Wiener-folyamatok

Az egyik legfontosabb sztochasztikus folyamat

Medvegyev Péter
Matematika tanszék

2008

A Wiener-folyamat definíciója

Definition

A $\{w(t,\omega)\}_{t\geq 0}$ folyamatot Wiener-folyamatnak mondjuk, ha teljesíti az alábbi négy feltételt:

1. $w(0) \equiv 0$,
2. a w növekményei függetlenek,
3. tetszőleges $0 \leq s < t$ értékekre a $w(t) - w(s) \cong N\left(0, \sqrt{t-s}\right)$, vagyis a $w(t) - w(s)$ változó sűrűségfüggvénye
$$g_{t-s}(x) \doteq \frac{1}{\sqrt{2\pi(t-s)}} \exp\left(\frac{-x^2}{2(t-s)}\right).$$
4. A w folytonos abban az értelemben, hogy minden ω kimenetelre a $w(\omega)$ trajektória folytonos.

A Wiener-folyamatok olyan folytonos Lévy-folyamatok, amelyek növekményeinek eloszlása egy $[s,t]$ szakaszon $N\left(0, \sqrt{t-s}\right)$.

A Wiener-folyamat definíciója

Definition

A $t \in [0, \infty)$ időparamétertől függő w $\mathcal{F}$-adaptált folyamatot Wiener-folyamatnak mondjuk, ha teljesíti az alábbi négy feltételt:

1. $w(0) = 0$,
2. minden t-re és tetszőleges $h > 0$ számra a $w(t+h) - w(t)$ növekmény független az $\mathcal{F}_t$-től,
3. tetszőleges $0 \leq s < t$ értékekre a $w(t) - w(s)$ normális eloszlású, 0 várható értékkel és $\sqrt{t-s}$ szórással,
4. a $w(\omega)$ trajektóriák minden ω-kimenetelre folytonosak,
5. az $\mathcal{F}$ teljesíti a szokásos feltételeket.

Ha másképpen nem említjük, a továbbiakban feltételezzük, hogy az $\mathcal{F}$ filtráció valamilyen módon adott.

A filtráció bővítése

Example

Ha w Wiener–folyamat az $\mathcal{F}$ filtrációra, akkor nem feltétlenül Wiener–folyamat egy bővebb $\mathcal{G}$ filtrációra.

Ha w Wiener-folyamat az $\mathcal{F}$ filtrációra, akkor a $\mathcal{G}_t \circeq \sigma\left(\mathcal{F}_t \cup \mathcal{F}_1\right)$ filtrációra nem lesz Wiener-folyamat, ugyanis ha $1 = s > t$, akkor mivel a $w\left(s\right)$ $\mathcal{G}_t$-mérhető, nem érvényes az

$$\mathbf{E}\left(w\left(s\right) \mid \mathcal{G}_t\right) = w\left(t\right)$$

martingáltulajdonság. Hasonló igaz, ha $\mathcal{G}_t = \mathcal{A}$ filtrációval.

Néhány tétel

Theorem (Paley–Wiener–Zygmund)

Ha w Wiener-folyamat, akkor majdnem minden ω kimenetelre a $w(\omega)$ trajektória egyetlen időpontban sem deriválható.

Theorem

Ha w Wiener-folyamat, akkor majdnem minden kimenetelre

$$\limsup_{t\to\infty} w(t) = \infty, \quad \liminf_{t\to\infty} w(t) = -\infty.$$

Corollary

Ha w Wiener-folymat, akkor tetszőleges a számra a $\{t : w(t) = a\}$ halmaz felülről nem korlátos. Speciálisan egy egy-dimenziós Wiener-folyamat végtelen sokszor visszatér a nulla pontba.

Bizonyítás

Tetszőleges $m > 0$ számra, ha Φ jelöli az $N(0,1)$ eloszlásfüggvényét, akkor

$$\lim_{n\to\infty} \mathbf{P}\left(w(n) \geq m\right) = 1 - \lim_{n\to\infty} \Phi\left(\frac{m}{\sqrt{n}}\right) = \frac{1}{2}.$$

Ha A_m jelöli azokat a kimeneteleket, amelyekre végtelen sok n esetén $w(n) \geq m$, akkor elég nagy k-ra és n-re

$$\mathbf{P}(A_m) = \mathbf{P}\left(\cap_{k=1}^{\infty} \cup_{n=k}^{\infty} \{w(n) \geq m\}\right) = \lim_{k\to\infty} \mathbf{P}\left(\cup_{n=k}^{\infty} \{w(n) \geq m\}\right) \geq$$

$$\geq \mathbf{P}\left(\cup_{n=k}^{\infty} \{w(n) \geq m\}\right) - \frac{1}{8} \geq \mathbf{P}\left(w(n) \geq m\right) - \frac{1}{8} \geq \frac{1}{4}.$$

