

Wiener-folyamatok

Az egyik legfontosabb sztochasztikus folyamat

Medvegyev Péter
Matematika tanszék

2008

A Wiener-folyamat definíciója

Definition

A $\{w(t, \omega)\}_{t \geq 0}$ folyamatot Wiener-folyamatnak mondjuk, ha teljesíti az alábbi négy feltételt:

1. $w(0) \equiv 0$,
2. a w növekményei függetlenek,
3. tetszőleges $0 \leq s < t$ értékekre a $w(t) - w(s) \cong N(0, \sqrt{t-s})$, vagyis a $w(t) - w(s)$ változó sűrűségfüggvénye

$$g_{t-s}(x) \stackrel{\circ}{=} \frac{1}{\sqrt{2\pi(t-s)}} \exp\left(\frac{-x^2}{2(t-s)}\right).$$

4. A w folytonos abban az értelemben, hogy minden ω kimenetelre a $w(\omega)$ trajektória folytonos.

A Wiener-folyamatok olyan folytonos Lévy-folyamatok, amelyek növekményeinek eloszlása egy $[s, t]$ szakaszon $N(0, \sqrt{t-s})$.

A Wiener-folyamat definíciója

Definition

A $t \in [0, \infty)$ időparamétertől függő w \mathcal{F} -adaptált folyamatot Wiener-folyamatnak mondjuk, ha teljesíti az alábbi négy feltételt:

1. $w(0) = 0$,
2. minden t -re és tetszőleges $h > 0$ számra a $w(t+h) - w(t)$ növekmény független az \mathcal{F}_t -től,
3. tetszőleges $0 \leq s < t$ értékekre a $w(t) - w(s)$ normális eloszlású, 0 várható értékkel és $\sqrt{t-s}$ szórással,
4. a $w(\omega)$ trajektóriák minden ω -kimenetelre folytonosak,
5. az \mathcal{F} teljesíti a szokásos feltételeket.

Ha másképpen nem említjük, a továbbiakban feltételezzük, hogy az \mathcal{F} filtráció valamilyen módon adott.

A filtráció bővítése

Example

Ha w Wiener-folyamat az \mathcal{F} filtrációra, akkor nem feltétlenül Wiener-folyamat egy bővebb \mathcal{G} filtrációra.

Ha w Wiener-folyamat az \mathcal{F} filtrációra, akkor a $\mathcal{G}_t \doteq \sigma(\mathcal{F}_t \cup \mathcal{F}_1)$ filtrációra nem lesz Wiener-folyamat, ugyanis ha $1 = s > t$, akkor mivel a $w(s)$ \mathcal{G}_t -mérhető, nem érvényes az

$$\mathbf{E}(w(s) \mid \mathcal{G}_t) = w(t)$$

martingáltulajdonság. Hasonló igaz, ha $\mathcal{G}_t = \mathcal{A}$ filtrációval.

Néhány tétel

Theorem (Paley–Wiener–Zygmund)

Ha w Wiener-folyamat, akkor majdnem minden ω kimenetelre a $w(\omega)$ trajektória egyetlen időpontban sem deriválható.

Theorem

Ha w Wiener-folyamat, akkor majdnem minden kimenetelre

$$\limsup_{t \rightarrow \infty} w(t) = \infty, \quad \liminf_{t \rightarrow \infty} w(t) = -\infty.$$

Corollary

Ha w Wiener-folyamat, akkor tetszőleges a számra a $\{t : w(t) = a\}$ halmaz felülről nem korlátos. Speciálisan egy egy-dimenziós Wiener-folyamat végtelen sokszor visszatér a nulla pontba.

Bizonyítás

Tetszőleges $m > 0$ számra, ha Φ jelöli az $N(0, 1)$ eloszlásfüggvényét, akkor

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbf{P}(w(n) \geq m) = 1 - \lim_{n \rightarrow \infty} \Phi\left(\frac{m}{\sqrt{n}}\right) = \frac{1}{2}.$$

Ha A_m jelöli azokat a kimeneteket, amelyekre végtelen sok n esetén $w(n) \geq m$, akkor elég nagy k -ra és n -re

$$\begin{aligned} \mathbf{P}(A_m) &= \mathbf{P}\left(\bigcap_{k=1}^{\infty} \bigcup_{n=k}^{\infty} \{w(n) \geq m\}\right) = \lim_{k \rightarrow \infty} \mathbf{P}\left(\bigcup_{n=k}^{\infty} \{w(n) \geq m\}\right) \geq \\ &\geq \mathbf{P}\left(\bigcup_{n=k}^{\infty} \{w(n) \geq m\}\right) - \frac{1}{8} \geq \mathbf{P}(w(n) \geq m) - \frac{1}{8} \geq \frac{1}{4}. \end{aligned}$$

