Itô-formula

A sztochasztikus folyamatok egyik legfontosabb formulája

Medvegyev Péter
Matematika tanszék

2008

Az Itô-formula

Theorem

Ha F kétszer folytonosan deriválható n-változós függvény, és $(X_k)_{k=1}^n$ folytonos szemimartingálok, akkor tetszőleges t időpontra

$$
\begin{aligned}
F(X(t)) - F(X(0)) &= \sum_{k=1}^{n} \int_0^t \frac{\partial F}{\partial x_k}(X(s))\, dX_k(s) + \\
&\quad + \frac{1}{2} \sum_{i,j} \int_0^t \frac{\partial^2 F}{\partial x_i \partial x_j}(X(s))\, d[X_i, X_j](s).
\end{aligned}
$$

Az Itô-formula

A formulának számos olvasata van. Először tegyük fel, hogy az X egy lokális martingál. Ha F egy kétszer folytonosan deriválható függvény, akkor az $F(X)$ szintén sztochasztikus folyamat, amely értéke egy (t, ω) pontban éppen $F(X(t, \omega))$. A formula szerint ez a transzformált sztochasztikus folyamat két folyamat összegére bontható. Az első, mivel az X most egy lokális martingál, egy lokális martingál szerinti sztochasztikus integrál, vagyis egy lokális martingál. A második egy véges változású folyamat, az $[X]$, szerinti sztochasztikus integrál, vagyis egy véges változású folyamat. Vagyis az $F(X)$ transzformált folyamat egy lokális martingál és egy véges változású tag összegére bontható, vagyis egy szemimartingál. Másképpen az Itô-formula szerint egy lokális martingál kétszer folytonosan deriválható függvénye szemimartingál.

Az elsőrendű közelítés

Rögzítsünk egy $[a, b]$ szakaszt és vegyük a szakasz egy (t_k) partícióját. Tekintsük az

$$F(X(b)) - F(X(a)) = \sum_k (F(X(t_k)) - F(X(t_{k-1})))$$

teleszkópikus felbontást. A közönséges Newton-Leibniz-szabály esetén

$$F(X(t_{k+1})) - F(X(t_k)) \approx F'(X(\tau_k))(X(t_{k+1}) - X(t_k)) =$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial F}{\partial x_i}(X(\tau_k))(X_i(t_{k+1}) - X_i(t_k)).$$

Vegyük észre, hogy az így kapott

$$\sum_k \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial F}{\partial x_i}(X(\tau_k))(X_i(t_k) - X_i(t_{k-1}))$$

összeg általában nem konvergál a megfelelő sztochasztikus integrálokhoz, ugyanis a τ_k közelítő pontokat nem a $[t_{k-1}, t_k]$ szakaszok kezdőpontjának kaptuk.

A másodrendű közelítés

A teleszkopikus összeget becsülhetnénk másképpen is. Ennek a klasszikus esetben nincs értelme, most azonban célszerű, ha a Taylor-formula által biztosított

$$F'\left(X\left(t_{k-1}\right)\right)\left(X\left(t_k\right)-X\left(t_{k-1}\right)\right)+\frac{1}{2}F''\left(X\left(\tau_k\right)\right)\left(X\left(t_k\right)-X\left(t_{k-1}\right)\right)^2$$

másodrendű közelítéssel élünk. A második derivált egy kvadratikus alak, így az $X\left(\tau_k\right)$ pontban vett F'' második derivált az $X\left(t_k\right)-X\left(t_{k-1}\right)$ helyen éppen

$$\left(X\left(t_k\right)-X\left(t_{k-1}\right)\right)^T\cdot H\cdot\left(X\left(t_k\right)-X\left(t_{k-1}\right)\right)$$

módon írható, ahol $H \doteq \left(\frac{\partial^2 F}{\partial x_i \partial x_j}\left(X\left(\tau_k\right)\right)\right)$ a második parciális deriváltakból álló Hesse-mátrix. Tehát a másodrendű tag

$$\sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial^2 F}{\partial x_i \partial x_j}\left(X\left(\tau_k\right)\right)\Delta X_i\left(t_k\right)\Delta X_j\left(t_k\right).$$

