Sztochasztikus integrálás

A sztochasztikus folyamatok egyik legfontosabb fogalma

Medvegyev Péter
Matematika tanszék

2008

Sztochasztikus integrálás korlátos változású integrátor esetén

Ha a V integrátor trajektóriái korlátos változásúak, akkor a sztochasztikus integrál definíciója valójában nyilvánvaló. Ha minden trajektória egy jobbról reguláris és korlátos változású függvény, akkor minden ω kimenetel esetén a $\mu_\omega((a,b]) \stackrel{\circ}{=} V(b,\omega) - V(a,\omega)$ kifejezés egy mértéket definiál az $(a,b]$ alakú intervallumok halmazán. A mértékkiterjesztési tétel közvetlen alkalmazával ez a mérték kiterjeszthető a számegyenes Borel-mérhető halmazaira. Ha az X integrandus minden trajektóriája Borel-mérhető, akkor definálható az

$$(X \bullet V)(t,\omega) \stackrel{\circ}{=} \int_0^t X(s,\omega)\, d\mu_\omega(s)$$

integrál. Miként láttuk, ha az X integrátor progresszíven mérhető, akkor az így kapott $X \bullet V$ sztochasztikus folyamat adaptált lesz.

A balról reguláris integrandus és a közelítő összegek

Legyen az X integrandus balról reguláris. Ilyenkor az integrál minden véges intervallumon előállítható a

$$\sum_i X\left(t_{i-1}^{(n)}\right)\left(V\left(t_i^{(n)}\right)-V\left(t_{i-1}^{(n)}\right)\right)$$

alakú, úgynevezett Itô–Stieltjes közelítő összegek határértékeként. A fenti összeg valamely $(a,b]$ esetén felírható $\int_a^b X_n dV$ módon, ahol

$$X_n \stackrel{\circ}{=} \sum_i X\left(t_{i-1}^{(n)}\right)\chi\left(\left(t_{i-1}^{(n)}, t_i^{(n)}\right]\right).$$

Az X balról való folytonossága miatt ha $\lim_{n\to\infty}\max_i\left|t_i^{(n)}-t_{i-1}^{(n)}\right|=0$, akkor $X_n \to X$. A regularitás miatt az X egyes trajektóriái, minden véges intervallumon, korlátosak. A V által generált mérték szerint a véges szakaszok mértéke véges, így alkalmazható a majorált konvergencia tétele.

Itô–Stieltjes közelítő összegek határértéke

Lemma

Ha X tetszőleges reguláris folyamat, akkor az Itô–Stieltjes közelítő összegek határértéke mindig az

$$\int_a^b X(s-)\,dV(s) \stackrel{\circ}{=} \int_a^b X_-(s)\,dV(s)$$

integrál, ahol értelemszerűen a mínusz jel az X folyamat bal oldali határértékre utal.

Tekintsük az X ugrásaiból álló $\Delta X \stackrel{\circ}{=} X - X_-$ folyamatot.

Véges számú nagy ugrás

A reguláris függvények alapvető tulajdonsága, hogy tetszőleges véges szakaszon a függvény egy adott $c > 0$ konstansnál nagyobb nagyságú ugrásainak száma mindig véges: Legyen (t_n) egy olyan végtelen sorozat, amelyre $|(\Delta X)(t_n)| \geq c$. A szakasz végessége miatt feltehető, hogy a (t_n) sorozat monoton és konvergens. De a bal oldali határérték definíciója miatt feltehető, hogy van egy olyan $s_n < t_n$ sorozat, amelyre

$$|X(t_n) - X(s_n)| \geq c/2 > 0.$$

Ha a (t_n) monoton nő, akkor az (s_n) választható monoton növekedőnek, ha a (t_n) csökken, akkor az (s_n) szintén választható csökkenőnek, illetve az is feltehető, hogy az (s_n)-nek létezik határértéke és ez a határérték azonos a (t_n) határértékével. Ez azonban a trajektóriák regularitása miatt ellentmond a fenti sornak.

A nagy ugrások integrálja nulla

Ha $(u_i)_{i=1}^N$ a c-nél nagyobb ugrások halmaza, akkor a V jobbról való folytonossága, illetve a nagy ugrások számának végessége miatt

$$\sum_i \Delta X\left(u_{i-1}\right)\left(V\left(t_i^{(n)}\right)-V\left(t_{i-1}^{(n)}\right)\right) \to 0$$

ugyanis az összeg valamely tagja csak akkor nem nulla, ha $t_{i-1}^{(n)} = u_{i-1}$ és a jobbról való folytonosság miatt $V\left(t_i^{(n)}\right) - V\left(u_{i-1}\right) \to 0$.

A kis ugrások integrálja

Ebből következően feltehető, hogy $|\Delta X| \leq c$. De így minden trajekóriára

$$\left|\sum_i \left(X\left(t_{i-1}^{(n)}\right) - X_-\left(t_{i-1}^{(n)}\right)\right)\left(V\left(t_i^{(n)}\right) - V\left(t_{i-1}^{(n)}\right)\right)\right| =$$

$$= \left|\sum_i \Delta X\left(t_{i-1}^{(n)}\right)\left(V\left(t_i^{(n)}\right) - V\left(t_{i-1}^{(n)}\right)\right)\right| \leq$$

$$\leq c\mathrm{Var}\left(V\right)\left(t\right).$$

Mivel a c választható tetszőlegesen kicsinek a $\sum_i X\left(t_{i-1}^{(n)}\right)\left(V\left(t_i^{(n)}\right) - V\left(t_{i-1}^{(n)}\right)\right)$ közelítő összeg határértéke megegyezik az $\sum_i X_-\left(t_{i-1}^{(n)}\right)\left(V\left(t_i^{(n)}\right) - V\left(t_{i-1}^{(n)}\right)\right)$ közelítő összegek határértékével. Mivel az X_- folyamat balról regularizált, a közelítő összegek határértéke éppen az $X_- \bullet V$ sztochasztikus integrál.

A keresztvariáció definíciója

Definition

Ha minden

$$0 = t_0^{(n)} < t_1^{(n)} < \ldots < t_m^{(n)} < \ldots$$

partíció sorozatra, amelyre

$$\lim_{n \to \infty} \max_i \left| t_i^{(n)} - t_{i-1}^{(n)} \right| = 0$$

és minden t-re az

$$\sum_i \left(X\left(t_i^{(n)} \wedge t \right) - X\left(t_{i-1}^{(n)} \wedge t \right) \right) \left(Y\left(t_i^{(n)} \wedge t \right) - Y\left(t_{i-1}^{(n)} \wedge t \right) \right)$$

sorozat határértéke létezik, akkor az így kapott határértéket az X és az Y folyamatok kvadratikus keresztvariációjának mondjuk és $[X, Y]$ módon fogjuk jelölni. Ha $X = Y$, akkor az X kvadratikus variációjáról beszélünk. A kvadratikus variációt $[X]$ módon fogjuk jelölni.