Bizonyítás

Mivel $A_{m+1} \subseteq A_m$, ezért

$$\mathbf{P} \left(\limsup_{n \rightarrow \infty} w(n) = \infty \right) = \mathbf{P} \left(\bigcap_m A_m \right) \geq \frac{1}{4}.$$

A nulla vagy egy törvény miatt

$$\mathbf{P} \left(\limsup_{n \rightarrow \infty} w(n) = \infty \right) = 1$$

amiből

$$\limsup_{t \rightarrow \infty} w(t) \stackrel{\circ}{=} \lim_{t \nearrow \infty} \sup_{s \geq t} w(s) \geq \lim_{n \nearrow \infty} \sup_{k \geq n} w(k) = \infty.$$

A másik egyenlőség a szimmetria miatt teljesül.

Néhány tétel

Theorem (Nagy számok törvénye)

Ha w Wiener-folyamat, akkor

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{w(t)}{t} = 0.$$

Corollary

Ha w Wiener-folyamat, akkor a $\hat{w}(t) \doteq t \cdot w(1/t)$ kiterjeszhető a $t = 0$ pontra úgy, hogy a \hat{w} szintén Wiener-folyamat.

Fisk tétele, lokális martingálok trajektóriái

A Wiener-folyamatok trajektóriáinak „vad” tulajdonságai nem túl meglepőek.

Theorem

Ha L folytonos lokális martingál és az L trajektóriái korlátos változásúak, akkor az L konstans.

Fisk tételének bizonyítása

Tekintsük az $M \stackrel{\circ}{=} L - L(0)$ lokális martingált. Elég belátni, hogy az $M = 0$. Legyen $V \stackrel{\circ}{=} \text{Var}(M)$ és legyen (ρ_n) az M lokalizációs sorozata. Mivel a folytonos függvények teljes megváltozása is folytonos a

$$v_n(\omega) \stackrel{\circ}{=} \inf \{t : |M(t, \omega)| \geq n\}$$

és a

$$\kappa_n(\omega) \stackrel{\circ}{=} \inf \{t : V(t, \omega) \geq n\}$$

megállási idők. Így a $\tau_n \stackrel{\circ}{=} v_n \wedge \kappa_n \wedge \rho_n$ szintén megállási idő. Nyilván $\tau_n \nearrow \infty$, így ha minden n indexre $M^{\tau_n} = 0$ akkor az M nulla a $[0, \tau_n]$ szakaszon minden n -re, így az M nulla a $\cup_n [0, \tau_n] = \mathbb{R}_+ \times \Omega$ halmazon, így $M = 0$.

Fisk tételének bizonyítása

A folytonosság miatt az $|M^{\tau_n}| \leq n$ és $|V^{\tau_n}| \leq n$, így a trajektóriák korlátosak. Feltehető tehát, hogy az M és a $V \stackrel{\circ}{=} \text{Var}(M)$ korlátosak. Legyen $(t_k^{(n)})$ a $[0, t]$ egy infinitezimális particiója. Az energiaazonosság miatt ha $u > v$, akkor

$$\mathbf{E} \left((M(u) - M(v))^2 \right) = \mathbf{E} \left(M^2(u) - M^2(v) \right),$$

és mivel $M(0) = 0$ ezért

$$\begin{aligned} \mathbf{E} \left(M^2(t) \right) &= \mathbf{E} \left(M^2(t) \right) - \mathbf{E} \left(M^2(0) \right) = \\ &= \mathbf{E} \left(\sum_k \left(M^2 \left(t_k^{(n)} \right) - M^2 \left(t_{k-1}^{(n)} \right) \right) \right) = \\ &= \mathbf{E} \left(\sum_k \left(M \left(t_k^{(n)} \right) - M \left(t_{k-1}^{(n)} \right) \right)^2 \right). \end{aligned}$$

Fisk tételének bizonyítása

A V korlátos, így ha $V \stackrel{\circ}{=} \text{Var}(M) \leq c$, akkor

$$\begin{aligned} & \mathbf{E} \left(M^2(t) \right) \leq \\ & \leq \mathbf{E} \left(\sum_k \left| M(t_k^{(n)}) - M(t_{k-1}^{(n)}) \right| \cdot \max_k \left| M(t_k^{(n)}) - M(t_{k-1}^{(n)}) \right| \right) \leq \\ & \leq \mathbf{E} \left(V(t) \cdot \max_k \left| M(t_k^{(n)}) - M(t_{k-1}^{(n)}) \right| \right) \\ & \leq c \cdot \mathbf{E} \left(\max_k \left| M(t_k^{(n)}) - M(t_{k-1}^{(n)}) \right| \right). \end{aligned}$$