Bizonyítás

Mivel $A_{m+1} \subseteq A_m$, ezért

$$\mathbf{P}\left(\limsup_{n\to\infty} w(n) = \infty\right) = \mathbf{P}\left(\cap_m A_m\right) \geq \frac{1}{4}.$$

A nulla vagy egy törvény miatt

$$\mathbf{P}\left(\limsup_{n\to\infty} w(n) = \infty\right) = 1$$

amiből

$$\limsup_{t\to\infty} w(t) \doteq \lim_{t\nearrow\infty} \sup_{s\geq t} w(s) \geq \lim_{n\nearrow\infty} \sup_{k\geq n} w(k) = \infty.$$

A másik egyenlőség a szimmetria miatt teljesül.

Néhány tétel

Theorem (Nagy számok törvénye)

Ha w Wiener-folyamat, akkor

$$\lim_{t\to\infty} \frac{w(t)}{t} = 0.$$

Corollary

Ha w Wiener-folyamat, akkor a $\widehat{w}(t) \overset{\circ}{=} t \cdot w(1/t)$ *kiterjeszthető a* $t = 0$ *pontra úgy, hogy a* $\widehat{w}$ *szintén Wiener-folyamat.*

Fisk tétele, lokális martingálok trajektóriái

A Wiener-folyamatok trajektóriáinak „vad” tulajdonságai nem túl meglepőek.

Theorem

Ha L folytonos lokális martingál és az L trajektóriái korlátos változásúak, akkor az L konstans.

Tekintsük az $M \triangleq L - L(0)$ lokális martingált. Elég belátni, hogy az $M = 0$. Legyen $V \triangleq \mathrm{Var}(M)$ és legyen (ρ_n) az M lokalizációs sorozata. Mivel a folytonos függvények teljes megváltozása is folytonos a

$$\upsilon_n(\omega) \triangleq \inf\{t : |M(t,\omega)| \geq n\}$$

és a

$$\kappa_n(\omega) \triangleq \inf\{t : V(t,\omega) \geq n\}$$

megállási idők. Így a $\tau_n \triangleq \upsilon_n \wedge \kappa_n \wedge \rho_n$ szintén megállási idő. Nyilván $\tau_n \nearrow \infty$, így ha minden n indexre $M^{\tau_n} = 0$ akkor az M nulla a $[0, \tau_n]$ szakaszon minden n-re, így az M nulla a $\cup_n [0, \tau_n] = \mathbb{R}_+ \times \Omega$ halmazon, így $M = 0$.

Fisk tételének bizonyítása

A folytonosság miatt az $\left|M^{\tau_n}\right| \leq n$ és $\left|V^{\tau_n}\right| \leq n$, így a trajelktóriák korlátosak. Feltehető tehát, hogy az M és a $V \stackrel{\circ}{=} \mathrm{Var}\,(M)$ korlátossak. Legyen $\left(t_k^{(n)}\right)$ a $[0, t]$ egy infinitezimális particiója. Az energiaazonosság miatt ha $u > v$, akkor

$$\mathbf{E}\left(\left(M\left(u\right) - M\left(v\right)\right)^2\right) = \mathbf{E}\left(M^2\left(u\right) - M^2\left(v\right)\right),$$

és mivel $M\left(0\right) = 0$ ezért

$$\begin{aligned}
\mathbf{E}\left(M^2\left(t\right)\right) &= \mathbf{E}\left(M^2\left(t\right)\right) - \mathbf{E}\left(M^2\left(0\right)\right) = \\
&= \mathbf{E}\left(\sum_k \left(M^2\left(t_k^{(n)}\right) - M^2\left(t_{k-1}^{(n)}\right)\right)\right) = \\
&= \mathbf{E}\left(\sum_k \left(M\left(t_k^{(n)}\right) - M\left(t_{k-1}^{(n)}\right)\right)^2\right).
\end{aligned}$$

Fisk tételének bizonyítása

A V korlátos, így ha $V \doteq \mathrm{Var}\,(M) \leq c$, akkor

$$
\begin{aligned}
& \mathbf{E}\left(M^2(t)\right) \leq \\
\leq\ & \mathbf{E}\left(\sum_k \left|M\left(t_k^{(n)}\right) - M\left(t_{k-1}^{(n)}\right)\right| \cdot \max_k \left|M\left(t_k^{(n)}\right) - M\left(t_{k-1}^{(n)}\right)\right|\right) \leq \\
\leq\ & \mathbf{E}\left(V(t) \cdot \max_k \left|M\left(t_k^{(n)}\right) - M\left(t_{k-1}^{(n)}\right)\right|\right) \\
\leq\ & c \cdot \mathbf{E}\left(\max_k \left|M\left(t_k^{(n)}\right) - M\left(t_{k-1}^{(n)}\right)\right|\right).
\end{aligned}
$$