A másodrendű közelítés

A Taylor-formula szerint a másodrendű tagban levő τ_k továbbra is a $[t_{k-1}, t_k]$ egy alkalmas köztes pontja, de a köztes τ_k az elsőrendű tagban nem szerepel csak a másodrendű tagban. Az elsőrendű közelítés éppen az

$$\int_a^b F'(X)\,dX = \sum_{i=1}^{n} \int_a^b \frac{\partial F}{\partial x_i}(X)\,dX_i$$

sztochasztikus integrálokhoz tart. Mivel a keresztvariáció növekményének becslése alapján

$$\Delta X_i(t_k)\,\Delta X_j(t_k) \approx \Delta\left[X_i, X_j\right](t_k)$$

ezért

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x_i \partial x_j}(X(\tau_k))\,\Delta X_i(t_k)\,\Delta X_j(t_k) \approx \frac{\partial^2 F}{\partial x_i \partial x_j}(X(\tau_k))\,\Delta\left[X_i, X_j(t_k)\right].$$

A másodrendű közelítés

Tehát

$$\begin{aligned} \sum_k \frac{\partial^2 F}{\partial x_i \partial x_j} \left(X\left(\tau_k\right)\right) \Delta X_i\left(t_k\right) \Delta X_j\left(t_k\right) \approx \\ \approx \sum_k \frac{\partial^2 F}{\partial x_i \partial x_j} \left(X\left(\tau_k\right)\right) \Delta \left[X_i, X_j\right]\left(t_k\right) \\ \rightarrow \int_a^b \frac{\partial^2 F}{\partial x_i \partial x_j} \left(X\left(t\right)\right) d\left[X_i, X_j\right]\left(t\right). \end{aligned}$$

Vegyük észre, hogy a másodrendű tagokból képzett integrál a négyzetes keresztvariáció szerint képzett integrál, vagyis közönséges Stieltjes-integrál, így az a tény, hogy a τ_k nem az intervallum kezdőpontja nem okoz gondot.

A másodrendű közelítés

Az Itô-formula a Newton–Leibniz-szabály általánosítása. A két formula különbsége a másodrendű tagokban van. A klasszikus analízisben a másodrendű tagok értéke nulla lenne, ugyanis ha egy F függvény kétszer folytonosan deriválható, akkor az F'' folytonos függvény az $[a, b]$ véges szakaszon korlátos, tehát

$$
\begin{aligned}
\left|\frac{1}{2}\sum_k F''(\tau_k)(t_k - t_{k-1})^2\right| &\leq \frac{1}{2}K\sum_k (t_k - t_{k-1})^2 \leq \\
&\leq \frac{1}{2}K\max_k |t_k - t_{k-1}| \sum_k (t_k - t_{k-1}) = \\
&= \frac{1}{2}K\max_k |t_k - t_{k-1}| (b - a) \to 0.
\end{aligned}
$$

Időtől függő alak

A többdimenziós Itô-formula speciális esete amikor $Y(s) \overset{\circ}{=} F(s, X(s))$, ahol az F egy kétváltozós, kétszer folytonosan deriválható függvény. Az Itô-formula szerint

$$
\begin{aligned}
Y(b) - Y(a) &= F(b, X(b)) - F(a, X(a)) = \\
&= \int_a^b \frac{\partial F}{\partial s}(s, X(s))\, ds + \int_a^b \frac{\partial F}{\partial x}(s, X(s))\, dX(s) + \\
&+ \frac{1}{2}\int_a^b \frac{\partial^2 F}{\partial s^2}(s, X(s))\, d[s] + \frac{1}{2}\int_a^b \frac{\partial^2 F}{\partial x^2}(s, X(s))\, d[X](s) + \\
&+ \int_a^b \frac{\partial^2 F}{\partial s \partial x}(s, X(s))\, d[s, X](s).
\end{aligned}
$$

Időtől függő alak

Könnyen belátható, hogy tetszőleges véges $[a, b]$ szakaszon $[s] = 0$. Valóban, triviális módon

$$\sum_k \left(s_k^{(n)} - s_{k-1}^{(n)}\right)^2 \leq \max_k \left|s_k^{(n)} - s_{k-1}^{(n)}\right| \sum_k \left|s_k^{(n)} - s_{k-1}^{(n)}\right| .$$