M trajektóriái folytonosak, így egyenletesen is folytonosak a $[0, t]$ szakaszon, így

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \max_k \left| M(t_k^{(n)}) - M(t_{k-1}^{(n)}) \right| = 0.$$

Fisk tételének bizonyítása

Másrészt

$$\max_k \left| M \left(t_k^{(n)} \right) - M \left(t_{k-1}^{(n)} \right) \right| \leq V(t) \leq c,$$

így a dominált konvergencia tétele miatt

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbf{E} \left(\max_k \left| M \left(t_k^{(n)} \right) - M \left(t_{k-1}^{(n)} \right) \right| \right) = 0.$$

Így $M(t) \stackrel{m.m.}{=} 0$ minden t -re. Az M trajektóriái folytonosak, így majdnem minden ω esetén $M(t, \omega) = 0$ minden t -re.

Visszatérés az origóba

Legyen

$$\vartheta \doteq \inf \{ \|\mathbf{w}(t)\| : t \geq 0 \}.$$

Theorem (Wiener-folyamat origóba való visszatérése)

A többdimenziós Wiener-folyamatra teljesülnek a következők: Ha $n \geq 3$, akkor az $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$ pontból elindított Wiener-folyamatra

$$\mathbf{P}(\vartheta \leq r) = \left(\frac{r}{\|\mathbf{x}\|} \right)^{n-2}, \quad \text{ha } 0 \leq r \leq \|\mathbf{x}\|,$$

vagyis ha $n \geq 3$, akkor egy $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$ pontból elindított Wiener-folyamat pozitív valószínűséggel nem jut el az origó $r < \|\mathbf{x}\|$ sugarú környezetébe.

Az Itô-formula alkalmazása

Tegyük fel, hogy az $U \subseteq \mathbb{R}^n$ nyílt halmazon értelmezett

$f \in C^2(U)$ függvény kielégíti a $\Delta f \stackrel{\circ}{=} \sum_{k=1}^n \frac{\partial^2 f}{\partial x_k^2} = 0$

Laplace-egyenletet. Legyen τ megállási idő. Ha az \mathbf{x} pontból elindított \mathbf{w} n -dimenziós Wiener-folyamatra a \mathbf{w}^τ megállított folyamat az U halmazon belül marad, akkor

$$\begin{aligned} f(\mathbf{w}^\tau) - f(\mathbf{x}) &= \sum_{k=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_k}(\mathbf{w}^\tau) \bullet w_k^\tau + \\ &+ \frac{1}{2} \sum_i \sum_j \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(\mathbf{w}^\tau) \bullet [w_i^\tau, w_j^\tau], \end{aligned}$$

A vegyes tagok esetén a kvadratikus keresztvariáció nulla, az f kielégíti a Laplace-egyenletet, így

$$f(\mathbf{w}^\tau) - f(\mathbf{x}) = \sum_{k=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_k}(\mathbf{w}^\tau) \bullet w_k^\tau.$$

Dinkin-formula

Tegyük fel, hogy $\tau < \infty$ és az $f(\mathbf{w})$ a $[0, \tau]$ véletlen szakaszon egyenletesen korlátos. Ilyenkor az $f(\mathbf{w}^\tau) = (f(\mathbf{w}))^\tau$ korlátos lokális martingál, vagyis valódi martingál. A megállási opciókról szóló tétel alapján tetszőleges $T < \infty$ időpontra, felhasználva, hogy a \mathbf{w} az \mathbf{x} pontból lett elindítva

$$\mathbf{E}(f(\mathbf{w}(T \wedge \tau))) = \mathbf{E}(f(\mathbf{w}(0))) = \mathbf{E}(f(\mathbf{x})) = f(\mathbf{x}).$$

Az $f(\mathbf{w}^\tau)$ korlátossága és a $\tau < \infty$ miatt ha $T \rightarrow \infty$, akkor

$$\mathbf{E}(f(\mathbf{w}(\tau))) = f(\mathbf{x}).$$

Gyűrűből való kilépés

Tegyük fel, hogy az $\|\mathbf{x}\|$ a $0 < r < R < \infty$ sugarak közé esik. Wiener-folyamatok trajektóriái a $t \geq 0$ félegyenesen majdnem minden kimenetelre nem korlátosak és minden kimenetelre folytonosak, ezért a külső körből a \mathbf{w} egy valószínűséggel kilép. A kérdés csak az, hogy a belső vagy a külső határon fogja-e a folyamat a

$$B \doteq \{\mathbf{u} : r \leq \|\mathbf{u}\| \leq R\}$$

gyűrűt elhagyni. Jelölje τ_B a B gyűrűből való kilépés időpontját.

