Sztochasztikus integrálás

A sztochasztikus folyamatok egyik legfontosabb fogalma

Medvegyev Péter
Matematika tanszék

2008

Reguláris függvények

Definition

A valós számok halmazán értelmezett f függvényt regulárisnak mondjuk, ha minden pontban rendelkezik jobb és bal oldali határértékkel. Ha ezen túl még jobbról folytonos, akkor jobbról regulárisnak, ha balról folytonos, akkor balról regulárisnak mondjuk. Reguláris függvények esetén értelmethető az ugrásokból álló $\Delta X \overset{\circ}{=} X_{+} - X_{-}$ folyamat.

Reguláris függvények nagy ugrásai

A reguláris függvények alapvető tulajdonsága, hogy tetszőleges véges szakaszon a függvény egy adott $c > 0$ konstansnál nagyobb nagyságú ugrásainak száma mindig véges: Legyen (t_n) egy olyan végtelen sorozat, amelyre $|(\Delta X)(t_n)| \geq c$. A szakasz végessége miatt feltehető, hogy a (t_n) sorozat monoton és konvergens. De a bal oldali határérték definíciója miatt feltehető, hogy van egy olyan $s_n < t_n < u_n$ sorozat, amelyre

$$|X(u_n) - X(s_n)| \geq c/2 > 0.$$

Ha a (t_n) monoton nő, akkor az (s_n) és (u_n) választható monoton növekedőnek, ha a (t_n) csökken, akkor az (s_n) és (u_n) szintén választható csökkenőnek, illetve az is feltehető, hogy az (s_n)-nek és (u_n)-nek létezik határértéke és ez a határérték azonos a (t_n) határértékével. Ez azonban a trajektóriák regularitása miatt ellentmond a fenti sornak.

Reguláris függvények korlátosak

Lemma

Ha az f függvény egy $[a, b]$ kompakt szakaszon minden pontban rendelkezik véges jobb és bal oldali határértékkel, akkor korlátos.

Valóban, ha nem így lenne, akkor alkalmas (t_n) sorozatra $|f(t_n)| \geq n$. Az $[a, b]$ kompaktsága miatt feltehető, hogy a (t_n) konvergens és további részsorozatra áttérve feltehető, hogy a (t_n) valamilyen értelemben monoton. Ha például $t_n \nearrow t_*$, akkor $f(t_n) \to \infty$ és az f nem rendelkezhet bal oldali határértékkel a t_* pontban, ami ellentmondás.

Sztochasztikus integrálás korlátos változású integrátor esetén

Ha a V integrátor trajektóriái korlátos változásúak, akkor a sztochasztikus integrál definíciója nyilvánvaló. Ha minden trajektória egy jobbról reguláris és korlátos változású függvény, akkor minden ω kimenetel esetén a $\mu_{\omega}\left(\left(a,b\right]\right) \stackrel{\circ}{=} V\left(b,\omega\right) - V\left(a,\omega\right)$ egy mértéket definiál az $\left(a,b\right]$ alakú intervallumokon. A mértékkiterjesztési tétel közvetlen alkalmazával ez a mérték kiterjeszthető a számegyenes Borel-mérhető halmazaira. Ha az X integrandus minden trajektóriája Borel-mérhető, akkor definálható az

$$\left(X \bullet V\right)\left(t,\omega\right) \stackrel{\circ}{=} \int_0^t X\left(s,\omega\right) d\mu_{\omega}\left(s\right)$$

integrál. Miként láttuk, ha az X progresszíven mérhető, akkor az így kapott $X \bullet V$ sztochasztikus folyamat adaptált lesz.

A balról reguláris integrandus és a közelítő összegek

Lemma

Ha az X integrandus balról reguláris, akkor az $X \bullet V$ integrál minden véges intervallumon előállítható a

$$\sum_i X\left(t_{i-1}^{(n)}\right)\left(V\left(t_i^{(n)}\right) - V\left(t_{i-1}^{(n)}\right)\right)$$

alakú, úgynevezett Itô–Stieltjes közelítő összegek határértékeként.