A parciális integrálás formulája

Theorem

Ha X és Y véges változású és jobbról reguláris folyamatok, akkor tetszőleges $a < b$ időpontok esetén

$$X(b)\,Y(b) - X(a)\,Y(a) =$$

$$= \int_a^b X_- dY + \int_a^b Y_- dX + [X, Y](b) - [X, Y](a).$$

A formulából természetesen az is kiderül, hogy amennyiben X és Y véges változású folyamatok, akkor a keresztvariációkból álló $[X, Y]$ folyamat értelmes. Lényegében ez az állítás fő mondanivalója.

A parciális integrálás formulája

Az egyenlőségben szereplő sztochasztikus integrálok éppen a

$$\sum_i X\left(t_{i-1}^{(n)}\right)\left(Y\left(t_i^{(n)}\right)-Y\left(t_{i-1}^{(n)}\right)\right),$$

illetve az

$$\sum_i Y\left(t_{i-1}^{(n)}\right)\left(X\left(t_i^{(n)}\right)-X\left(t_{i-1}^{(n)}\right)\right)$$

közelítő összegek határértékei. Ha felírjuk az $[X, Y]$ keresztvariációt definiáló közelítő

$$\sum_i \left(X\left(t_i^{(n)}\right)-X\left(t_{i-1}^{(n)}\right)\right)\left(Y\left(t_i^{(n)}\right)-Y\left(t_{i-1}^{(n)}\right)\right)$$

összegeket, akkor elemi számolással látható, hogy a jobb oldalt közelítő összegek összegei a bal oldalon álló kifejezésre egyszerűsödnek. Mivel a bal oldal kontans, és a két integrál létezik ezért a keresztvariáció is létezik és a formula triviálisan teljesül.

A keresztvariáció elemi tulajdonságai

Nyilvánvalóan

1. $[X, Y] = [Y, X]$
2. $[aX_1 + bX_2, Y] = a[X_1, Y] + b[X_2, Y]$.
3. $[X, X] \geq 0$ és monoton nő.

Véges változású és folytonos folyamatok keresztvariációja

Example

Ha az X folyamat folytonos az Y folyamat pedig véges változású, akkor $[X, Y] = 0$.

Ez a rendkívül gyakran használt összefüggés triviális következménye annak, hogy a

$$\left|\sum a_i b_i\right| \leq \max_i |a_i| \sum_i |b_i|$$

becslés miatt a

$$\max_i \left| X\left(t_i^{(n)} \wedge t\right) - X\left(t_{i-1}^{(n)} \wedge t\right)\right| \sum_i \left| Y\left(t_i^{(n)} \wedge t\right) - Y\left(t_{i-1}^{(n)} \wedge t\right)\right|$$

triviálisan a keresztvariációt közelítő összeg felső becslése. Az Y véges változású, így az összeg definíció szerint felülről becsülhető a $\mathrm{Var}\,(Y)\,(t) < \infty$ értékkel. De az X folytonos, így a $[0, t]$ szakaszon egyenletesen folytonos, így a maximumot tartalmazó kifejezés minden trajektóriára nullához tart. Következésképpen $[X, Y] = 0$.

Véges változású folyamatok keresztvariációja

Example

Ha az X és az Y folyamat véges változású és jobbról reguláris, akkor $[X, Y] = \sum \Delta X \Delta Y$, vagyis a keresztvariáció éppen az ugrások összege.

Az egyenlőség igazolásához feltehetjük, hogy az X és az Y tiszta ugró függvények. Ha például $X = X^c + X^d$ az X felbontása folytonos és ugró részre, akkor a keresztvariáció linearitása miatt

$$[X, Y] = \left[X^c + X^d, Y\right] = [X^c, Y] + \left[X^d, Y\right] = \left[X^d, Y\right],$$

illetve hasonlóan eljárva az Y esetében

$$[X, Y] = \left[X^d, Y^c + Y^d\right] = \left[X^d, Y^d\right].$$

Véges változású folyamatok keresztvariációja

Tiszta ugró függvényekre felírva a parciális integrálás formuláját, kihasználva, hogy valamely pont mértéke éppen a pontban való ugrás nagysága

$$\begin{aligned} \int_a^b X_- dY &= \sum X_-(s)\,\Delta Y(s) \\ \int_a^b Y_- dX &= \sum Y_-(s)\,\Delta X(s)\,. \end{aligned}$$

Véges változású folyamatok keresztvariációja

Ha első összeghez hozzáadjuk a $\sum \Delta X(s) \Delta Y(s)$ kifejezést és kiemeljük a ΔY-t akkor az

$$\sum X(s) \Delta Y(s)$$

összeget kapjuk. Ha ehhez hozzáadjuk a második integrált, akkor az

$$\sum (X(s) Y(s) - Y_{-}(s) X_{-}(s)) = \sum \Delta (YX)(s)$$

összeghez jutunk. Mivel az X és az Y tiszta ugrófüggvények, ezért az összeg éppen a parciális integrálási formulában szereplő $X(b) Y(b) - X(a) Y(a)$ kifejezésre egyszerűsödik. Érdemes hangsúlyozni, hogy mivel feltettük, hogy az X és az Y folyamatok véges megváltozásúak, ezért a fenti számolásban szereplő összegek abszolút konvergensek voltak, így a sorok összege független volt a sorrendtől és általában a szokásos véges öszegekre megszokott szabályok érvényesek maradtak

Korlátos integrandus esetén az integrál martingál

Theorem

Ha a V integrátor martingál és a $\mathrm{Var}\,(V)\,(\infty)$ változó integrálható, vagyis ha $\mathbf{E}\,(\mathrm{Var}\,(V)\,(\infty)) < \infty$, akkor tetszőleges korlátos, balról folytonos és adaptált X integrandus esetén az $X \bullet V$ sztochasztikus integrál martingál.

Tegyük fel tehát, hogy a V integrálható változású martingál. Legyen

$$0 = t_0^{(n)} < t_1^{(n)} < \ldots < t_m^{(n)} < \ldots$$

az $\mathbb{R}_+$ időegyenes egy felbontása. Tekintsük az

$$Y_n\,(t) \circeq \sum_i X\left(t_{i-1}^{(n)}\right)\left(V\left(t_i^{(n)} \wedge t\right) - V\left(t_{i-1}^{(n)} \wedge t\right)\right)$$

alakú közelítő integrálfüggvényeket.

Korlátos integrandus esetén az integrál martingál

Emlékeztetünk. hogy az $a \wedge b$ jel az a és a b számok közül a kisebbet jelöli, így az $Y_n(t)$ a $(0, t]$ szakaszba eső osztópontokra való összegzést adja meg. Megmutatjuk, hogy az Y_n martingál. Vegyük észre, hogy a V jobbról való regularitása miatt a V trajektóriái jobbról regulárisak, így csak a martingálegyenlőséget kell igazolni. Ha $s < t$, akkor

$$\mathbf{E}\left(Y_n(t) \mid \mathcal{F}_s\right) = Y_n(s) + \mathbf{E}\left(Z(s,t) \mid \mathcal{F}_s\right),$$

ahol

$$Z(s,t) \triangleq \sum_{s < t_{i-1}^{(n)} \leq t} X\left(t_{i-1}^{(n)}\right)\left(V\left(t_i^{(n)} \wedge t\right) - V\left(t_{i-1}^{(n)} \wedge t\right)\right).$$

Mivel egy véges összegről van szó elegendő belátni, hogy az összeg minden egyes tagjának feltételes várható értéke nulla.