A harmonikus függvény megadása

Tegyük fel, hogy $n \geq 3$. Legyen $f(\mathbf{x}) \doteq \|\mathbf{x}\|^{2-n}$. Az f nyilván az $U \doteq \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ halmazon van értelmezve. Elemi számolással könnyen megmutatható, hogy az U halmazon az f kielégíti a Laplace-egyenletet. Az $f(\mathbf{w}^{\tau_B})$ az $r > 0$ miatt korlátos, így a Dinkin-formula alapján

$$\mathbf{E}(f(\mathbf{w}(\tau_B))) = f(\mathbf{x}).$$

Ezt és az f konkrét alakját felhasználva

$$r^{2-n} \mathbf{P}(\|\mathbf{w}(\tau_B)\| = r) + R^{2-n} (1 - \mathbf{P}(\|\mathbf{w}(\tau_B)\| = r)) = \|\mathbf{x}\|^{2-n},$$

és

$$\mathbf{P}(\|\mathbf{w}(\tau_B)\| = r) = \frac{\|\mathbf{x}\|^{2-n} - R^{2-n}}{r^{2-n} - R^{2-n}}.$$

A sugár a végtelenbe tart

Ha A_R jelöli azt az eseményt, hogy R sugár esetén a belső oldalon lép ki a folyamat, akkor nyilván ha $R_1 \leq R_2$, akkor $A_{R_1} \subseteq A_{R_2}$, ugyanis ha a kisebb sugár esetén már belül kilép, akkor a nagyobb sugár esetén is ott fog kilépni. Az A_R monoton nő, így ha $R \rightarrow \infty$, akkor mivel $n > 2$

$$\begin{aligned} \left(\frac{r}{\|\mathbf{x}\|} \right)^{n-2} &= \frac{\|\mathbf{x}\|^{2-n}}{r^{2-n}} = \lim_{R \rightarrow \infty} \frac{\|\mathbf{x}\|^{2-n} - R^{2-n}}{r^{2-n} - R^{2-n}} = \\ &= \lim_{R \rightarrow \infty} \mathbf{P}(A_R) = \mathbf{P}(\cup_R A_R). \end{aligned}$$

Ha egy ω kimenetelre a trajektória véges idő után belemetsz az r sugarú gömbbe, akkor a bemetszés időpontjáig felvett maximumánál nagyobb számot választva R -nek $\omega \in A_R \subseteq \cup_R A_R$. Megfordítva ha $\omega \in \cup_R A_R$, akkor alkalmas R -re $\omega \in A_R$, így az ω -ra vett trajektória belemetsz a r sugarú gömbbe. Így $\mathbf{P}(\cup_R A_R)$ éppen annak a valószínűsége, hogy az $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$ pontból elindított Wiener-folyamat belemetsz az $r \leq \|\mathbf{x}\|$ sugarú körbe.

A Wiener-folyamat normája tart a végtelenbe

Theorem

Ha $n \geq 3$ és \mathbf{w} n -dimenziós Wiener-folyamat, akkor

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \|\mathbf{w}(t)\| = \infty.$$

Legyen $r > 0$ tetszőleges és legyen $a \geq r$. Legyen továbbá

$$\tau_a \stackrel{\circ}{=} \inf \{t : \|\mathbf{w}(t)\| \geq a\}.$$

Mivel a Wiener-folyamatok trajektóriái majdnem minden kimenetelre nem korlátosak, ezért majdnem mindenhol

$$\limsup_{t \rightarrow \infty} \|\mathbf{w}(t)\| = \infty,$$

így nyilván majdnem mindenhol $\tau_a < \infty$.