Az összeg éppen $b - a$. Mivel a felbontás finomsága definíció szerint nullához tart a növekmények négyzetes összege nullához tart. A keresztvariáció szintén nulla, ugyanis az X trajektóriáinak folytonossága miatt

$$\begin{aligned} |[s, X](t)| &\approx \left|\sum_k (s_k - s_{k-1})(X(s_k) - X(s_{k-1}))\right| \leq \\ &\leq t \cdot \max_k |X(s_k) - X(s_{k-1})| \to 0. \end{aligned}$$

Időtől függő alak

A másodrendű tagban tehát három tényező elhagyható, így

$$\begin{aligned} F\left(b, X\left(b\right)\right) - F\left(a, X\left(a\right)\right) &= \int_a^b \frac{\partial F}{\partial s}\left(s, X\left(s\right)\right) ds + \\ &+ \int_a^b \frac{\partial F}{\partial x}\left(s, X\left(s\right)\right) dX\left(s\right) + \\ &+ \frac{1}{2}\int_a^b \frac{\partial^2 F}{\partial x^2}\left(s, X\left(s\right)\right) d\left[X\right]\left(s\right). \end{aligned}$$

Parciális integrálás formulája

A formula jobb megértése céljából érdemes megvizsgálni a parciális integrálás formulája és az Itô-formula kapcsolatát. Egyrészt az Itô-formulából következik a parciális integrálás formulája: Ha $F(x,y) \stackrel{\circ}{=} xy$, akkor alkalmazható az Itô-formula. Mivel $\partial F/\partial y = x$, $\partial F/\partial x = y$, a két másodrendű parciális derivált nulla, valamint a vegyes parciális derivált éppen 1, ezért

$$F(X(b), Y(b)) - F(X(a), Y(a)) = X(b)Y(b) - X(a)Y(a) =$$
$$\int_a^b XdY + \int_a^b YdX + 2\frac{1}{2}\int_a^b 1d[X,Y],$$

amiből a parciális integrálás formulája evidens.

Parciális integrálás formulája

Az Itô-formula egyik igen elegáns bizonyítása arra épül, hogy a parciális integrálás formulájával belátjuk az Itô-formulát polinómokra, majd az F függvényt és deriváltjait egyenletesen megközelítjük polinómokkal, illetve a polinóm, megfelelő deriváltjaival. Könnyen látható, hogy az Itô-formula lineáris, vagyis ha igaz egy F és egy G függvényre, akkor igaz az $F+G$ függvényre is. Elegendő tehát a formulát csak az $F(x)=x^n$ alakú polinómokra igazolni. Ezt indukcióval végezhetjük el. Ha $n=0$, akkor $x^n\equiv 1$, és a formula triviálisan igazolható. Ugyancsak triviális az $n=1$ eset. Ilyenkor a formula az

$$X(b)-X(a)=\int_a^b 1dX+\frac{1}{2}\int_a^b 0d[X]$$

azonosságra egyszerűsödik.

Parciális integrálás formulája

Ha $n = 2$, akkor a formula éppen

$$X^2(b) - X^2(a) = 2\int_a^b XdX + [X],$$

ami a parciális integrálás formulából evidens. Tegyük fel, hogy az állítást már egy n-re igazoltuk, vagyis tegyük fel, hogy az

$$X^n - X^n(0) = nX^{n-1} \bullet X + \frac{n(n-1)}{2} X^{n-2} \bullet [X]$$

egyenlőséget már beláttuk. Az $X^{n+1} = X^n \cdot X$ szereposztással alkalmazva a parciális integrálás formuláját

$$X^{n+1} - X^{n+1}(0) = X^n \bullet X + X \bullet X^n + [X^n, X].$$

Parciális integrálás formulája

Az X^n képletét beírva az $X \bullet X^n$ integrálba az asszociativitási szabály alapján

$$X \bullet X^n = nXX^{n-1} \bullet X + \frac{n(n-1)}{2} XX^{n-2} \bullet [X] .$$

A polaritási formula szerint

$$[X^n, X] = nX^{n-1} \bullet [X] + \frac{n(n-1)}{2} X^{n-2} \bullet [[X], X] .$$