Korlátos integrandus esetén az integrál martingál

A feltételes várható érték elemi tulajdonságai alapján, felhasználva, hogy $s < t_{i-1}^{(n)}$, így $\mathcal{F}_s \subseteq \mathcal{F}_{t_{i-1}^{(n)}}$

$$\mathbf{E}\left(X\left(t_{i-1}^{(n)}\right)\left(V\left(t_i^{(n)} \wedge t\right) - V\left(t_{i-1}^{(n)} \wedge t\right)\right) \mid \mathcal{F}_s\right) =$$

$$= \mathbf{E}\left(\mathbf{E}\left(X\left(t_{i-1}^{(n)}\right)\left(V\left(t_i^{(n)} \wedge t\right) - V\left(t_{i-1}^{(n)}\right)\right) \mid \mathcal{F}_{t_{i-1}^{(n)}}\right) \mid \mathcal{F}_s\right) =$$

$$= \mathbf{E}\left(X\left(t_{i-1}^{(n)}\right)\mathbf{E}\left(V\left(t_i^{(n)} \wedge t\right) - V\left(t_{i-1}^{(n)}\right) \mid \mathcal{F}_{t_{i-1}^{(n)}}\right) \mid \mathcal{F}_s\right) =$$

$$= \mathbf{E}\left(X\left(t_{i-1}^{(n)}\right) 0 \mid \mathcal{F}_s\right) = 0.$$

Korlátos integrandus esetén az integrál martingál

Minden egyszerűsége ellenére a fenti számolás a sztochasztikus folyamatok elméletének egyik kulcs számolása. Világos, hogy az $X\left(t_{i-1}^{(n)}\right)$ korlátosságát kihasználtuk. Egyrészt ott, hogy a szorzat feltételes várható értéke értelmes, másrészt a kiemelési szabály használatakor. A V martingál tulajdonsága miatt a $V\left(t_i^{(n)} \wedge t\right) - V\left(t_{i-1}^{(n)} \wedge t\right)$ biztosan integrálható, de ha az X nem lenne korlátos, akkor az egész fenti gondolatmenetben szereplő feltételes várható értékek könnyen értelmetlenek lehetnének. Világos az is, hogy az utolsó sorban kihasználtuk, hogy a V martingál ugyanis ezért lesz az $\mathcal{F}_{t_{i-1}^{(n)}}$ szerinti feltételes várható érték nulla.

Korlátos integrandus esetén az integrál martingál

Ha $n \to \infty$ esetén

$$\sup_i \left| t_i^{(n)} - t_{i-1}^{(n)} \right| \to 0,$$

akkor a már említett gondolatmenet miatt minden (t, ω) esetén $Y_n(t, \omega) \to (X \bullet V)(t, \omega)$. A probléma csak az, hogy a határérték és a feltételes várható érték felcserélhető-e? Mivel a feltételek miatt triviálisan

$$|Y_n(t)| \leq \sup |X| \cdot \mathrm{Var}(V)(\infty) \in L^1(\Omega),$$

ezért a feltételes várható értékre alkalmazható a majorált konvergencia tétele, így

$$\begin{aligned} \mathbf{E}((X \bullet V)(t) \mid \mathcal{F}_s) &= \mathbf{E}\left(\lim_{n\to\infty} Y_n(t) \mid \mathcal{F}_s\right) = \\ &= \lim_{n\to\infty} \mathbf{E}(Y_n(t) \mid \mathcal{F}_s) = \\ &= \lim_{n\to\infty} Y_n(s) = (X \bullet V)(s). \end{aligned}$$

Ami éppen a bizonyítandó tulajdonság.

Független Poisson-folyamatok közös ugrásai

Legyenek X és Y egy közös $\mathcal{F}$ filtrációra nézve Poisson-folyamatok. Jelölje M és N a megfelelő exponenciális martingálokat. A parciális integrálási formula szerint

$$MN - 1 = M_- \bullet N + N_- \bullet M + [M, N].$$

Vegyük észre, hogy tetszőleges véges intervallumon az M_- és az N_- korlátosak. Ugyancsak véges szakaszokon a trajektóriák variációjából álló $\mathrm{Var}(M)$ és $\mathrm{Var}(N)$ folyamatoknak van integrálható majoránsa. Ebből következően a sztochasztikus integrálok martingálok. Várható értéket véve

$$\mathbf{E}(M(t)N(t)) - 1 = \mathbf{E}([M, N](t)).$$

A kvadratikus keresztvariáció nulla

Érdemes hangsúlyozni, hogy a sztochasztikus integrálok martingál tulajdonságának igazolásához szükséges, hogy az integrandus és az integrátor ugyanarra a filtrációra nézve legyen adaptált. Ezt biztosítja a feltétel, hogy az X és az Y egy közös filtrációra nézve alkot Poisson-folyamatot. Ha az X és Y folyamatoknak nincsen közös ugrása, akkor a Fourier-transzformáltak idő szerinti folytonossága miatt az M és N exponenciális martingáloknak sincsen közös ugrása. Mivel az M és az N trajektóriái korlátos változásúak és véges szakaszokon a Poisson-folyamatoknak csak véges számú ugrása van és az ugrások között az M és az N trajektóriái deriválhatóak, ezért

$$[M, N](t) = \sum_{s} \Delta M(s) \Delta N(s) = 0.$$

A közös Fourier-transzformáció szorzat alakra bomlik

Ebből következően, ha egy valószínűséggel a két folyamatnak nincsen közös ugrása, akkor

$$\mathbf{E}(M(t)N(t)) = 1.$$

A Fourier-transzformáltakkal átszorozva

$$\mathbf{E}(\exp(iuX(t) + ivY(t))) = \mathbf{E}(\exp(iuX(t))) \cdot \mathbf{E}(\exp(ivY(t))),$$

vagyis az együttes Fourier-transzformált az egyedi Fourier-transzformáltak szorzatára bomlik. Következésképpen, ha az X-nek és az Y-nak a $[0, t]$ szakaszon egy valószínűséggel nincsen közös ugrása, akkor az $X(t)$ és az $Y(t)$ független.