A Wiener-folyamat normája tart a végtelenbe

Az erős Markov-tulajdonság miatt a

$$\mathbf{w}^*(t) \doteq (\mathbf{w}(t + \tau_a) - \mathbf{w}(\tau_a)) + \mathbf{w}(\tau_a), \quad t \geq 0$$

szintén Wiener-folyamat, amelyik a

$$\mathbf{w}(\tau_a) \in \{\|\mathbf{u}\| = a\}$$

pontból indul. Mivel $n \geq 3$

$$\mathbf{P}(\exists t \geq \tau_a, \|\mathbf{w}(t)\| \leq r) = \mathbf{P}(\exists t \geq 0, \|\mathbf{w}^*(t)\| \leq r) = \left(\frac{r}{a}\right)^{n-2}.$$

Ha $a \nearrow \infty$ akkor ez a valószínűség nullához tart.

A Wiener-folyamat normája tart a végtelenbe

Tegyük fel, hogy $a_k \nearrow \infty$. Legyen A_k az az esemény, hogy az a_k sugarú gömbből való kilépés után visszatér a folyamat az r sugarú gömbbe. $A_{k+1} \subseteq A_k$. Nyilván $\bigcap_k A_k$ az olyan kimenetelekből áll, hogy végtelen sok a_k -sugarú gömbből való kilépés után is visszatér. Annak a valószínűsége, hogy a \mathbf{w} a végtelen sok τ_{a_k} után visszatér a $\{\|\mathbf{u}\| \leq r\}$ gömbe

$$\mathbf{P}(\bigcap_k A_k) = \lim_{k \rightarrow \infty} \left(\frac{r}{a_k}\right)^{n-2} = 0.$$

Így egy valószínűséggel minden ω -hoz van olyan $k \stackrel{\circ}{=} k(\omega)$, hogy

$$\mathbf{w}(t, \omega) \notin \{\|\mathbf{u}\| \leq r\} \quad t \geq \tau_k(\omega).$$

Így egy valószínűséggel ha $t \nearrow \infty$, akkor $\|\mathbf{w}(t, \omega)\| \rightarrow \infty$.

Folytonos Wiener-folyamatok karakterizációja

Theorem

Minden folytonos Lévy-folyamat egy Wiener-folyamat és egy lineáris trend lineáris kombinációja.

Lévy-folyamatok momentumai

Theorem

Ha valamely X Lévy-folyamat ugrásai kisebbek egy fix $c > 0$ konstansnál, vagyis $|\Delta X| \leq c$, akkor tetszőleges $[0, t]$ véges szakaszon az X momentumainak halmaza egyenletesen korlátos. Vagyis minden m kitevőhöz és $[0, t]$ szakaszhoz létezik olyan $k(m, t)$ korlát, hogy

$$\mathbf{E} (|X^m(s)|) \leq k(m, t), \quad s \in [0, t].$$

Lévy-folyamatok momentumai

Mivel a trajektóriák regulárisak, ezért a trajektóriák mindegyike minden véges és zárt szakaszon korlátos. Ebből következően az az esemény, hogy valamely trajektória korlátos eleme a farok σ -algebrának. A nulla vagy egy törvény miatt a farok σ -algebra eseményei nulla vagy egy valószínűségűek. Így az olyan trajektóriák halmaza, amely korlátos nulla vagy egy valószínűséggel bír. Ha a trajektóriák egy valószínűséggel korlátosak, akkor a folyamathoz hozzáadva a $Z(t) = t$ lineáris trendet, nyilván korlátlan trajektóriájú Lévy-folyamatot kapunk. Nyilván az X és az $X + Z$ momentumai minden véges szakaszon egyszerre korlátosak, vagy korlátlanok. Feltehetjük tehát, hogy az X trajektóriái nem korlátosak.

Lévy-folyamatok momentumai

Tekintsük a

$$\tau_1 \stackrel{\circ}{=} \inf \{t : |X(t)| > c\}$$

megállási időt. Mivel a trajektóriák a teljes számegegyenesen egy valószínűséggel korlátlanok $\tau_1 < \infty$ majdnem mindenhol. Így tekinthetjük az X^* újraindított folyamatot. Legyen

$$\tau_2 \stackrel{\circ}{=} \inf \{t : |X^*(t)| > c\} + \tau_1 \stackrel{\circ}{=} \inf \{t : |X(t + \tau_1) - X(\tau_1)| > c\} +$$

Hasonló módon definiálhatjuk az τ_3 stb. megállási időket. Az erős Markov-tulajdonság miatt az $\{X^*(t) : t \geq 0\}$ változók függetlenek az \mathcal{F}_{τ_1} σ -algebrától. A

$$\tau_2 - \tau_1 \stackrel{\circ}{=} \inf \{t \geq 0 : |X^*(t)| > c\}$$

mérhető az $\{X^*(t) : t \geq 0\}$ változók által generált σ -algebrára, így a $\tau_2 - \tau_1$ független az \mathcal{F}_{τ_1} -től. Hasonlóan a $\tau_n - \tau_{n-1}$ független az $\mathcal{F}_{\tau_{n-1}}$ -től.