A fenti összeg valamely $(a, b]$ esetén felírható $\int_a^b X_n dV$ módon, ahol

$$X_n \stackrel{\circ}{=} \sum_i X\left(t_{i-1}^{(n)}\right)\chi\left(\left(t_{i-1}^{(n)}, t_i^{(n)}\right]\right).$$

Az X balról való folytonossága miatt ha $\lim_{n\to\infty} \max_i \left|t_i^{(n)} - t_{i-1}^{(n)}\right| = 0$, akkor $X_n \to X$. A regularitás miatt az X egyes trajektóriái, minden véges intervallumon, korlátosak. A V által generált mérték szerint a véges szakaszok mértéke véges, így alkalmazható a majorált konvergencia tétele.

Itô–Stieltjes közelítő összegek határértéke

Lemma

Ha X tetszőleges reguláris folyamat és V jobbról reguláris és korlátos változású, akkor az Itô–Stieltjes közelítő összegek határértéke mindig létezik és a határérték azonos az

$$\int_a^b X(s-)\, dV(s) \stackrel{\circ}{=} \int_a^b X_-(s)\, dV(s)$$

integrállal, ahol értelemszerűen a mínusz jel az X folyamat bal oldali határértékre utal.

Érdemes megjegyezni, hogy jobbról reguláris X esetén az Itô–Stieltjes és a Lebesgue–Stieltjes integrálok nem lesznek feltétlenül azonosak. A lemma szerint azonban az Itô–Stieltjes integrál mindig létezik, ugyanis a balról regularizált esetben létezik az integrál. A két integrál értéke akkor tér el, ha a V és az X közös ugrással rendelkezik.

A nagy ugrások integrálja nulla

Ha $(u_i)_{i=1}^N$ a c-nél nagyobb ugrások halmaza, akkor a V jobbról való folytonossága, illetve a nagy ugrások számának végessége miatt

$$\sum_i \Delta X\left(u_{i-1}\right)\left(V\left(t_i^{(n)}\right)-V\left(t_{i-1}^{(n)}\right)\right) \rightarrow 0$$

ugyanis az összeg valamely tagja csak akkor nem nulla, ha $t_{i-1}^{(n)} = u_{i-1}$ és a jobbról való folytonosság miatt $V\left(t_i^{(n)}\right) - V\left(u_{i-1}\right) \rightarrow 0$.

A kis ugrások integrálja

Ebből következően feltehető, hogy $|\Delta X| \leq c$. De így minden trajekóriára

$$\left|\sum_i \left(X\left(t_{i-1}^{(n)}\right) - X_-\left(t_{i-1}^{(n)}\right)\right)\left(V\left(t_i^{(n)}\right) - V\left(t_{i-1}^{(n)}\right)\right)\right| =$$

$$= \left|\sum_i \Delta X\left(t_{i-1}^{(n)}\right)\left(V\left(t_i^{(n)}\right) - V\left(t_{i-1}^{(n)}\right)\right)\right| \leq$$

$$\leq c\mathrm{Var}\left(V\right)\left(t\right).$$

Mivel a c választható tetszőlegesen kicsinek a $\sum_i X\left(t_{i-1}^{(n)}\right)\left(V\left(t_i^{(n)}\right) - V\left(t_{i-1}^{(n)}\right)\right)$ közelítő összeg határértéke megegyezik az $\sum_i X_-\left(t_{i-1}^{(n)}\right)\left(V\left(t_i^{(n)}\right) - V\left(t_{i-1}^{(n)}\right)\right)$ közelítő összegek határértékével. Mivel az X_- folyamat balról regularizált, a közelítő összegek határértéke éppen az $X_- \bullet V$ sztochasztikus integrál.

A keresztvariáció definíciója

Definition

Ha minden

$$0 = t_0^{(n)} < t_1^{(n)} < \ldots < t_m^{(n)} < \ldots$$

partíció sorozatra, amelyre

$$\lim_{n \to \infty} \max_i \left| t_i^{(n)} - t_{i-1}^{(n)} \right| = 0$$

és minden t-re az

$$\sum_i \left(X\left(t_i^{(n)} \wedge t\right) - X\left(t_{i-1}^{(n)} \wedge t\right) \right) \left(Y\left(t_i^{(n)} \wedge t\right) - Y\left(t_{i-1}^{(n)} \wedge t\right) \right)$$

sorozat határértéke létezik, akkor az így kapott határértéket az X és az Y folyamatok kvadratikus keresztvariációjának mondjuk és $[X, Y]$ módon fogjuk jelölni. Ha $X = Y$, akkor az X kvadratikus variációjáról beszélünk. A kvadratikus variációt $[X]$ módon fogjuk jelölni.