M trajektóriái folytonosak, így egyenletesen is folytonosak a $[0, t]$ szakaszon, így

$$\lim_{n\to\infty} \max_k \left|M\left(t_k^{(n)}\right) - M\left(t_{k-1}^{(n)}\right)\right| = 0.$$

Fisk tételének bizonyítása

Másrészt
$$\max_k \left| M\left(t_k^{(n)}\right) - M\left(t_{k-1}^{(n)}\right) \right| \leq V(t) \leq c,$$
így a dominált konvergencia tétele miatt
$$\lim_{n\to\infty} \mathbf{E}\left(\max_k \left| M\left(t_k^{(n)}\right) - M\left(t_{k-1}^{(n)}\right) \right| \right) = 0.$$

Így $M(t) \overset{m.m}{=} 0$ minden t-re. Az M trajektóriái folytonosak, így majdnem minden ω esetén $M(t,\omega) = 0$ minden t-re.

Visszatérés az origóba

Legyen

$$\vartheta \circeq \inf \{ \|\mathbf{w}(t)\| : t \geq 0 \} .$$

Theorem (Wiener-folyamat origóba való visszatérése)

A többdimenziós Wiener-folyamatra teljesülnek a következők: Ha $n \geq 3$, akkor az $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$ pontból elindított Wiener-folyamatra

$$\mathbf{P}(\vartheta \leq r) = \left(\frac{r}{\|\mathbf{x}\|} \right)^{n-2}, \quad ha \quad 0 \leq r \leq \|\mathbf{x}\| ,$$

vagyis ha $n \geq 3$, akkor egy $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$ pontból elindított Wiener-folyamat pozitív valószínűséggel nem jut el az origó $r < \|\mathbf{x}\|$ sugarú környezetébe.

Az Itô-formula alkalmazása

Tegyük fel, hogy az $U \subseteq \mathbb{R}^n$ nyílt halmazon értelmezett $f \in C^2(U)$ függvény kielégíti a $\Delta f \overset{\circ}{=} \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2} = 0$ Laplace-egyenletet. Legyen τ megállási idő. Ha az $\mathbf{x}$ pontból elindított $\mathbf{w}$ n-dimenziós Wiener-folyamatra a $\mathbf{w}^\tau$ megállított folyamat az U halmazon belül marad, akkor

$$
\begin{aligned}
f(\mathbf{w}^\tau) - f(\mathbf{x}) &= \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_k}(\mathbf{w}^\tau) \bullet w_k^\tau + \\
&+ \frac{1}{2} \sum_i \sum_j \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(\mathbf{w}^\tau) \bullet \left[w_i^\tau, w_j^\tau \right],
\end{aligned}
$$

A vegyes tagok esetén a kvadratikus keresztvariáció nulla, az f kielégíti a Laplace-egyenletet, így

$$
f(\mathbf{w}^\tau) - f(\mathbf{x}) = \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_k}(\mathbf{w}^\tau) \bullet w_k^\tau .
$$

Dinkin-formula

Tegyük fel, hogy $\tau < \infty$ és az $f(\mathbf{w})$ a $[0, \tau]$ véletlen szakaszon egyenletesen korlátos. Ilyenkor az $f(\mathbf{w}^{\tau}) = (f(\mathbf{w}))^{\tau}$ korlátos lokális martingál, vagyis valódi martingál. A megállási opciókról szóló tétel alapján tetszőleges $T < \infty$ időpontra, felhasználva, hogy a $\mathbf{w}$ az $\mathbf{x}$ pontból lett elindítva

$$\mathbf{E}(f(\mathbf{w}(T \wedge \tau))) = \mathbf{E}(f(\mathbf{w}(0))) = \mathbf{E}(f(\mathbf{x})) = f(\mathbf{x}).$$

Az $f(\mathbf{w}^{\tau})$ korlátossága és a $\tau < \infty$ miatt ha $T \to \infty$, akkor

$$\mathbf{E}(f(\mathbf{w}(\tau))) = f(\mathbf{x}).$$

Gyűrűből való kilépés

Tegyük fel, hogy az $\|\mathbf{x}\|$ a $0 < r < R < \infty$ sugarak közé esik. Wiener-folyamatok trajektóriái a $t \geq 0$ félegyenesen majdnem minden kimenetelre nem korlátosak és minden kimenetelre folytonosak, ezért a külső körből a $\mathbf{w}$ egy valószínűséggel kilép. A kérdés csak az, hogy a belső vagy a külső határon fogja-e a folyamat a

$$B \circeq \{\mathbf{u} : r \leq \|\mathbf{u}\| \leq R\}$$

gyűrűt elhagyni. Jelölje τ_B a B gyűrűből való kilépés időpontját.