A fordított irány, a kvadratikus variáció várható értéke nulla

Megfordítva, megmutatjuk, hogy ha az $X(t)$ és az $Y(t)$ függetlenek, akkor az együttes Fourier-transzformáltak szorzat alakra bomlanak. Az egyszerűség kedvéért nem a Fourier-transzformáltakkal, hanem a Laplace-transzformáltakkal írjuk fel az exponenciális martingálokat:

$$M(s,u) \overset{\circ}{=} \frac{\exp(-sX(u))}{\mathbf{E}(\exp(-sX(u)))}$$

$$N(s,u) \overset{\circ}{=} \frac{\exp(-sY(u))}{\mathbf{E}(\exp(-sY(u)))}$$

Ekkor a sztochasztikus integrálok ismét martingálok és a függetlenség miatt

$$\mathbf{E}(M(t)N(t)) = \mathbf{E}(M(t)) \cdot \mathbf{E}(N(t)) = 1$$

következésképpen a fenti gondolatmenet megismétlésével

$$\mathbf{E}([M,N](t)) = 0.$$

Nincsen közös ugrás

Könnyen látható, hogy például

$$\Delta M(s,r) = \frac{\exp(-sX(r)) - \exp(-sX(r-))}{\mathbf{E}(\exp(-sX(r)))} \leq 0$$

Így a közös ugrások szorzata nem negatív, így az ugrások szorzatának összegének várható értéke csak akkor lehet nulla, ha az X és Y folyamatoknak egy valószínűséggel nincsen közös ugrása.

A közös filtráció feltétele fontos

A bemutatottakkal kapcsolatban két megjegyzést teszünk:

1. Ha az X Poisson-folyamat ugrásainak időpontja (σ_n) és az Y ugrásainak időpontja $(2\sigma_n)$, akkor könnyen látható, hogy nincsen közös ugrásuk, de nem is függetlenek. Ugyanakkor nem is lesznek egy közös filtrációra nézve egyszerre Poisson-folyamatok.

2. Érdemes hangsúlyozni, hogy csak az $X(t)$ és $Y(t)$ változók függetlenségét igazoltuk és nem igazoltuk az X és az Y folyamatok függetlenségét. Az X és Y folyamatokat, definíció szerint, függetlennek mondjuk, ha tetszőleges módon választva a $(t_i)_{i=1}^{N}$ és az $(s_j)_{j=1}^{M}$ időpontokat az $(X(t_i))_i$ vektor független az $(Y(s_j))_j$ vektortól. Emlékeztetünk, hogy ez utóbbi azt jelenti, hogy a két vektor által generált két σ-algebra független. A gondolatmenet némi kiterjesztésével megmutatható, hogy az ugrások egy valószínűséggel való diszjunktsága szükséges és elegendő feltétele a folyamatok függetlenségének.

Az integrál definíciója

Definition (Itô–Stieltjes-integrál)

Legyen X sztochasztikus folyamat és minden

$$a = t_0^{(n)} < t_1^{(n)} < \ldots < t_{m_n}^{(n)} = b$$

felosztáshoz rendeljük hozzá az

$$I_n \mathrel{\mathring{=}} \sum_k X\left(t_{k-1}^{(n)}\right)\left(Y\left(t_k^{(n)}\right) - Y\left(t_{k-1}^{(n)}\right)\right)$$

Itô–Stieltjes közelítő összeget. Ha létezik olyan ζ valószínűségi változó, hogy minden olyan felosztásra, amelyre $\lim_{n\to\infty} \max_k \left(t_k^{(n)} - t_{k-1}^{(n)}\right) = 0$ a közelítő összegek sorozatára sztochasztikus konvergenciában $\lim_{n\to\infty} I_n = \zeta$, akkor ezt a közös ζ határértéket az X folyamat Y szerinti Itô–Stieltjes-integráljának mondjuk, és $\int_a^b XdY$ módon jelöljük.

Martingál transzformáció

Lemma (Martingáltranszformáció)

Legyen M az $\mathcal{F}$ filtrációra nézve diszkrét idejű martingál, X az $\mathcal{F}$-re nézve adaptált folyamat. Ha az

$$X_{k-1} \cdot (M_k - M_{k-1})$$

kifejezések integrálhatóak, akkor a

$$Z_0 \stackrel{\circ}{=} 0, \quad Z_n \stackrel{\circ}{=} \sum_{k=1}^{n} X_{k-1} \cdot (M_k - M_{k-1})$$

sorozat nulla várható értékkel rendelkező martingál. Speciálisan, ha X egyenletesen korlátos és M tetszőleges martingál, akkor a Z is martingál.

Martingál transzformáció

Kihasználva, hogy a feltétel szerint az $X_{k-1} \cdot (M_k - M_{k-1})$ integrálható, a kiemelési szabály és a teljes várható érték tétele szerint, ha $k - 1 \geq m$ tetszőleges n-re

$$\mathbf{E}\left(X_{k-1}\chi\left(|X_{k-1}| \leq n\right)(M_k - M_{k-1}) \mid \mathcal{F}_m\right) =$$
$$= \mathbf{E}\left(\mathbf{E}\left(X_{k-1}\chi\left(|X_{k-1}| \leq n\right)(M_k - M_{k-1}) \mid \mathcal{F}_{k-1}\right) \mid \mathcal{F}_m\right) =$$
$$= \mathbf{E}\left(X_{k-1}\chi\left(|X_{k-1}| \leq n\right)\mathbf{E}\left((M_k - M_{k-1}) \mid \mathcal{F}_{k-1}\right) \mid \mathcal{F}_m\right) =$$
$$= \mathbf{E}\left(X_{k-1}\chi\left(|X_{k-1}| \leq n\right) \cdot 0 \mid \mathcal{F}_m\right) = 0.$$

Mivel a feltétel szerint használhatjuk a majorált konvergencai tételét, így

$$\mathbf{E}\left(X_{k-1}\left(M_k - M_{k-1}\right) \mid \mathcal{F}_m\right) = 0,$$

amiből a lemma igazolása már evidens.

Energiaazonosság

Lemma

Legyen X egy martingál és tegyük fel, hogy minden t időpontra az $X(t)$ négyzetesen integrálható. Ha $s < t$, akkor

$$\mathbf{E}\left((X(t) - X(s))^2\right) = \mathbf{E}\left(X^2(t)\right) - \mathbf{E}\left(X^2(s)\right).$$

A két oldal eltérése $d \stackrel{\circ}{=} 2 \cdot \mathbf{E}(X(s) \cdot (X(s) - X(t)))$. Ha $s < t$, akkor a martingál tulajdonság miatt

$$\begin{aligned} d_n &\stackrel{\circ}{=} 2 \cdot \mathbf{E}(X(s)\chi(|X(s)| \leq n) \cdot (X(s) - X(t))) = \\ &= 2 \cdot \mathbf{E}(\mathbf{E}(X(s)\chi(|X(s)| \leq n) \cdot (X(s) - X(t)) \mid \mathcal{F}_s)) = \\ &= 2 \cdot \mathbf{E}(X(s)\chi(|X(s)| \leq n) \cdot \mathbf{E}(X(s) - X(t) \mid \mathcal{F}_s)) = \\ &= 2 \cdot \mathbf{E}(X(s)\chi(|X(s)| \leq n) \cdot 0) = 0. \end{aligned}$$

Energiaazonosság

Mivel $X(s), X(t) \in L^2(\Omega)$ ezért az $|X(s) \cdot (X(s) - X(t))|$ integrálható. Így a majorált konvergencia tétele alkalmazható mind a két oldalon és

$$d = \lim_{n \to \infty} d_n = 0.$$

A négyzetesen integrálható martingálok definíciója

Definition

Emlékeztetünk, hogy az $M \in \mathcal{H}^2$ azt jelenti, hogy az M olyan martingál, amelyre az $\|M(t)\|_2$ $L^2(\Omega)$-norma a t időparaméter szerint korlátos.