Vegyük észre, hogy az $[X]$ korlátos változású az X folytonos, ezért a második integrál integrátora nulla, így csak az első tag marad, vagyis

$$[X^n, X] = nX^{n-1} \bullet [X] .$$

Parciális integrálás formulája

A két képletet a parciális integrálás formulájába visszaírva a jobb oldal

$$(n+1)\, X^n \bullet X + \frac{n\,(n-1)}{2} X^{n-1} \bullet [X] + nX^{n-1} \bullet [X]$$

amely éppen

$$(n+1)\, X^n \bullet X + \frac{n(n-1)+2n}{2} X^{n-1} \bullet [X]$$

ami pedig

$$(n+1)\, X^n \bullet X + \frac{n\,((n-1)+2)}{2} X^{n-1} \bullet [X]$$

vagyis éppen a formula $n+1$ kitevőre.

Karakterisztikus függvények kiszámolása

Example

Normális eloszlás karakterisztikus függvénye Itô-formulával.

Elegendő kiszámolni az $N(0,1)$ karakterisztikus függvényét. A $z \mapsto \exp(itz)$ kifejezés mint komplexből komplexbe ható leképezés tekinthető $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ kétszer deriválható függvénynek. Külön alkalmazva a formulát a valós és a komplex részre az Itô-formula alapján

$$\begin{aligned}\exp(itw(s)) - \exp(itw(0)) &= it\int_0^s \exp(itw(u))\,dw(u) + \\ &+ \frac{1}{2}(it)^2 \int_0^t \exp(itw(u))\,d[w(u)].\end{aligned}$$

Karakterisztikus függvények kiszámolása

A két oldalon várható értéket véve:

$$\mathbf{E}\left(\exp\left(itw\left(s\right)\right)\right)-1=-\frac{1}{2}t^{2}\mathbf{E}\left(\int_{0}^{s}\exp\left(itw\left(u\right)\right)du\right).$$

A két integrált felcserélve

$$\mathbf{E}\left(\exp\left(itw\left(s\right)\right)\right)-1=-\frac{1}{2}t^{2}\int_{0}^{s}\mathbf{E}\left(\exp\left(itw\left(u\right)\right)\right)du.$$

Deriválva az

$$\frac{d}{ds}\mathbf{E}\left(\exp\left(itw\left(s\right)\right)\right)=-\frac{1}{2}t^{2}\mathbf{E}\left(\exp\left(itw\left(s\right)\right)\right).$$

Az egyenletet megoldva

$$\mathbf{E}\left(\exp\left(itw\left(s\right)\right)\right)=\exp\left(-\frac{t^{2}}{2}s\right).$$

Ha $s=1$, akkor $w\left(s\right)$ eloszlása $N\left(0,1\right)$, így

$$\varphi\left(t\right)=\exp\left(-\frac{t^{2}}{2}\right).$$

Karakterisztikus függvények kiszámolása

Ha a komplex számokat el akarjuk kerülni, akkor az Itô-formulát a $w \mapsto \cos tw$ és $w \mapsto \sin tw$ szereposztásokkal kell alkalmazni, majd a két oldal várható értékét venni. Minden esetben ki kell használni, hogy a sztochasztikus integrálok valódi martingálok, ugyanis az integrandusok korlátosak.

Karakterisztikus függvények kiszámolása

$$\sin tw(s) - \sin tw(0) = t\int_0^s \cos tw(u)\, dw(u) - \frac{t^2}{2}\int_0^s \sin tw(u)\, du.$$

Ebből

$$\mathbf{E}(\sin tw(s)) - 1 = -\frac{t^2}{2}\int_0^s \mathbf{E}(\sin tw(u))\, du,$$

vagyis a differenciálegyenlet

$$\frac{d}{ds}f(s) = -\frac{t^2}{2}f(s), \quad f(0) = 0,$$

amiből

$$\mathbf{E}(\sin tw(s)) = 0.$$

Karakterisztikus függvények kiszámolása

$$\cos tw(s) - \cos tw(0) = -t\int_0^s \sin tw(u)\,dw(u) - \frac{t^2}{2}\int_0^s \cos tw(u)\,du.$$