A harmonikus függvény megadása

Tegyük fel, hogy $n \geq 3$. Legyen $f(\mathbf{x}) \stackrel{\circ}{=} \|\mathbf{x}\|^{2-n}$. Az f nyilván az $U \stackrel{\circ}{=} \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ halmazon van értelmezve. Elemi számolással könnyen megmutatható. hogy az U halmazon az f kielégíti a Laplace-egyenletet. Az $f(\mathbf{w}^{\tau_B})$ az $r > 0$ miatt korlátos, így a Dinkin-formula alapján

$$\mathbf{E}(f(\mathbf{w}(\tau_B))) = f(\mathbf{x}).$$

Ezt és az f konkrét alakját felhasználva

$$r^{2-n}\mathbf{P}(\|\mathbf{w}(\tau_B)\| = r) + R^{2-n}(1 - \mathbf{P}(\|\mathbf{w}(\tau_B)\| = r)) = \|\mathbf{x}\|^{2-n},$$

és

$$\mathbf{P}(\|\mathbf{w}(\tau_B)\| = r) = \frac{\|\mathbf{x}\|^{2-n} - R^{2-n}}{r^{2-n} - R^{2-n}}.$$

A sugár a végtelenbe tart

Ha A_R jelöli azt az eseményt, hogy R sugár esetén a belső oldalon lép ki a folyamat, akkor nyilván ha $R_1 \leq R_2$, akkor $A_{R_1} \subseteq A_{R_2}$, ugyanis ha a kisebb sugár esetén már belül kilép, akkor a nagyobb sugár esetén is ott fog kilépni. Az A_R monoton nő, így ha $R \to \infty$, akkor mivel $n > 2$

$$\begin{aligned} \left(\frac{r}{\|\mathbf{x}\|}\right)^{n-2} &= \frac{\|\mathbf{x}\|^{2-n}}{r^{2-n}} = \lim_{R\to\infty} \frac{\|\mathbf{x}\|^{2-n} - R^{2-n}}{r^{2-n} - R^{2-n}} = \\ &= \lim_{R\to\infty} \mathbf{P}\left(A_R\right) = \mathbf{P}\left(\cup_R A_R\right). \end{aligned}$$

Ha egy ω kimenetelre a trajektória véges idő után belemetsz az r sugarú gömbbe, akkor a bemetszés időpontjáig felvett maximumánál nagyobb számot választva R-nek $\omega \in A_R \subseteq \cup_R A_R$. Megfordítva ha $\omega \in \cup_R A_R$, akkor alkalmas R-re $\omega \in A_R$, így az ω-ra vett trajektória belemetsz a r sugarú gömbbe. Így $\mathbf{P}\left(\cup_R A_R\right)$ éppen annak a valószínűsége, hogy az $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$ pontból elindított Wiener-folyamat belemetsz az $r \leq \|\mathbf{x}\|$ sugarú körbe.

A Wiener-folyamat normája tart a végtelenbe

Theorem

Ha $n \geq 3$ és $\mathbf{w}$ n-dimenziós Wiener-folyamat, akkor $\lim_{t\to\infty} \|\mathbf{w}(t)\| = \infty$.

Legyen $r > 0$ tetszőleges és legyen $a \geq r$. Legyen továbbá

$$\tau_a \stackrel{\circ}{=} \inf \{t : \|\mathbf{w}(t)\| \geq a\}.$$

Mivel a Wiener-folyamatok trajektóriái majdnem minden kimenetelre nem korlátosak, ezért majdnem mindenhol

$$\limsup_{t\to\infty} \|\mathbf{w}(t)\| = \infty,$$

így nyilván majdnem mindenhol $\tau_a < \infty$.

A Wiener-folyamat normája tart a végtelenbe

Az erős Markov-tulajdonság miatt a

$$\mathbf{w}^*(t) \stackrel{\circ}{=} (\mathbf{w}(t+\tau_a) - \mathbf{w}(\tau_a)) + \mathbf{w}(\tau_a), \quad t \geq 0$$

szintén Wiener-folyamat, amelyik a

$$\mathbf{w}(\tau_a) \in \{\|\mathbf{u}\| = a\}$$

pontból indul. Mivel $n \geq 3$

$$\mathbf{P}(\exists t \geq \tau_a, \|\mathbf{w}(t)\| \leq r) = \mathbf{P}(\exists t \geq 0, \|\mathbf{w}^*(t)\| \leq r) = \left(\frac{r}{a}\right)^{n-2}.$$

Ha $a \nearrow \infty$ akkor ez a valószínűség nullához tart.