A parciális integrálás formulája

Theorem

Ha X és Y véges változású és jobbról reguláris folyamatok, akkor tetszőleges $a < b$ időpontok esetén

$$X(b)\,Y(b) - X(a)\,Y(a) =$$

$$= \int_a^b X_- dY + \int_a^b Y_- dX + [X, Y](b) - [X, Y](a).$$

A formulából természetesen az is kiderül, hogy amennyiben X és Y véges változású, jobbról reguláris folyamatok, akkor a keresztvariációkból álló $[X, Y]$ folyamat értelmes. Lényegében ez az állítás fő mondanivalója.

A parciális integrálás formulája

Az egyenlőségben szereplő sztochasztikus integrálok éppen a

$$\sum_i X\left(t_{i-1}^{(n)}\right)\left(Y\left(t_i^{(n)}\right) - Y\left(t_{i-1}^{(n)}\right)\right),$$

illetve az

$$\sum_i Y\left(t_{i-1}^{(n)}\right)\left(X\left(t_i^{(n)}\right) - X\left(t_{i-1}^{(n)}\right)\right)$$

közelítő összegek határértékei. Ha felírjuk az $[X, Y]$ keresztvariációt definiáló közelítő

$$\sum_i (X(t_i^{(n)}) - X(t_{i-1}^{(n)}))(Y(t_i^{(n)}) - Y(t_{i-1}^{(n)}))$$

összegeket, akkor elemi számolással látható, hogy a jobb oldalt közelítő összegek összegei a bal oldalon álló kifejezésre egyszerűsödnek. Mivel a bal oldal kontans, és a két integrál létezik ezért a keresztvariáció is létezik és a formula triviálisan teljesül.

A keresztvariáció elemi tulajdonságai

Nyilvánvalóan

1. $[X, Y] = [Y, X]$
2. $[aX_1 + bX_2, Y] = a[X_1, Y] + b[X_2, Y]$.
3. $[X, X] \geq 0$ és monoton nő.

Véges változású és folytonos folyamatok keresztvariációja

Example

Ha az X folyamat folytonos az Y folyamat pedig véges változású, akkor $[X, Y] = 0$.

Ez a rendkívül gyakran használt összefüggés triviális következménye annak, hogy a

$$\left|\sum a_i b_i\right| \leq \max_i |a_i| \sum_i |b_i|$$

becslés miatt a

$$\max_i \left| X\left(t_i^{(n)} \wedge t\right) - X\left(t_{i-1}^{(n)} \wedge t\right)\right| \sum_i \left| Y\left(t_i^{(n)} \wedge t\right) - Y\left(t_{i-1}^{(n)} \wedge t\right)\right|$$

triviálisan a keresztvariációt közelítő összeg felső becslése. Az Y véges változású, így az összeg definíció szerint felülről becsülhető a $\mathrm{Var}(Y)(t) < \infty$ értékkel. De az X folytonos, így a $[0, t]$ szakaszon egyenletesen folytonos, így a maximumot tartalmazó kifejezés minden trajektóriára nullához tart. Következésképpen $[X, Y] = 0$.

Véges változású folyamatok keresztvariációja

Example

Ha az X és az Y folyamat véges változású és jobbról reguláris, akkor $[X, Y] = \sum \Delta X \Delta Y$, vagyis a keresztvariáció éppen az ugrások összege.