Ebből

$$\mathbf{E}(\cos tw(s)) - 1 = -\frac{t^2}{2}\int_0^s \mathbf{E}(\cos tw(u))\,du,$$

vagyis a differenciálegyenlet

$$\frac{d}{ds}f(s) = -\frac{t^2}{2}f(s), \quad f(0) = 1,$$

amiből

$$\mathbf{E}(\cos tw(s)) = \exp\left(-\frac{t^2}{2}s\right).$$

Lokális martingálok, amelyek nem martingálok

Mivel a lokális martingál szerinti sztochasztikus integrálok lokális martingálok, ezért lokális martingált könnyű csinálni. Ugyanakkor általában nem könnyű garantálni, hogy valódi martingált kapunk. A gond az, hogy az alábbi számolásban fel lehet-e cserélni a várható értéket és a határértéket: Mivel $\tau_n \nearrow \infty$ és az X^{τ_n} definíció szerint martingál, ezért

$$X(s) = \lim_{n\to\infty} X(s \wedge \tau_n) \overset{\circ}{=} \lim_{n\to\infty} X^{\tau_n}(s) = \lim_{n\to\infty} \mathbf{E}\left(X^{\tau_n}(t) \mid \mathcal{F}_s\right) =$$

$$= \mathbf{E}\left(\lim_{n\to\infty} X^{\tau_n}(t) \mid \mathcal{F}_s\right) \overset{\circ}{=} \mathbf{E}\left(\lim_{n\to\infty} X(t \wedge \tau_n) \mid \mathcal{F}_s\right) = \mathbf{E}\left(X(t) \mid \mathcal{F}_s\right).$$

A határérték és a várható érték azonban általában nem cserélhető fel. A mértékelméletben belátott két kritérium általában nem használható. A monoton konvergencia tétel használata reménytelen, ugyanakkor általában nincs olyan integrálható ξ majoráns, amelyre

$$|X(t,\omega)| \le \xi(\omega) \in L^1(\Omega).$$

Integrálható lokális martingál, amely nem martingál

Ha ilyen van, akkor persze az

$$|X(t \wedge \tau_n)| \leq \xi$$

is teljesül minden n-re, így a majorált konvergencia tétel használható. Egy másik kevésbé ismert kritérium a következő:

Theorem

Ha $\xi_n \to \xi$ és a (ξ_n) sorozat korlátos az $L^p(\Omega)$ térben valamilyen $p > 1$ esetén akkor

$$\lim_{n\to\infty} \mathbf{E}(\xi_n \mid \mathcal{F}) = \mathbf{E}\left(\lim_{n\to\infty} \xi_n \mid \mathcal{F}\right) = \mathbf{E}(\xi \mid \mathcal{F}).$$

A tétellel kapcsolatban érdemes hangsúlyozni, hogy az állítás $p = 1$ esetén már nem igaz.

Integrálható lokális martingál, amely nem martingál

A kritérium speciális esete egy általánosabb kritériumnak, amelyre mint a (ξ_n) sorozat egyenletes integrálhatóságára szokás hivatkozni. Ha az egyenletes integrálhatósági kritériumot használni akarjuk, akkor a

$$\xi_n \stackrel{\circ}{=} X(t \wedge \tau_n)$$

sorozatnak kell az $L^p(\Omega)$ térben korlátosnak lenni. Az alábbi példa lényege, hogy ez nem következik az $X(t)$ változók $L^p(\Omega)$ korlátosságából. Vagyis előfordulhat, hogy a folyamat értékeiből álló halmaz $L^p(\Omega)$ korlátos, vagyis egyenletesen integrálható, de a megállított változók halmaza nem korlátos.

Integrálható lokális martingál, amely nem martingál

Example

Létezik L^2-ben korlátos lokális martingál, amelyik nem martingál.

Tekintsünk az $\mathbb{R}^3$ térben egy $\mathbf{w}$ standard Wiener-folyamatot. Ez definíció szerint azt jelenti, hogy a koordináták független Wiener-folyamatok. A $t = 0$ pontból eredő problémák elkerülése céljából tegyük fel, hogy a $\mathbf{w}$ folyamatot csak a $t \geq 1$ időpontokra vizsgáljuk. Később meg fogjuk mutatni, hogy mivel a dimenzió három, majdnem minden kimenetelre $\mathbf{w}(t) \neq 0$. Ugyancsak később látni fogjuk, hogy ismételten a három dimenzió miatt ha $t \to \infty$, akkor

$$R(t) \overset{\circ}{=} \|\mathbf{w}(t)\|_2 \to \infty.$$

Független növekményű folyamatok összege

Lemma

Ha X_1 és X_2 függetlenek és független növekményűek, akkor az $X_1 + X_2$ is független növekményű.