A Wiener-folyamat normája tart a végtelenbe

Tegyük fel, hogy $a_k \nearrow \infty$. Legyen A_k az az esemény, hogy az a_k sugarú gömbből való kilépés után visszatér a folyamat az r sugarú gömbbe. $A_{k+1} \subseteq A_k$. Nyilván $\cap_k A_k$ az olyan kimenetelekből áll, hogy végtelen sok a_k-sugarú gömbből való kilépés után is visszatér. Annak a valószínűsége, hogy a $\mathbf{w}$ a végtelen sok τ_{a_k} után visszatér a $\{\|\mathbf{u}\| \leq r\}$ gömbe

$$\mathbf{P}\left(\cap_k A_k\right) = \lim_{k\to\infty}\left(\frac{r}{a_k}\right)^{n-2} = 0.$$

Így egy valószínűséggel minden ω-hoz van olyan $k \overset{\circ}{=} k(\omega)$, hogy

$$\mathbf{w}(t,\omega) \notin \{\|\mathbf{u}\| \leq r\} \qquad t \geq \tau_k(\omega).$$

Így egy valószínűséggel ha $t \nearrow \infty$, akkor $\|w(t,\omega)\| \to \infty$.

Folytonos Wiener-folyamatok karakterizációja

Theorem

Minden folytonos Lévy-folyamat egy Wiener-folyamat és egy lineáris trend lineáris kombinációja.

Lévy-folyamatok momentumai

Theorem

Ha valamely X Lévy-folyamat ugrásai kisebbek egy fix $c > 0$ konstansnál, vagyis $|\Delta X| \leq c$, akkor tetszőleges $[0, t]$ véges szakaszon az X momentumainak halmaza egyenletesen korlátos. Vagyis minden m kitevőhöz és $[0, t]$ szakaszhoz létezik olyan $k(m, t)$ korlát, hogy

$$\mathbf{E}\left(\left|X^m(s)\right|\right) \leq k(m, t), \quad s \in [0, t].$$

Lévy-folyamatok momentumai

Mivel a trajektóriák regulárisak, ezért a trajektóriák mindegyike minden véges és zárt szakaszon korlátos. Ebből következően az az esemény, hogy valamely trajektória korlátos eleme a farok σ-algebrának. A nulla vagy egy törvény miatt a farok σ-algebra eseményei nulla vagy egy valószínűségűek. Így az olyan trajektóriák halmaza, amely korlátos nulla vagy egy valószínűséggel bír. Ha a trajektóriák egy valószínűséggel korlátosak, akkor a folyamathoz hozzáadva a $Z(t) = t$ lineáris trendet, nyilván korlátlan trajektóriájú Lévy-folyamatot kapunk. Nyilván az X és az $X + Z$ momentumai minden véges szakaszon egyszerre korlátosak, vagy korlátlanok. Feltehetjük tehát, hogy az X trajektóriái nem korlátossak.

Lévy-folyamatok momentumai

Tekintsük a

$$\tau_1 \triangleq \inf \{t : |X(t)| > c\}$$

megállási időt. Mivel a trajektóriák a teljes számegyenesen egy valószínűséggel korlátlanok $\tau_1 < \infty$ majdnem mindenhol. Így tekinthetjük az X^* újraindított folyamatot. Legyen

$$\tau_2 \triangleq \inf \{t : |X^*(t)| > c\} + \tau_1 \triangleq \inf \{t : |X(t+\tau_1) - X(\tau_1)| > c\} + \tau_1.$$

Hasonló módon definiálhatjuk az τ_3 stb. megállási időket. Az erős Markov-tulajdonság miatt az $\{X^*(t) : t \geq 0\}$ változók függetlenek az $\mathcal{F}_{\tau_1}$ σ-algebrától. A

$$\tau_2 - \tau_1 \triangleq \inf \{t \geq 0 : |X^*(t)| > c\}$$

mérhető az $\{X^*(t) : t \geq 0\}$ változók által generált σ-algebrára, így a $\tau_2 - \tau_1$ független az $\mathcal{F}_{\tau_1}$-től. Hasonlóan a $\tau_n - \tau_{n-1}$ független az $\mathcal{F}_{\tau_{n-1}}$-től.