Lévy-folyamatok momentumai

Ugyancsak az erős Markov-tulajdonság miatt $\tau_n - \tau_{n-1}$ eloszlása minden n -re megegyezik a τ_1 eloszlásával. Így a $\tau_0 \stackrel{\circ}{=} 0$ értékből kiindulva és használva a $(\tau_k - \tau_{k-1})$ változók függetlenségét

$$\mathbf{E}(\exp(-\tau_n)) = \mathbf{E}\left(\exp\left(-\sum_{k=1}^n (\tau_k - \tau_{k-1})\right)\right) = (\mathbf{E}(\exp(-\tau_1)))^n \stackrel{\circ}{=} q^n$$

ahol $0 < q \leq 1$. Ha $q = 1$ akkor $\tau_1 = 0$, így a jobbról való folytonosság miatt $|X(0)| \geq c > 0$, ami ellentmond a Lévy-folyamatok definíciójának, így $q < 1$.

Lévy-folyamatok momentumai

Szigorúan a τ_1 előtt az X nem lehet nagyobb mint c , ugyanis ellenkező esetben a τ_1 csökkenthető lenne. Így $|X(\tau_1-)| \leq c$. Az ugrások kisebbek mint c , így

$$\begin{aligned} |X(\tau_1)| &= |X(\tau_1-) + \Delta X(\tau_1)| \leq |X(\tau_1-)| + |\Delta X(\tau_1)| \leq \\ &\leq |X(\tau_1-)| + c \leq 2c. \end{aligned}$$

Hasonlóan folytatva

$$\sup_t |X^{\tau_n}(t)| = \sup |\{X(t) : t \in [0, \tau_n]\}| \leq 2nc.$$

A Markov-egyenlőtlenség alapján

$$\begin{aligned} \mathbf{P}(|X(t)| > 2nc) &\leq \mathbf{P}(\tau_n < t) = \mathbf{P}(\exp(-\tau_n) > \exp(-t)) \leq \\ &\leq \frac{\mathbf{E}(\exp(-\tau_n))}{\exp(-t)} \leq \exp(t) q^n. \end{aligned}$$

Lévy-folyamatok momentumai

Mivel $q < 1$, ezért

$$h(m) \doteq \sum_{n=0}^{\infty} [2(n+1)c]^m q^n < \infty.$$

Az $|X(t)|^m$ függvényt egy lépcsős függvénnyel felülről közelítve

$$\begin{aligned} \mathbf{E}(|X(t)|^m) &\leq \sum_{n=0}^{\infty} [2(n+1)c]^m \cdot \mathbf{P}(|X(t)| > 2nc) \leq \\ &\leq \exp(t) \sum_{n=0}^{\infty} [2(n+1)c]^m q^n \doteq \exp(t) h(m), \end{aligned}$$

amiből az állítás evidens.

Folytonos Lévy-folyamatok karakterizációja

Legyen X egy folytonos Lévy-folyamat. Mivel az X folytonos, ezért az X összes momentuma véges. Ebből következően az $X(t)$ változónak minden t időpontban van várható értéke.

Következésképpen ha m jelöli az $X(1)$ várható értékét, akkor az $X(t) - t \cdot m$ martingál. Érdeemes hangsúlyozni, hogy annak igazolásához, hogy az $X(t)$ várható értéke éppen $t \cdot m$ vagy fel kell használni hogy a filtráció teljesíti a szokásos feltételeket, így az $X(t) - \mathbf{E}(X(t))$ logikai martingálnak van várható értéke, vagy fel kell használni, hogy véges időszakon a második momentumok halmaza korlátos, így az $(X(t))_t$ család minden véges időtartományon egyenletesen integrálható. Az $X(t) - t \cdot m$ martingál voltából következik, hogy az X folytonos szemimartingál.

Folytonos Lévy-folyamatok karakterizációja

A jelölés egyszerűsítése céljából tegyük fel, hogy $m = 0$. A kvadratikus variáció definíciója miatt az $[X]$ szintén folytonos Lévy-folyamat. A független és stacionárius növekedés feltétele következik abból, hogy a kvadratikus variáció a közelítő négyzetösszegek határértéke és a Lévy-tulajdonság miatt a diszjunkt szakaszokhoz tartozó közelítő négyzetösszegek függetlenek és az eloszlásuk csak az időszak hosszától függ. A kvadratikus variáció folytonossága pedig a parciális integrálás formulája miatt a sztochasztikus integrálok folytonos integrátor szerinti folytonosságának következménye. Ez másképpen azt jelenti, hogy az

$$Y(t) \stackrel{\circ}{=} [X](t) - \mathbf{E}([X](t)) = [X](t) - t \cdot \mathbf{E}([X](1))$$

kifejezés ismételten folytonos martingál. Az Y mint két monoton növekedő függvény különbsége véges variációjú.