X_1 és X_2 pontosan akkor függetlenek, ha tetszőleges (t_i) sorozatra az $(X_1(t_i))$ és az $(X_2(t_i))$ vektorok függetlenek. Legyen $t > s$ és $\xi_i \circeq X_i(s)$ és $\eta_i \circeq X_i(t+h) - X_i(t)$. Az együttes eloszlásokat felírva, először a függetlenséget, majd a független növekményeket, majd ismét a függetlenséget használva

$$\mathbf{P}(\xi_1 \in B_1, \xi_2 \in B_2, \eta_1 \in C_1, \eta_2 \in C_2) =$$
$$\mathbf{P}(\xi_1 \in B_1, \eta_1 \in C_1)\,\mathbf{P}(\xi_2 \in B_2, \eta_2 \in C_2) =$$
$$= \mathbf{P}(\xi_1 \in B_1)\,\mathbf{P}(\eta_1 \in C_1)\,\mathbf{P}(\xi_2 \in B_2,)\,\mathbf{P}(\eta_2 \in C_2) =$$
$$= \mathbf{P}(\xi_1 \in B_1, \xi_2 \in B_2)\,\mathbf{P}(\eta_1 \in C_1, \eta_2 \in C_2).$$

Független növekményű folyamatok összege

A monoton osztály tétel segítségével

$$\mathbf{P}\left((\xi_1, \xi_2) \in B, (\eta_1 \eta_2) \in C\right) = \mathbf{P}\left((\xi_1, \xi_2) \in B\right) \mathbf{P}\left((\eta_1, \eta_2) \in C\right)$$

amiből a $\xi_1 + \xi_2$ független az $\eta_1 + \eta_2$-től. A gondolatmenetet kettő helyett véges sok változóra alkalmazva kapjuk a lemmát.

Független Wiener-folyamatok kvadratikus keresztvariációja nulla

Ha a w_1 és a w_2 független, akkor $[w_1, w_2] = 0$. Ugyanis

$$[w_1, w_2] = \frac{1}{4}\left([w_1 + w_2] - [w_1 - w_2]\right).$$

De a függetlenség miatt a $(w_1 \pm w_2) / \sqrt{2}$ Wiener-folyamatok, így a kvadratikus variációik megegyezik. (Mivel független növekményűek elegendő az eloszlásokat kiszámolni.)
Ebből következően többdimenziós Wiener-folyamat esetén az Itô-formulában a másodrendű tagban a vegyes tagok nullák, vagyis a másodrendő tag

$$\frac{1}{2}\int_0^t \sum_i \frac{\partial^2}{\partial x_i^2} f\left(\mathbf{w}\left(s\right)\right) ds.$$

Harmonikus függvények és az Itô-formula

Definition

Valamely f többváltozós függvényt harmonikusnak mondunk, ha

$$\Delta f \overset{\circ}{=} \sum_i \frac{\partial^2}{\partial x_i^2} f = 0.$$

Harmonikus függvények és az Itô-formula

Ebből következően ha **w** standard Wiener-folyamat, akkor

$$f(\mathbf{w}(t)) - f(\mathbf{w}(0)) = \sum_i \int_0^t \frac{\partial}{\partial x_i} f(\mathbf{w}(s))\, dw_i(s) + \frac{1}{2}\int_0^t \Delta f(s)\, ds.$$

Ha f harmonikus, akkor

$$f(\mathbf{w}(t)) - f(\mathbf{w}(0)) = \sum_i \int_0^t \frac{\partial}{\partial x_i} f(\mathbf{w}(s))\, dw_i(s).$$

A sztochasztikus integrálok lokális martingálok, így ha az f harmonikus, akkor az $X(t) \overset{\circ}{=} f(\mathbf{w}(t))$ folyamat lokális martingál.