Lévy-folyamatok momentumai

Ugyancsak az erős Markov-tulajdonság miatt $\tau_n - \tau_{n-1}$ eloszlása minden n-re megegyezik a τ_1 eloszlásával. Így a $\tau_0 \overset{\circ}{=} 0$ értékből kiindulva és használva a $(\tau_k - \tau_{k-1})$ változók függetlenségét

$$\mathbf{E}\left(\exp\left(-\tau_n\right)\right) = \mathbf{E}\left(\exp\left(-\sum_{k=1}^{n}\left(\tau_k - \tau_{k-1}\right)\right)\right) = \left(\mathbf{E}\left(\exp\left(-\tau_1\right)\right)\right)^n \overset{\circ}{=} q^n,$$

ahol $0 < q \leq 1$. Ha $q = 1$ akkor $\tau_1 = 0$, így a jobbról való folytonosság miatt $|X(0)| \geq c > 0$, ami ellentmond a Lévy-folyamatok definíciójának, így $q < 1$.

Lévy-folyamatok momentumai

Szigorúan a τ_1 előtt az X nem lehet nagyobb mint c, ugyanis ellenkező esetben a τ_1 csökkenthető lenne. Így $|X(\tau_1-)| \leq c$. Az ugrások kisebbek mint c, így

$$\begin{aligned} |X(\tau_1)| &= |X(\tau_1-) + \Delta X(\tau_1)| \leq |X(\tau_1-)| + |\Delta X(\tau_1)| \leq \\ &\leq |X(\tau_1-)| + c \leq 2c. \end{aligned}$$

Hasonlóan folytatva

$$\sup_t |X^{\tau_n}(t)| = \sup |\{X(t) : t \in [0, \tau_n]\}| \leq 2nc.$$

A Markov-egyenlőtlenség alapján

$$\begin{aligned} \mathbf{P}(|X(t)| > 2nc) &\leq \mathbf{P}(\tau_n < t) = \mathbf{P}(\exp(-\tau_n) > \exp(-t)) \leq \\ &\leq \frac{\mathbf{E}(\exp(-\tau_n))}{\exp(-t)} \leq \exp(t)\, q^n. \end{aligned}$$

Mivel $q < 1$, ezért

$$h(m) \stackrel{\circ}{=} \sum_{n=0}^{\infty} \left[2\left(n+1\right)c\right]^{m} q^{n} < \infty.$$

Az $\left|X\left(t\right)\right|^{m}$ függvényt egy lépcsős függvénnyel felülről közelítve

$$\begin{aligned} \mathbf{E}\left(\left|X\left(t\right)\right|^{m}\right) &\leq \sum_{n=0}^{\infty} \left[2\left(n+1\right)c\right]^{m} \cdot \mathbf{P}\left(\left|X\left(t\right)\right| > 2nc\right) \leq \\ &\leq \exp\left(t\right) \sum_{n=0}^{\infty} \left[2\left(n+1\right)c\right]^{m} q^{n} \stackrel{\circ}{=} \exp\left(t\right) h\left(m\right), \end{aligned}$$

amiből az állítás evidens.

Folytonos Lévy-folyamatok karakterizációja

Legyen X egy folytonos Lévy-folyamat. Mivel az X folytonos, ezért az X összes momentuma véges. Ebből következően az $X(t)$ változónak minden t időpontban van várható értéke. Következésképpen ha m jelöli az $X(1)$ várható értékét, akkor az $X(t) - t \cdot m$ martingál. Érdemes hangsúlyozni, hogy annak igazolásához, hogy az $X(t)$ várható értéke éppen $t \cdot m$ vagy fel kell használni hogy a filtráció teljesíti a szokásos feltételeket, így az $X(t) - \mathbf{E}(X(t))$ logikai martingálnak van várható értéke, vagy fel kell használni, hogy véges időszakon a második momentumok halmaza korlátos, így az $(X(t))_t$ család minden véges időtartományon egyenletesen integrálható. Az $X(t) - t \cdot m$ martingál voltából következik, hogy az X folytonos szemimartingál.

Folytonos Lévy-folyamatok karakterizációja

A jelölés egyszerűsítése céljából tegyük fel, hogy $m = 0$. A kvadratikus variáció definíciója miatt az $[X]$ szintén folytonos Lévy-folyamat. A független és stacionárius növekedés feltétele következik abból, hogy a kvadratikus variáció a közelítő négyzetösszegek határértéke és a Lévy-tulajdonság miatt a diszjunkt szakaszokhoz tartozó közelítő négyzetösszegek függetlenek és az eloszlásuk csak az időszak hosszától függ. A kvadratikus variáció folytonossága pedig a parciális integrálás formulája miatt a sztochasztikus integrálok folytonos integrátor szerinti folytonosságának következménye. Ez másképpen azt jelenti, hogy az

$$Y(t) \stackrel{\circ}{=} [X](t) - \mathbf{E}([X](t)) = [X](t) - t \cdot \mathbf{E}([X](1))$$

kifejezés ismételten folytonos martingál. Az Y mint két monoton növekedő függvény különbsége véges variációjú.