Folytonos Lévy-folyamatok karakterizációja

A véges variációjú folytonos martingálok konstansak, így

$$[X](t) = \mathbf{E}([X](t)) = a \cdot t.$$

Az Itô-formula szerint

$$\begin{aligned} \exp(iuX(t)) - 1 &= iu \int_0^t \exp(iuX(s)) dX(s) - \\ &\quad - \frac{1}{2} u^2 \int_0^t \exp(iuX(s)) d[X](s). \end{aligned}$$

Az $\exp(iuX)$ korlátos és az X négyzetesen integrálható, következésképpen a sztochasztikus integrál valódi martingál. A két oldalon várható értéket véve és felhasználva, hogy most a sztochasztikus integrál várható értéke a martingál tulajdonság miatt nulla

Folytonos Lévy-folyamatok karakterizációja

$$\begin{aligned}\mathbf{E}(\exp(iuX(t))) - 1 &= -\frac{1}{2}u^2 \mathbf{E} \left(\int_0^t \exp(iuX(s)) d[X](s) \right) = \\ &= -\frac{1}{2}u^2 \mathbf{E} \left(\int_0^t \exp(iuX(s)) d(as) \right) = \\ &= -\frac{1}{2}u^2 a \int_0^t \mathbf{E}(\exp(iuX(s))) ds.\end{aligned}$$

Ha bevezetjük a $\varphi(u, t) \doteq \mathbf{E}(\exp(iuX(t)))$ jelölést, akkor ez

$$\varphi(u, t) - 1 = -\frac{1}{2}u^2 a \int_0^t \varphi(u, s) ds.$$

t szerint deriválva

$$\frac{d\varphi(u, t)}{dt} = -\frac{1}{2}u^2 a \varphi(u, t).$$

Folytonos Lévy-folyamatok karakterizációja

A differenciálegyenletet megoldva tetszőleges u -ra

$$\varphi(u, t) = \exp\left(-\frac{1}{2}u^2 at\right).$$

A normális eloszlás Fourier-transzformáltjának képletét felhasználva

$$X(t) \cong N(0, \sqrt{at}).$$

Lévy-féle karakterizációs tétel

Theorem (Lévy-féle karakterizációs tétel)

Ha X olyan folytonos lokális martingál, amelyre $X(0) = 0$ és $[X](t) = t$, akkor az X Wiener-folyamat.

A probléma a növekmények függetlensége

Ha X folytonos lokális martingál és ha $[X](t) = t$, akkor a már bemutatott módon belátható, hogy $X(t) \cong N(0, \sqrt{t})$. A gondolatmenetet az újraindított folyamatra alkalmazva ebből könnyen belátható, hogy növekmények eloszlása $N(0, \sqrt{t-s})$, vagyis a folyamat stacionárius növekményű. Ebből azonban még nem következik, hogy a folyamat Wiener-folyamat, ugyanis nem tudjuk, hogy a növekmények függetlenek vagy sem. A szórásokra vonatkozó képletből belátható, hogy a növekmények korrelálatlanok, ugyanis teljesül a

$$\mathbf{D}^2(X(t+s)) = \mathbf{D}^2(X(t)) + \mathbf{D}^2(X(s)).$$

Sajnos azonban normális eloszlású változók korrelálatlansága csak akkor implikálja a függetlenséget, ha az együttes eloszlás is normális.

Exponenciális martingál

Írjuk fel az X exponenciális martingálját:

$$\frac{\exp(iuX(t))}{\varphi(u, t)} = \frac{\exp(iuX(t))}{\exp(-\frac{1}{2}u^2 t)} = \exp\left(iuX(t) + \frac{1}{2}u^2 t\right).$$

Mivel $[X](t) = t$ az Itô-formulával azonnal látható, hogy a kifejezés lokális martingál. Mivel ugyanakkor minden véges szakaszon egyenletesen korlátos, ezért nem csak lokális martingál, hanem valódi martingál is.