Az egyenlőség igazolásához feltehetjük, hogy az X és az Y tiszta ugró függvények. Ha például $X = X^c + X^d$ az X felbontása folytonos és ugró részre, akkor a keresztvariáció linearitása miatt

$$[X, Y] = \left[X^c + X^d, Y\right] = [X^c, Y] + \left[X^d, Y\right] = \left[X^d, Y\right],$$

illetve hasonlóan eljárva az Y esetében

$$[X, Y] = \left[X^d, Y^c + Y^d\right] = \left[X^d, Y^d\right].$$

Véges változású folyamatok keresztvariációja

Tiszta ugró függvényekre felírva a parciális integrálás formuláját, kihasználva, hogy valamely pont mértéke éppen a pontban való ugrás nagysága

$$\begin{aligned}
\int_a^b X_- dY &= \sum X_-(s)\,\Delta Y(s) \\
\int_a^b Y_- dX &= \sum Y_-(s)\,\Delta X(s)\,.
\end{aligned}$$

Véges változású folyamatok keresztvariációja

Ha első összeghez hozzáadjuk a $\sum \Delta X(s) \Delta Y(s)$ kifejezést és kiemeljük a ΔY-t akkor az

$$\sum X(s) \Delta Y(s)$$

összeget kapjuk. Ha ehhez hozzáadjuk a második integrált, akkor az

$$\sum (X(s) Y(s) - Y_{-}(s) X_{-}(s)) = \sum \Delta (YX)(s)$$

összeghez jutunk. Mivel az X és az Y tiszta ugrófüggvények, ezért az összeg éppen a parciális integrálási formulában szereplő $X(b) Y(b) - X(a) Y(a)$ kifejezésre egyszerűsödik. Érdemes hangsúlyozni, hogy mivel feltettük, hogy az X és az Y folyamatok véges megváltozásúak, ezért a fenti számolásban szereplő összegek abszolút konvergensek voltak, így a sorok összege független volt a sorrendtől és általában a szokásos véges öszegekre megszokott szabályok érvényesek maradtak

Korlátos integrandus esetén az integrál martingál

Theorem

Ha a V integrátor martingál és a $\mathrm{Var}(V)(\infty)$ változó integrálható, vagyis ha $\mathbf{E}(\mathrm{Var}(V)(\infty)) < \infty$, akkor tetszőleges korlátos, balról folytonos és adaptált X integrandus esetén az $X \bullet V$ sztochasztikus integrál martingál.

Tegyük fel tehát, hogy a V integrálható változású martingál. Legyen

$$0 = t_0^{(n)} < t_1^{(n)} < \ldots < t_m^{(n)} < \ldots$$

az $\mathbb{R}_+$ időegyenes egy felbontása. Tekintsük az

$$Y_n(t) \triangleq \sum_i X\left(t_{i-1}^{(n)}\right)\left(V\left(t_i^{(n)} \wedge t\right) - V\left(t_{i-1}^{(n)} \wedge t\right)\right)$$

alakú közelítő integrálfüggvényeket.

A közelítő összeg martingál

Emlékeztetünk. hogy az $a \wedge b$ jel az a és a b számok közül a kisebbet jelöli, így az $Y_n(t)$ a $(0, t]$ szakaszba eső osztópontokra való összegzést adja meg. Ha $s < t$ akkor

$$\mathbf{E}\left(Y_n(t) \mid \mathcal{F}_s\right) = Y_n(s) + \mathbf{E}\left(U_n(s) + Z(s,t) \mid \mathcal{F}_s\right),$$

ahol $U_n(s)$ a sztochasztikus integrálnak az s előtti utolsó osztópont közelítő összegének az s fölé eső része és

$$Z(s,t) \stackrel{\circ}{=} \sum_{s < t_{i-1}^{(n)} \leq t} X\left(t_{i-1}^{(n)}\right)\left(V\left(t_i^{(n)} \wedge t\right) - V\left(t_{i-1}^{(n)} \wedge t\right)\right).$$

Megmutatjuk, hogy $\mathbf{E}\left(Z(t,s) \mid \mathcal{F}_s\right) = 0$ és $\mathbf{E}\left(U_n(s) \mid \mathcal{F}_s\right) = 0$.

