyítás 3 -> 2

Kihasználva, hogy a megállított martingálok is martingálok, és hogy $\theta_n^{\tau_k}$ $\mathcal{F}_{n-1}$-mérhető és korlátos, ezért

$$\begin{aligned}
\mathbf{E}\left(\xi_{n+1}^{\tau_k} - \xi_n^{\tau_k} \mid \mathcal{F}_{n-1}\right) &= \mathbf{E}\left(\left(\xi_{n+1} - \xi_n\right)^{\tau_k} \mid \mathcal{F}_{n-1}\right) = \\
&= \mathbf{E}\left(\left(\theta_n \left(M_{n+1} - M_n\right)\right)^{\tau_k} \mid \mathcal{F}_{n-1}\right) \\
&= \mathbf{E}\left(\theta_n^{\tau_k} \left(M_{n+1} - M_n\right)^{\tau_k} \mid \mathcal{F}_{n-1}\right) = \\
&= \theta_n^{\tau_k} \mathbf{E}\left(M_{n+1}^{\tau_k} - M_n^{\tau_k} \mid \mathcal{F}_{n-1}\right) = 0.
\end{aligned}$$

Ami miatt $\xi_n^{\tau_k}$ martingál, és így ξ_n lokális martingál.

□

Az előző állítást felhasználva be lehet látni, hogy a diszkrét idejű integrálható lokális martingálok valódi martingálok is.
Állítás: *Ha* $(\xi_n)_{n=0}^{T}$ *martingál transzformált és* ξ_T *integrálható, akkor a* $(\xi_n)_{n=0}^{T}$ *sorozat valódi martingál.*
Bizonyítás:
Tekintsünk egy diszkrét véges időhorizonton értelmezett martingál transzformáltat, $(\xi_n)_{n=0}^{T}$-t. Az előző állításban beláttuk, hogy egy martingál transzformált egyben általánosított martingál is., így

$$\xi_{T-1} = \mathbf{E}\left(\xi_T \mid \mathcal{F}_{T-1}\right),$$

ahol $\mathbf{E}(\cdot)$ az általánosított feltételes várható érték. Mivel ξ_T integrálható a toronyszabályt felhasználva

$$\mathbf{E}\left(|\xi_{T-1}|\right) = \mathbf{E}\left(\left|\mathbf{E}\left(\xi_T \mid \mathcal{F}_{T-1}\right)\right|\right) \leq \mathbf{E}\left(\mathbf{E}\left(|\xi_T| \mid \mathcal{F}_{T-1}\right)\right) = \mathbf{E}\left(|\xi_T|\right) < \infty,$$

azaz ξ_{T-1} is integrálható. Innen pedig az állítás könnyen belátható.