Example

Ha w Wiener-folyamat, akkor minden véges szakaszon w eleme a $\mathcal{H}^2$ térnek, de a teljes időtengelyen $w \notin \mathcal{H}^2$.

Emlékeztetünk, hogy ha $p > 1$, akkor az $L^p(\Omega)$ térben korlátos halmazok egyenletesen integrálhatóak. Ebből következően a $\mathcal{H}^2$-martingálok az egyenletesen integrálható martingálok egy speciális részhalmazát alkotják.

Sztochasztikus integrálok létezése

Theorem

Ha az X adaptált sztochasztikus folyamat az $[a, b]$ véges szakaszon majdnem minden ω-ra folytonos és $M \in \mathcal{H}^2$, akkor az X az $[a, b]$-én M szerint Itô–Stieltjes-integrálható.

Az egyszerűség kedvéért tegyük fel, hogy az X minden kimenetelre folytonos.

A közelítő összeg szórásának becslése

Tegyük fel, hogy $|X| \leq K$ és legyen $\left(t_k^{(n)}\right)_k$ az $[a, b]$ szakasz felbontása. Az előző lemma alapján az integrálközelítő összegek

$$I_n \stackrel{\circ}{=} \sum_k X\left(t_{k-1}^{(n)}\right)\left(M\left(t_k^{(n)}\right) - M\left(t_{k-1}^{(n)}\right)\right)$$

sorozat martingál, így a sorozat tagjainak várható értéke nulla. A bizonyítás kulcsa, hogy

$$\|I_n\|_2^2 = \mathbf{D}^2\left(I_n\right) \leq K^2 L,$$

ahol az L rögzített, X-től nem függő determinisztikus konstans.

A közelítő összeg szórásának becslése

Az energiaazonosság alapján

$$\left\| I_n \right\|_2^2 = \sum_k \left\| X\left(t_{k-1}^{(n)}\right)\left(M\left(t_k^{(n)}\right) - M\left(t_{k-1}^{(n)}\right)\right)\right\|_2^2 .$$

Az energiaazonosság újabb alkalmazásával

$$\begin{aligned}
\left\| I_n \right\|_2^2 &= \sum_k \left\| X\left(t_{k-1}^{(n)}\right)\left[M\left(t_k^{(n)}\right) - M\left(t_{k-1}^{(n)}\right)\right]\right\|_2^2 \leq \\
&\leq K^2 \sum_k \left\| M\left(t_k^{(n)}\right) - M\left(t_{k-1}^{(n)}\right)\right\|_2^2 = \\
&= K^2 \sum_k \left(\left\| M\left(t_k^{(n)}\right)\right\|_2^2 - \left\| M\left(t_{k-1}^{(n)}\right)\right\|_2^2 \right) = \\
&= K^2 \left(\left\| M(b) \right\|_2^2 - \left\| M(a) \right\|_2^2 \right) \stackrel{\circ}{=} K^2 L.
\end{aligned}$$

A folytonossági modulus

A sztochasztikus konvergenciában minden Cauchy–sorozat konvergens, ezért az integrál konvergenciájának belátásához elegendő megmutatni, hogy az integrálközelítő összegek (I_n) sorozata sztochasztikusan Cauchy-sorozat. Az X trajektóriái folytonosak, vagyis az $[a, b]$ véges szakaszon egyenletesen is folytonosak, ezért ha $\delta \to 0$, akkor tetszőleges ω kimenetelre az

$$U(\omega, \delta) \overset{\circ}{=} \sup_{|t-s| \leq \delta} |X(t, \omega) - X(s, \omega)|$$

folytonossági modulus nullához tart. Könnyen látható, hogy az U kiszámolásakor elegendő a racionális időpontokat venni, így az U mérhető.

A közös finomítás

Tekintsük az I_n és I_m integrálokhoz tartozó felosztások közös finomítását. Világos, hogy az $I_n - I_m$ felírható

$$\sum_i \left(X\left(s_i\right) - X\left(v_i\right)\right)\left(M\left(u_{i+1}\right) - M\left(u_i\right)\right)$$

módon, ahol az $\left(u_i\right)$ az $[a, b]$ egy partíciója és minden i-re $s_i, v_i \leq u_i$. Világos, hogy az így kapott összeg szintén martingál és az $L^2\left(\Omega\right)$ normájára igaz a korábban bemutatott becslés. (A K persze az $\left|X\left(s_s\right) - X\left(v_i\right)\right|$ közül a legnagyobb.) Az I_n és az I_m közelítő összegekhez tartozó partíciókat elég finomra véve az s_i és a v_i tetszőlegesen közel kerülhet egymáshoz.

A folytonossági modulus nullához tart

A pontonkénti konvergenciából következik a sztochasztikus konvergencia, ezért tetszőleges $\tau, \varepsilon > 0$ számokhoz található olyan A halmaz és $\delta > 0$ szám, hogy $\mathbf{P}(A^c) < \tau$, és ha $\omega \in A$, akkor $U(\omega, \delta) < \varepsilon$. Mivel az $[a, b]$ intervallum felosztása végtelenül finomodik, ezért tetszőleges $\alpha > 0$ számra, elegendően nagy n, m indexekre a Csebisev–egyenlőtlenség miatt

$$\mathbf{P}(|I_n - I_m| > \alpha) \leq \mathbf{P}(A^c) + \mathbf{P}(A \cap \{|I_n - I_m| > \alpha\}) \leq \tau + \frac{\varepsilon^2 L}{\alpha^2}.$$

A jobb oldali kifejezés az ε és a τ megválasztásával tetszőlegesen kicsivé tehető, így az (I_n) sztochasztikusan Cauchy–sorozat.