Example

Ha $n = 3$, akkor az $f(x) = 1/\|x\| \triangleq 1/r$ függvény harmonikus az $\mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$ tartományon.

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial r}{\partial x_i} &= \frac{1}{2\sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}} 2x_i = \frac{x_i}{r}. \\
\frac{\partial f}{\partial x_i} &= -\frac{1}{r^2}\frac{\partial r}{\partial x_i} = -\frac{x_i}{r^3}. \\
\frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2} &= -\frac{1 \cdot r^3 - x_i 3r^2 \partial r / \partial x_i}{r^6} = -\frac{1 \cdot r^3 - x_i 3r^2 x_i / r}{r^6} = \\
&= -\frac{1 \cdot r^3 - x_i^2 3r}{r^6}. \\
\Delta f &\triangleq \sum_{i=1}^{3} \frac{\partial^2}{\partial x_i^2} f = -\frac{3r^3 - 3r\left(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2\right)}{r^6} = -\frac{3r^3 - 3r \cdot r^2}{r^6} = 0.
\end{aligned}
$$

Következésképpen az Itô-formula miatt az

$$\begin{aligned} M(t) &\overset{\circ}{=} \frac{1}{R(t)} \overset{\circ}{=} \frac{1}{\sqrt{w_1^2(t) + w_2^2(t) + w_3^2(t)}} = \\ &\overset{\circ}{=} f(w_1(t), w_2(t), w_3(t)) \end{aligned}$$

lokális martingál, ugyanis a másodrendű tagokat tartalmazó korrekciós tag az Itô-formulában a $\Delta f = 0$ miatt nulla. Ahhoz, hogy a példa kész legyen meg kell mutatni, hogy az M nem valódi martingál, de korlátos $L^2(\Omega)$-ban.

A lokális martingál korlátos a négyzetesen integrálható függvények körében

A koordináták függetlensége miatt a $(w_1(t), w_2(t), w_3(t))$ együttes sűrűségfüggvénye a normális eloszlás sűrűségfüggvénye alapján

$$\prod_{k=1}^{3} \frac{1}{\sqrt{2\pi t}} \exp\left(-\frac{x_k^2}{2t}\right)$$

Megmutatjuk, hogy

$$\begin{aligned} \mathbf{E}\left(M^2(t)\right) &\doteq \int_{\mathbb{R}^3} \frac{1}{\sum_k x_k^2} \frac{1}{\left(\sqrt{2\pi t}\right)^3} \exp\left(-\frac{1}{2}\sum_k \frac{x_k^2}{t}\right) d\lambda_3(\mathbf{x}) \leq \\ &\leq K < \infty, \end{aligned}$$

vagyis hogy az M folyamat az $L^2(\Omega)$ térben korlátos. Ha $\|\mathbf{x}\| \geq 1$ akkor az integrál felülről becsülhető az $\mathbf{P}(\|\mathbf{w}(t)\| \geq 1) \leq 1$ valószínűséggel. Ha $\|\mathbf{x}\| \leq 1$, akkor a $t \geq 1$ miatt az integranus második fele nem nagyobb mint $1/\left(\sqrt{2\pi}\right)^3$.

Korlátosság

Jelölje B az $\mathbb{R}^n$ tér egységgömbjét. Így elegendő megvizsgálni az $\int_B \|\mathbf{x}\|^{-\alpha} d\lambda_n$ típusú integrálok konvergenciáját. Legyenek n és α tetszőlegesek. .Az egyszerűség kedvéért feltesszük, hogy a norma a maximum norma.

$$G(k) \circeq \left\{1/2^{k+1} < \|x\| \leq 1/2^k\right\},$$

akkor

$$\begin{aligned}\int_B \frac{1}{\|x\|^\alpha} d\lambda_n &= \int_{B\setminus\{0\}} \frac{1}{\|x\|^\alpha} d\lambda_n = \\ &= \int_{\cup_k G(k)} \frac{1}{\|x\|^\alpha} d\lambda_n = \sum_k \int_{G(k)} \frac{1}{\|x\|^\alpha} d\lambda_n.\end{aligned}$$