Lokális martingál exponenciális martingálja

Érdemes felhívni a figyelmet arra, hogy tetszőleges folyamat esetén az

$$\frac{\exp(iuX(t))}{\varphi(u, t)}$$

exponenciális martingál nem lesz martingál sőt lokális martingál sem. Az Itô-formulából azonnal következik, hogy egy L lokális martingál esetén az

$$\exp\left(L - \frac{1}{2}[L]\right)$$

kifejezés lokális martingál és ezt szokás a lokális martingál exponenciális martingáljának mondani.

Lokális martingál exponenciális martingálja

Valóban az exponenciális függvény deriválási szabályát kihasználva

$$\begin{aligned} Z(t) - Z(0) &= \\ &= \int_0^t Z d\left(L - \frac{1}{2}[L]\right) + \frac{1}{2} \int_0^t Z d\left[L - \frac{1}{2}[L]\right] = \\ &= \int_0^t Z d\left(L - \frac{1}{2}[L]\right) + \frac{1}{2} \int_0^t Z d[L] = \\ &= \int_0^t Z dL, \end{aligned}$$

amely kifejezés egy lokális martingál szerint sztochasztikus integrál, vagyis lokális martingál.

Lokális martingál exponenciális martingálja

Nyilván tetszőleges z -re az

$$\exp\left(zL - \frac{1}{2}[zL]\right) = \exp\left(zL - \frac{1}{2}z^2[L]\right)$$

is lokális martingál. A jelen példában a $z = iu$ helyettesítéssel kapjuk az

$$\exp\left(iuX(t) + \frac{1}{2}u^2t\right)$$

kifejezést. Vagyis kihasználva, hogy az $X(t)$ eloszlása normális az exponenciális martingál két különböző definíciója egybeesik.

Lokális martingál exponenciális martingálja

Mivel az

$$\frac{\exp(iuX)}{\varphi(u, t)}$$

kifejezés martingál, ezért ha $s < t$, akkor

$$\mathbf{E} \left(\frac{\exp(iuX(t))}{\varphi(u, t)} \mid \mathcal{F}_s \right) = \frac{\exp(iuX(s))}{\varphi(u, s)}.$$

Ezt átrendezve

$$\mathbf{E} (\exp(iu(X(t) - X(s))) \mid \mathcal{F}_s) = \frac{\varphi(u, t)}{\varphi(u, s)} = \exp \left(-\frac{1}{2} u^2 (t - s) \right).$$

Független növekmények igazolása

A feltételes várható érték definícióját felírva minden $F \in \mathcal{F}_s$ halmazra

$$\int_F \exp(iu(X(t) - X(s))) d\mathbf{P} = \mathbf{P}(F) \mathbf{E}(\exp(iu(X(t) - X(s)))) .$$

A monoton osztály tétel segítségével az $\exp(iux)$ helyébe tetszőleges Borel-mérhető halmaz karakterisztikus függvénye írható, így

$$\mathbf{P}(\{X(t) - X(s) \in B\} \cap F) = \mathbf{P}(F) \cdot \mathbf{P}(\{X(t) - X(s) \in B\})$$

vagyis az \mathcal{F}_s σ -algebra és az $X(t) - X(s)$ növekmények függetlenek, vagyis az X független növekményű.

Tanaka-formula

Example

A $\text{sgn}(w) \bullet w$ integrál Wiener-folyamat.

A sztochasztikus integrál konstrukciója szerint a folyamat folytonos és lokális martingál. A kvadratikus variációja

$$\int_0^t (\text{sgn}(w))^2(s) ds = t.$$

Lévy-folyamatok összege nem Lévy-folyamat

Example

Lévy-folyamatok összege nem feltétlenül Lévy-folyamat.

Legyen w Wiener folyamat és legyen

$X(t) \doteq \int_0^t \operatorname{sgn}(w(s)) dw(s)$. Az X szintén Wiener-folyamat. A

$$Z \doteq w + X = 1 \bullet w + \operatorname{sgn}(w) \bullet w = (1 + \operatorname{sgn}(w)) \bullet w$$

mint folytonos martingálok összege szintén folytonos martingál az eredeti közös \mathcal{F} filtrációra nézve.

$$[Z](t) = \int_0^t (1 + \operatorname{sgn}(w(s)))^2 ds$$

amely kifejezés nem determinisztikus. Így a Z nem lehet Wiener-folyamat. De mivel minden folytonos Lévy-folyamat egy Wiener-folyamat és egy lineáris trend összege, ezért a Z nem lehet Lévy-folyamat.

Lévy-folyamatok összege nem Lévy-folyamat

Ugyanakkor szemimartingálok
összege szemimartingál!!!!