A folytonossági modulus trajektóriánkénti meghatározása

Megjegyezzük azonban, hogy a bizonyítás pontatlan, ugyanis az $X\chi_A$ függvényhez rendelt lépcsős folyamatra nem alkalmazható a korábbi becslés, ugyanis az így „csonkolt” folyamat nem feltétlenül adaptált! A gondolatmenet azonban könnyen pontosítható. Ha $U(u,\omega,\delta)$ jelöli az $[a,u]$ szakaszon vett folytonossági modulust, akkor evidens módon az $(u,\omega)\mapsto U(u,\omega,\delta)$ folytonos trajektóriájú adaptált folyamat. Ha

$$\tau(\omega) \circeq \inf\{u : U(u,\omega,\delta) \geq \varepsilon\} \wedge b,$$

akkor a τ megállási idő. Ha $\omega \in A$, akkor $\tau(\omega) = b$, így az A halmazon $I_n^\tau - I_m^\tau = I_n - I_m$ és elegendő az A halmazon való „csonkolás” helyett az X^τ megállított folyamatra alkalmazni a becslést és a

$$\begin{aligned} \mathbf{P}(|I_n - I_m| > \alpha) &\leq \mathbf{P}(A^c) + \mathbf{P}(A \cap \{|I_n - I_m| > \alpha\}) \leq \\ &\leq \tau + \mathbf{P}(|I_n^\tau - I_m^\tau| > \alpha) \end{aligned}$$

egyenlőtlenséget.

Lokális martingál, lokalizáció

Definition

Valamely L folyamatot lokális martingálnak mondunk, ha megadható olyan megállási időkből álló (τ_n) úgynevezett lokalizációs sorozat, amelyre $\tau_n \nearrow \infty$ és az L^{τ_n} megállított folyamatok mindegyike martingál. Hasonlóan egy L folyamat lokálisan négyzetesen integrálható martingál, ha megadható olyan $\tau_n \nearrow \infty$ lokalizációs sorozat, amelyre az L^{τ_n} négyzetesen integrálható martingál, vagyis amelyre $L^{\tau_n} \in \mathcal{H}^2$ minden n-re. A lokális martingálokat $\mathcal{M}_{\text{loc}}$ a lokálisan négyzetesen integrálható martingálokat $\mathcal{H}^2_{\text{loc}}$ módon szokás jelölni.

Example

Ha w egy Wiener-folyamat, akkor a teljes időtengelyen $w \notin \mathcal{H}^2$, de $w \in \mathcal{H}^2_{\text{loc}}$.

Lokális martingál, lokalizáció

Theorem

Ha az X adaptált sztochasztikus folyamat az $[a, b]$ véges szakaszon majdnem minden ω-ra folytonos és az M lokálisan négyzetesen integrálható martingál, akkor az X az $[a, b]$-én az M szerint Itô–Stieltjes-integrálható.

Elegendő az előző állítás bizonyítását úgy módosítani, hogy az M helyett M^{τ_n}-et írunk és felhasználjuk, hogy a lokalizáció definíciója alapján tetszőleges $\varepsilon > 0$ számhoz ha n elég nagy akkor $\tau_n \geq b$ egy ε valószínűségű halmaztól eltekintve. Másképpen ha n elég nagy akkor egy tetszőlegesen kicsi valószínűségű halmaztól eltekintve az $[a, b]$ szakaszon az M és az M^{τ_n} egybeesik.

Folytonos lokális martingál négyzetesen integrálható

Theorem

Ha M folytonos lokális martingál, X folytonos adaptált folyamat, akkor az

$$\int_a^b XdM$$

sztochasztikus integrál létezik.

Legyen

$$\tau_n \mathrel{\hat{=}} \inf\{t : |M(t)| \geq n\}.$$

Az M folytonossága miatt $|M^{\tau_n}| \leq n$, vagyis az M lokálisan korlátos, így nyilván lokálisan négyzetesen integrálható, következésképpen alkalmazható az előző állítás.

A sztochasztikus integrálás eredménye lokális martingál

Theorem

Tegyük fel, hogy teljesülnek a szokásos feltételek. Ha az X folytonos valamint adaptált folyamat és az M lokálisan négyzetesen integrálható martingál, akkor létezik olyan folytonos lokális martingál, amelyet $X \bullet M$-mel fogunk jelölni, amelyre tetszőleges t esetén

$$(X \bullet M)(t) \stackrel{m.m.}{=} \int_0^t X dM.$$

Ha az X egyenletesen korlátos és az M négyzetesen integrálható, akkor az $X \bullet M$ nem csak lokális martingál lesz, hanem martingál is.

Szemimartingálok

Definition

Ha az S folyamat felbontható $S = S(0) + L + V$ módon, ahol az L lokálisan négyzetesen integrálható martingál és a V véges változású adaptált folymat, akkor az S folyamatot szemimartingálnak mondjuk.

Theorem

Ha az X adaptált sztochasztikus folyamat az $[a, b]$ véges szakaszon majdnem minden ω-ra folytonos és az S szemimartingál, akkor az X az $[a, b]$-én az S szerint Itô–Stieltjes-integrálható.

Parciális integrálás formulája

A sztochasztikus integrált csak folytonos integrandus esetén értelmeztük, ezért fel kell tételezni, hogy a formulában szereplő két folyamat folytonos szemimartingál.

Theorem (Parciális integrálás)

Ha X és Y folytonos szemimartingálok, akkor tetszőleges t időpont esetén

$$X(t)\,Y(t) - X(0)\,Y(0) = \int_0^t X dY + \int_0^t Y dX + [X, Y](t),$$

ahol $[X, Y]$ a két szemimartingál kvadratikus keresztvariációja. A keresztvariáció a t időpontban az

$$\sum_i \left(X\left(t_{i+1}^{(n)} \wedge t\right) - X\left(t_i^{(n)} \wedge t\right)\right)\left(Y\left(t_{i+1}^{(n)} \wedge t\right) - Y\left(t_i^{(n)} \wedge t\right)\right)$$

szorzatösszeg sztochasztikus konvergenciában vett határértéke.

A Wiener-folyamat kvadratikus variációja

Example

A Wiener-folyamat kvadratikus variációja a $[0, t]$ intervallumon éppen t.

Legyen w egy Wiener-folyamat és legyen $\left(t_k^{(n)}\right)$ az $[a, b]$ szakasz egy partíciója. Ha $\Delta w\left(t_k^{(n)}\right) \stackrel{\circ}{=} w\left(t_k^{(n)}\right) - w\left(t_{k-1}^{(n)}\right)$, akkor a Wiener-folyamat definíciója alapján

$$\mathbf{E}\left(\sum_k \left(\Delta w\left(t_k^{(n)}\right)\right)^2\right) = \sum_k \mathbf{D}^2\left(\Delta w\left(t_k^{(n)}\right)\right) = \sum_k (t_k - t_{k-1}) = b - a.$$

A Wiener-folyamat kvadratikus variációja

A w független növekményű és a növekmények várható értéke nulla, ezért, ha a $\left(t_k^{(n)}\right)$ felosztás finomsága nullához tart, akkor

$$\left\| \sum_k \left(\Delta w\left(t_k^{(n)}\right)\right)^2 - (b-a) \right\|_2^2 = \mathbf{D}^2 \left(\sum_k \left(\Delta w\left(t_k^{(n)}\right)\right)^2 \right) =$$

$$= \sum_k \mathbf{D}^2 \left(\left(\Delta w\left(t_k^{(n)}\right)\right)^2 \right) \leq \mathbf{E} \left(\left(\Delta w\left(t_k^{(n)}\right)\right)^4 \right) =$$

$$= \mathbf{E}\left((N(0,1))^4 \right) \left(\sqrt{t_k^{(n)} - t_{k-1}^{(n)}} \right)^4 = \sum_k 3 \cdot \left(t_k^{(n)} - t_{k-1}^{(n)} \right)^2 \leq$$

$$\leq 3 \cdot (b-a) \cdot \max_k \left(t_k^{(n)} - t_{k-1}^{(n)} \right) \to 0.$$

Mivel az $L^2(\Omega)$-ban való konvergenciából következik a sztochasztikus konvergencia ezért a w kvadratikus variációja az $[a, b]$ szakaszon éppen $b - a$.