Folytonos Lévy-folyamatok karakterizációja

A véges variációjú folytonos martingálok konstansak, így

$$[X](t) = \mathbf{E}([X](t)) = a \cdot t.$$

Az Itô-formula szerint

$$\begin{aligned} \exp(iuX(t)) - 1 &= iu \int_0^t \exp(iuX(s))dX(s) - \\ &\quad - \frac{1}{2}u^2 \int_0^t \exp(iuX(s))d[X](s). \end{aligned}$$

Az $\exp(iuX)$ korlátos és az X négyzetesen integrálható, következésképpen a sztochasztikus integrál valódi martingál. A két oldalon várható értéket véve és felhasználva, hogy most a sztochasztikus integrál várható értéke a martingál tulajdonság miatt nulla

$$\begin{aligned}\mathbf{E}\left(\exp(iuX(t))\right)-1 &= -\frac{1}{2}u^2\mathbf{E}\left(\int_0^t \exp(iuX(s))d\left[X\right](s)\right) = \\ &= -\frac{1}{2}u^2\mathbf{E}\left(\int_0^t \exp(iuX(s))d\left(as\right)\right) = \\ &= -\frac{1}{2}u^2 a\int_0^t \mathbf{E}\left(\exp(iuX(s))\right)ds.\end{aligned}$$

Ha bevezetjük a $\varphi(u,t) \circeq \mathbf{E}\left(\exp(iuX(t))\right)$ jelölést, akkor ez

$$\varphi(u,t)-1=-\frac{1}{2}u^2 a\int_0^t \varphi(u,s)\,ds.$$

t szerint deriválva

$$\frac{d\varphi(u,t)}{dt}=-\frac{1}{2}u^2 a\varphi(u,t)\,.$$

Folytonos Lévy-folyamatok karakterizációja

A differenciálegyenletet megoldva tetszőleges u-ra

$$\varphi\left(u,t\right)=\exp\left(-\frac{1}{2}u^{2}at\right).$$

A normális eloszlás Fourier-transzformáltjának képletét felhasználva

$$X\left(t\right)\cong N\left(0,\sqrt{at}\right).$$

Lévy-féle karakterizációs tétel

Theorem (Lévy-féle karakterizációs tétel)

Ha X olyan folytonos lokális martingál, amelyre $X(0) = 0$ és $[X](t) = t$, akkor az X Wiener-folyamat.

A probléma a növekmények függetlensége

Ha X folytonos lokális martingál és ha $[X](t) = t$, akkor a már bemutatott módon belátható, hogy $X(t) \cong N\left(0, \sqrt{t}\right)$. A gondolatmenetet az újraindított folyamatra alkalmazva ebből könnyen belátható, hogy növekmények eloszlása $N\left(0, \sqrt{t-s}\right)$, vagyis a folyamat stacionárius növekményű. Ebből azonban még nem következik, hogy a folyamat Wiener-folyamat, ugyanis nem tudjuk, hogy a növekmények függetlenek vagy sem. A szórásokra vonatkozó képletből belátható, hogy a növekmények korrelálatlanok, ugyanis teljesül a

$$\mathbf{D}^2\left(X\left(t+s\right)\right) = \mathbf{D}^2\left(X\left(t\right)\right) + \mathbf{D}^2\left(X\left(s\right)\right).$$

Sajnos azonban normális eloszlású változók korrelálatlansága csak akkor implikálja a függetlenséget, ha az együttes eloszlás is normális.

Exponenciális martingál

Írjuk fel az X exponenciális martingálját:

$$\frac{\exp\left(iuX\left(t\right)\right)}{\varphi\left(u,t\right)}=\frac{\exp\left(iuX\left(t\right)\right)}{\exp\left(-\frac{1}{2}u^{2}t\right)}=\exp\left(iuX\left(t\right)+\frac{1}{2}u^{2}t\right).$$

Mivel $\left[X\right]\left(t\right)=t$ az Itô-formulával azonnal látható, hogy a kifejezés lokális martingál. Mivel ugyanakkor minden véges szakaszon egyenletesen korlátos, ezért nem csak lokális martingál, hanem valódi martingál is.

Lokális martingál exponenciális martingálja

Érdemes felhívni a figyelmet arra, hogy tetszőleges folyamat esetén az

$$\frac{\exp\left(iuX\left(t\right)\right)}{\varphi\left(u,t\right)}$$

exponenciális martingál nem lesz martingál sőt lokális martingál sem. Az Itô-formulából azonnal következik, hogy egy L lokális martingál esetén az

$$\exp\left(L-\frac{1}{2}\left[L\right]\right)$$

kifejezés lokális martingál és ezt szokás a lokális martingál exponenciális martingáljának mondani.