Korlátosság

A szumma mögött álló integrál minden k-ra triviálisan véges. Mivel

$$2^k G(k) = G(0) = \{1/2 < \|x\| \leq 1\},$$

ezért a helyettesítéses integrálás koordinátánként alkalmazva n helyettesítés után

$$\begin{aligned} \int_{G(0)} \frac{1}{\|x\|^{\alpha}} d\lambda_n &= \int_{G(k)} \frac{1}{\|2^k x\|^{\alpha}} \left(2^k\right)^n d\lambda_n = \\ &= 2^{k(n-\alpha)} \int_{G(k)} \frac{1}{\|x\|^{\alpha}} d\lambda_n . \end{aligned}$$

Korlátosság

Amiből

$$\int_B \frac{1}{\|x\|^\alpha} d\lambda_n = \int_{G(0)} \frac{1}{\|x\|^\alpha} d\lambda_n \sum_{k=0}^{\infty} 2^{-k(n-\alpha)},$$

és ez utóbbi éppen akkor konvergens, ha $n > \alpha$. Mivel most $n = 3$ és $\alpha = 2$, ezért az integrál, miként állítottuk véges.

A végtelenben való viselkedés

Az $n = 3$ feltétel miatt a Wiener–folyamat nomája majdnem mindenhol végtelenhez tart, ezért $\lim_{t\to\infty} M(t) = 0$. Az L^2-korlátosság miatt a folyamat egyenletesen integrálható. Így a konvergencia nem csak majdnem mindenhol, hanem L^1-ben is teljesül, vagyis

$$\lim_{t\to\infty} \mathbf{E}(M(t)) = \lim_{t\to\infty} \|M(t)\|_1 = \left\| \lim_{t\to\infty} M(t) \right\|_1 = 0$$

ami ellentmond annak, hogy az M martingál, ugyanis ilyenkor a várható értéke konstans.

Az ellentmondás egyenletes integrálhatósággal

Egy másik megfontolás. Ha M martingál lenne és $t < s$, akkor

$$M(t) = \mathbf{E}(M(s) \mid \mathcal{F}_t).$$

A torony-szabályból következő

$$\begin{aligned}
\|\mathbf{E}(\xi \mid \mathcal{F}) - \mathbf{E}(\eta \mid \mathcal{F})\|_1 &\circeq \mathbf{E}(|\mathbf{E}(\xi - \eta \mid \mathcal{F})|) \leq \\
&\leq \mathbf{E}(\mathbf{E}(|\xi - \eta| \mid \mathcal{F})) = \\
&= \mathbf{E}(|\xi - \eta|) \circeq \|\xi - \eta\|
\end{aligned}$$

egyenlőtlenség miatt a feltételes várható érték az L^1-konvergencia szerint folytonos, így

$$\begin{aligned}
M(t) &= \lim_{s\to\infty} M(t) = \lim_{s\to\infty} \mathbf{E}(M(s) \mid \mathcal{F}_t) = \\
&= \mathbf{E}\left(\lim_{s\to\infty} M(s) \mid \mathcal{F}_t\right) = \mathbf{E}(0 \mid \mathcal{F}_t) = 0
\end{aligned}$$

lenne, ami ismét lehetetlen.

Az ellentmondás közvetlen igazolása

Az ellentmondás az egyenletes integrálhatóságra való hivatkozás nélkül is kicsikarható. Ha az M martingál lenne, akkor alkalmazható lenne az energiaazonosság. Így minden $t < s$ esetén

$$\|M(s) - M(t)\|^2 = \|M(s)\|^2 - \|M(t)\|^2 .$$

Ebből következően az $s \mapsto \|M(s)\|$ monoton növekedő lenne. Mivel korlátos, ezért a végtelenben konvergens lenne. Ebből következően az $(M(s))$ Cauchy-sorozat lenne, így az $L^2(\Omega)$ tér teljessége miatt a $\lim_{s\to\infty} M(s)$ határérték $L^2(\Omega)$-ban is létezne. Mivel minden L^2-ben konvergens sorozatnak van majdnem mindenhol konvergens részsorozata, amely sorozat határértéke, miként tudjuk, nulla, ezért az $L^2(\Omega)$-ban vett határérték szintén nulla. Így $\|M(t)\| \le \lim_{s\to\infty} \|M(s)\| = 0$, vagyis az M azonosan nulla lenne.