Normális eloszlás negyedik momentuma

A számolás során kihasználtuk, hogy a standard normális eloszlás negyedik momentuma éppen 3. Valóban

$$\begin{aligned}
\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} x^4 \exp\left(-\frac{x^2}{2}\right) dx &= \frac{2}{\sqrt{2\pi}}\int_{0}^{\infty} x^4 \exp\left(-\frac{x^2}{2}\right) dx = \\
&= \frac{2}{\sqrt{2\pi}}\int_{0}^{\infty} 4y^2 \exp\left(-y\right) \frac{1}{\sqrt{2y}} dy = \\
&= \frac{4}{\sqrt{\pi}}\int_{0}^{\infty} y^{3/2} \exp\left(-y\right) dy = \\
&= \frac{4}{\sqrt{\pi}}\Gamma\left(\frac{5}{2}\right) = \frac{4}{\sqrt{\pi}}\frac{3}{2}\frac{1}{2}\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = 3.
\end{aligned}$$

Polaritási formula

További kvadratikus variációk kiszámolását teszi lehetővé az úgynevezett polaritási formula.

Theorem

Ha L tetszőleges lokális martingál, akkor $[X \bullet L] = X^2 \bullet [L]$ *.*
Hasonlóan, ha M és N két lokális martingál, akkor

$$[X \bullet M, Y \bullet N] = XY \bullet [M, N] .$$

Polaritási formula heurisztikus indoklása

A formula bizonyítása nagyon messze vezetne, itt csak egy heurisztikus indoklást mutatunk be: A kvadratikus variáció definíciója alapján

$$[X \bullet L] \approx \sum_k \left((X \bullet L)(t_k) - (X \bullet L)(t_{k-1}) \right)^2 .$$

A sztochasztikus integrál a közelítő összegek határértéke, így egy igen kicsi intervallumon az integrál megváltozása éppen egy darab közelítő „téglalap" vagyis éppen $X(t_{k-1})(L(t_k) - L(t_{k-1}))$. Tehát

$$\begin{aligned} [X \bullet L] &\approx \sum_k \left(X(t_{k-1})(L(t_k) - L(t_{k-1})) \right)^2 = \\ &= \sum_k X(t_{k-1})^2 (L(t_k) - L(t_{k-1}))^2 . \end{aligned}$$

Polaritási formula heurisztikus indoklása

Ugyanakkor az $\left(L\left(t_k\right)-L\left(t_{k-1}\right)\right)^2$ éppen a $[L]$ kvadratikus variáció növekményének egy közelítése, így

$$[X \bullet L] \approx \sum_k X\left(t_{k-1}\right)^2\left([L]\left(t_k\right)-[L]\left(t_{k-1}\right)\right).$$

Vegyük észre, hogy ez a szorzatösszeg éppen az $X^2 \bullet [L]$ integrál egy közelítő összege, amiből a polaritási formula már „világos".

Polaritási formula heurisztikus indoklása

Hasonlóan kell igazolni az általános formulát:

$$\begin{aligned}
[X \bullet M, Y \bullet N] &\approx \sum_k \Delta \left(X \bullet M\right)\left(t_k\right) \Delta \left(Y \bullet N\right)\left(t_k\right) = \\
&= \sum_k X\left(t_k\right) \Delta M\left(t_k\right) Y\left(t_k\right) \Delta N\left(t_k\right) = \\
&= \sum_k X\left(t_j\right) Y\left(t_k\right) \Delta N\left(t_k\right) \Delta M\left(t_k\right) = \\
&= \sum_k X\left(t_j\right) Y\left(t_k\right) \Delta \left[N, M\right]\left(t_k\right) \approx \\
&\approx XY \bullet \left[N, M\right].
\end{aligned}$$

Asszociativitási szabály

Tegyük fel, hogy $S(u) \stackrel{\circ}{=} \int_0^u X(s)\,dM(s)$, és tekintsük az $\int_0^t Y(u)\,dS(u)$ integrált. Az integrál a közelítő összegek határértéke, így

$$\int_0^t Y(u)\,dS(u) \approx \sum_k Y(u_{k-1})\,\Delta S(u_k).$$

Az $S(u)$ integrálfüggvény $\Delta S(u_k)$ növekményei az S alakja miatt közelíthetőek az $X(u_k)\,\Delta M(u_k)$ „téglalapokkal", így

$$\int_0^t Y(u)\,dS(u) \approx \sum_k Y(u_k)\,X(u_k)\,\Delta M(u_k) \approx \int_0^t Y(u)\,X(u)\,dM(u).$$

Másképpen fogalmazva integrálfüggvény szerinti integrálás esetén az integrálok elvégzésének sorrendje „átrendezhető".

Asszociativitási szabály

Theorem

Tegyük fel, hogy a $Z \stackrel{\circ}{=} X \bullet M$ *sztochasztikus integrál létezik. Az* $Y \bullet Z$ *sztochasztikus integrál pontosan akkor létezik, ha létezik az* $XY \bullet M$ *integrál és érvényes a következő asszociativitási formula:*

$$Y \bullet (X \bullet M) = (YX) \bullet M.$$

Sztochasztikus differenciálok

A sztochasztikus folyamatok irodalomban gyakran minden további említés nélkül használni szokás a formulát. Ha az integrálokat differenciális formában írjuk fel és $dS = XdM$, akkor a $\int_0^t Y(u)\,dS(u)$ integrál az $YdS = Y(XdM) = (YX)\,dM$ formális szabály szerint alakítható, vagyis formálisan a differenciális alakban felírt kifejezés átzárójelezhető.

Sűrűségfüggvény szerinti integrálás és az asszociativitási formula

A formula érvényes minden fajta integrálra, így a Stieltjes- vagy az absztrak mérték szerinti integrálokra egyaránt használható. Emlékeztettünk, ha valamely G súlyfüggvény deriválható és a G deriváltja, g, a G sűrűségfüggvénye, akkor

$$\int_a^b f(x)\, dG(x) = \int_a^b f(x)\, g(x)\, dx.$$

Ezt a formulát szokás a különböző momentumok kiszámolására használni az elemi valószínűségszámításban. Az asszociativitási szabály éppen ennek a sűrűségfüggvényre vonatkozó formulának az általánosítása sztochasztikus integrálok esetére.