Lokális martingál exponenciális martingálja

Valóban az exponenciális függvény deriválási szabályát kihasználva

$$\begin{aligned} & Z(t) - Z(0) = \\ = & \int_0^t Zd\left(L - \frac{1}{2}[L]\right) + \frac{1}{2}\int_0^t Zd\left[L - \frac{1}{2}[L]\right] = \\ = & \int_0^t Zd\left(L - \frac{1}{2}[L]\right) + \frac{1}{2}\int_0^t Zd[L] = \\ = & \int_0^t ZdL, \end{aligned}$$

amely kifejezés egy lokális martingál szerint sztochasztikus integrál, vagyis lokális martingál.

Lokális martingál exponenciális martingálja

Nyilván tetszőleges z-re az

$$\exp\left(zL - \frac{1}{2}[zL]\right) = \exp\left(zL - \frac{1}{2}z^2[L]\right)$$

is lokális martingál. A jelen példában a $z = iu$ helyettesítéssel kapjuk az

$$\exp\left(iuX(t) + \frac{1}{2}u^2 t\right)$$

kifejezést. Vagyis kihasználva, hogy az $X(t)$ eloszlása normális az exponenciális martingál két különböző definíciója egybeesik.

Lokális martingál exponenciális martingálja

Mivel az

$$\frac{\exp(iuX)}{\varphi(u,t)}$$

kifejezés martingál, ezért ha $s < t$, akkor

$$\mathbf{E}\left(\frac{\exp(iuX(t))}{\varphi(u,t)} \mid \mathcal{F}_s\right) = \frac{\exp(iuX(s))}{\varphi(u,s)}.$$

Ezt átrendezve

$$\mathbf{E}\left(\exp\left(iu\left(X(t) - X(s)\right)\right) \mid \mathcal{F}_s\right) = \frac{\varphi(u,t)}{\varphi(u,s)} = \exp\left(-\frac{1}{2}u^2(t-s)\right).$$

Független növekmények igazolása

A feltételes várható érték definícióját felírva minden $F \in \mathcal{F}_s$ halmazra

$$\int_F \exp\left(iu\left(X\left(t\right)-X\left(s\right)\right)\right) d\mathbf{P} = \mathbf{P}\left(F\right)\mathbf{E}\left(\exp\left(iu\left(X\left(t\right)-X\left(s\right)\right)\right)\right).$$

A monoton osztály tétel segítségével az $\exp\left(iux\right)$ helyébe tetszőleges Borel-mérhető halmaz karakterisztikus függvénye írható, így

$$\mathbf{P}\left(\left\{X\left(t\right)-X\left(s\right)\in B\right\}\cap F\right) = \mathbf{P}\left(F\right)\cdot\mathbf{P}\left(\left\{X\left(t\right)-X\left(s\right)\in B\right\}\right)$$

vagyis az $\mathcal{F}_s$ σ-algebra és az $X\left(t\right)-X\left(s\right)$ növekmények függetlenek, vagyis az X független növekményű.

Tanaka-formula

Example

A $\operatorname{sgn}(w) \bullet w$ integrál Wiener-folyamat.

A sztochasztikus integrál konstrukciója szerint a folyamat folytonos és lokális martingál. A kvadratikus variációja

$$\int_0^t (\operatorname{sgn}(w))^2 (s)\, ds = t.$$

Lévy-folyamatok összege nem Lévy-folyamat

Example

Lévy-folyamatok összege nem feltétlenül Lévy-folyamat.

Legyen w Wiener folyamat és legyen $X(t) \circeq \int_0^t \operatorname{sgn}(w(s))\, dw(s)$. Az X szintén Wiener-folyamat. A

$$Z \circeq w + X = 1 \bullet w + \operatorname{sgn}(w) \bullet w = (1 + \operatorname{sgn}(w)) \bullet w$$

mint folytonos martingálok összege szintén folytonos martingál az eredeti közös $\mathcal{F}$ filtrációra nézve.

$$[Z](t) = \int_0^t (1 + \operatorname{sgn}(w(s)))^2 (s)\, ds$$

amely kifejezés nem determinisztikus. Így a Z nem lehet Wiener-folyamat. De mivel minden folytonos Lévy-folyamat egy Wiener-folyamat és egy lineáris trend összege, ezért a Z nem lehet Lévy-folyamat.

Lévy-folyamatok összege nem Lévy-folyamat

Ugyanakkor szemimartingálok összege szemimartingál!!!!