Megállítási szabály

A sztochasztikus integrál egy további fontos tulajdonsága a következő:

Theorem

Ha az $X \bullet M$ sztochasztikus integrál létezik és τ tetszőleges megállási idő, akkor

$$(X \bullet M)^{\tau} = X \bullet M^{\tau} = X\chi\left((0, \tau]\right) \bullet M.$$

A formula tartalma ismét nyilvánvaló. Ha az M integrátort megállítjuk a τ időpontban, akkor a τ után az M növekményei már nullák, ugyanis az M a τ időpont után konstans. Így az $X \bullet M$ a τ után már nem nő, vagyis az így kapott integrál éppen az $(X \bullet M)^{\tau}$.

A fő probléma

A sztochasztikus analízis legfőbb technikai problémája:

Mikor lesz egy lokális martingál valódi martingál?

A kérdés természetesen főleg azért érdekes, mert tudni szeretnénk, hogy egy sztochasztikus integrál mikor lesz martingál, ugyanis ilyenkor a sztochasztikus integrál várható értéke nulla lesz minden t-re. Általában ezt csak akkor tudjuk garantáni, ha garantálni tudjuk, hogy az integrál valódi martingál.

Lokális martingálok és a várható érték

Ha L lokális martingál és (τ_n) a megfelelő lokalizációs sorozat, akkor

$$\mathbf{E}(L^{\tau_n}(t)|\mathcal{F}_s) = \mathbf{E}(L(t \wedge \tau_n)|\mathcal{F}_s) = L(s \wedge \tau_n) = L^{\tau_n}(s).$$

valahányszor $t > s$. Várható értéket véve

$$\mathbf{E}(L(t \wedge \tau_n)) = \mathbf{E}\left(L(s \wedge \tau_n)\right).$$

Ha $n \nearrow \infty$, akkor mivel a lokalizáció definíciója miatt $\tau_n \nearrow \infty$, ezért minden kimenetelre $\lim_{n\to\infty} L^{\tau_m}(s) = L(s)$. A kérdés csak az, hogy az egyenlőség másik oldalán mikor vihető be a határérték a (feltételes) várható értékbe. Vagyis a pontonkénti konvergencia mellett mikor van $L^1(\Omega)$ konvergencia.

Lokális martingálok és a várható érték

Erre számos általános tétel ismert, a legegyszerűbb talán, ha az $L(t)$-nek t-szerint van integrálható majoránsa. Az integrálható majoráns létezésének szükséges és elegendő feltétele, hogy a

$$\sup_t |L(t)|$$

változó integrálható legyen. Erre vonatkozóan hasznos az úgynevezett Davis-féle egyenlőtlenség, amely a $\sup_t |L(t)|$ integrálhatóságának szükséges és elegendő feltételét adja meg a folyamat kvadratikus variációjának segítségével:

Davis-egyenlőtlenség

Theorem

Vannak olyan c és C univerzális konstansok, hogy tetszőleges L lokális martingál és τ megállási idő esetén

$$c\left\|\sqrt{[L](\tau)}\right\|_1 \leq \left\|\sup_{t\leq\tau}|L(t)|\right\|_1 \leq C\left\|\sqrt{[L](\tau)}\right\|_1,$$

ahol a norma a megfelelő változók $L^1(\Omega)$ térben vett normáját jelöli.

A Doléans mérték és a négyzetesen integrálható integrandusok

Definition

Definíció szerint $X \in \mathcal{L}^2(M)$, ha $\mathbf{E}\left(\int_0^\infty X^2 d[M]\right) < \infty$. A

$$\mu(B) \stackrel{\circ}{=} \mathbf{E}\left(\int_0^\infty \chi_B d[M]\right)$$

mértéket az M Doléans-mértékének mondjuk. $\mathcal{L}^2(M)$ éppen a Doléans-mérték szerint négyzetesen integrálható folymatok.

A belső integrál az $[M]$ monoton növekedő folyamat trajektóriánkénti integrálja egy nem negatív folyamatnak: minden ω kimenetelre ki kell számolni egy-egy integrált és az így kapott valószínűségi változónak kell venni a várható értékét. Természetesen az $\mathbb{R}_+$ időtengely helyett tetszőleges más intervallum is írható. Ilyenkor az integrálokat az adott időszakaszra kell kiszámolni.

Négyzetesen integrálható folyamatok integrálja martingál

Theorem

Ha M tetszőleges lokális martingál és $X \in \mathcal{L}^2(M)$, akkor az $X \bullet M$ sztochasztikus integrál martingál.

A Davis-egyenlőtlenség szerint az $X \bullet M$ sztochasztikus integrálnak pontosan akkor van integrálható majoránsa, ha

$$\left\| \sqrt{[X \bullet M](\infty)} \right\|_1 < \infty.$$

A polaritási formula és a Jensen-egyenlőtlenség szerint:

$$\mathbf{E}\left(\sqrt{[X \bullet M](\infty)}\right) \leq \sqrt{\mathbf{E}\left([X \bullet M](\infty)\right)} \leq$$

$$\leq \sqrt{\mathbf{E}\left(X^2 \bullet [M](\infty)\right)} \doteq \sqrt{\mathbf{E}\left(\int_0^\infty X^2 d[M]\right)} < \infty.$$

Az exponenciális Wiener-folyamat integrálja martingál.

Example

Ha w Wiener-folyamat, akkor az $\exp(w) \bullet w$ sztochasztikus integrál martingál.

Elegendő megmutatni, hogy tetszőleges $[0, t]$ szakaszon $\exp(w) \in \mathcal{L}^2(w)$. Emlékeztetünk, hogy a w kvadratikus variációja éppen $[w](s) = s$, így

$$\mathbf{E}\left(\int_0^t (\exp(w(s)))^2 \, ds\right) = \mathbf{E}\left(\int_0^t \exp(2w(s)) \, ds\right) =$$

$$= \int_0^t \mathbf{E}(\exp(2w(s))) \, ds = \int_0^t \exp\left(\frac{(2\sqrt{s})^2}{2}\right) ds < \infty,$$

ahol természetesen az utolsó sorban felhasználtuk a lognormális eloszlás várható értékére vonatkozó formulát, illetve azt, hogy a $w(s)$ eloszlása $N(0, \sqrt{t})$.

Miért is lesz a sztochasztikus integrál lokális martingál?

Legyen X és M folytonos. Legyen

$$\tau_n \circeq \inf \{ t : |X(t)| \geq n \} \wedge \inf \{ t : |M(t)| \geq n \} .$$

A folytonosság miatt világos, hogy $|X^{\tau_n}| \leq n$ és $|M^{\tau_n}| \leq n$, így $X\chi((0, \tau_n])$ korlátos, M^{τ_n} négyzetesen integrálható martingál. Így $X\chi((0, \tau_n]) \bullet M^{\tau_n}$ martingál. De a megállítási szabály miatt

$$(X \bullet M)^{\tau_n} = X\chi((0, \tau_n]) \bullet M^{\tau_n},$$

vagyis az $X \bullet M$ lokális martingál.