A közelítő összeg egyik tagja

Mivel egy véges összegről van szó elegendő belátni, hogy az összeg minden egyes tagjának feltételes várható értéke nulla. A feltételes várható érték elemi tulajdonságai alapján, felhasználva, hogy $s < t_{i-1}^{(n)}$, így $\mathcal{F}_s \subseteq \mathcal{F}_{t_{i-1}^{(n)}}$

$$\begin{aligned}
&\mathbf{E}\left(X\left(t_{i-1}^{(n)}\right)\left(V\left(t_i^{(n)} \wedge t\right) - V\left(t_{i-1}^{(n)} \wedge t\right)\right) \mid \mathcal{F}_s\right) = \\
&= \mathbf{E}\left(\mathbf{E}\left(X\left(t_{i-1}^{(n)}\right)\left(V\left(t_i^{(n)} \wedge t\right) - V\left(t_{i-1}^{(n)}\right)\right) \mid \mathcal{F}_{t_{i-1}^{(n)}}\right) \mid \mathcal{F}_s\right) = \\
&= \mathbf{E}\left(X\left(t_{i-1}^{(n)}\right)\mathbf{E}\left(V\left(t_i^{(n)} \wedge t\right) - V\left(t_{i-1}^{(n)}\right) \mid \mathcal{F}_{t_{i-1}^{(n)}}\right) \mid \mathcal{F}_s\right) = \\
&= \mathbf{E}\left(X\left(t_{i-1}^{(n)}\right) 0 \mid \mathcal{F}_s\right) = 0,
\end{aligned}$$

így $\mathbf{E}\left(Z\left(t, s\right) \mid \mathcal{F}_s\right) = 0$.

A közelítő összeg másik tagja

Hasonlóan, ha $u^{(n)}$ az s előtti utolsó osztópont, akkor az $u^{(n)} \leq s \leq t_{i-1}^{(n)} \wedge t$ miatt

$$\mathbf{E}\left(X\left(u^{(n)}\right)\left(V\left(t_{i-1}^{(n)} \wedge t\right) - V(s)\right) \mid \mathcal{F}_s\right) =$$
$$= X\left(u^{(n)}\right)\mathbf{E}\left(V\left(t_{i-1}^{(n)} \wedge t\right) - V(s) \mid \mathcal{F}_s\right) =$$
$$= X\left(u^{(n)}\right) \cdot 0 = 0,$$

így $\mathbf{E}\left(U_n(s) \mid \mathcal{F}_s\right) = 0$.

Korlátos integrandus esetén az integrál martingál

Minden egyszerűsége ellenére a fenti számolás a sztochasztikus folyamatok elméletének egyik kulcs számolása. Világos, hogy az $X\left(t_{i-1}^{(n)}\right)$ korlátosságát kihasználtuk. Egyrészt ott, hogy a szorzat feltételes várható értéke értelmes, másrészt a kiemelési szabály használatakor. A V martingál tulajdonsága miatt a $V\left(t_i^{(n)} \wedge t\right) - V\left(t_{i-1}^{(n)} \wedge t\right)$ biztosan integrálható, de ha az X nem lenne korlátos, akkor az egész fenti gondolatmenetben szereplő feltételes várható értékek könnyen értelmetlenek lehetnének. Világos az is, hogy az utolsó sorban kihasználtuk, hogy a V martingál ugyanis ezért lesz az $\mathcal{F}_{t_{i-1}^{(n)}}$ szerinti feltételes várható érték nulla.

A feltételes várható értékben való határátmenet

Ha $n \to \infty$ esetén

$$\sup_i \left| t_i^{(n)} - t_{i-1}^{(n)} \right| \to 0,$$

akkor az X balról való folytonossága miatt minden (t, ω) esetén $Y_n(t, \omega) \to (X \bullet V)(t, \omega)$. A probléma csak az, hogy a határérték és a feltételes várható érték felcserélhető-e? Mivel a feltételek miatt triviálisan

$$|Y_n(t)| \leq \sup |X| \cdot \mathrm{Var}(V)(\infty) \in L^1(\Omega),$$

ezért a feltételes várható értékre alkalmazható a majorált konvergencia tétele, így

$$\mathbf{E}((X \bullet V)(t) \mid \mathcal{F}_s) = \mathbf{E}\left(\lim_{n\to\infty} Y_n(t) \mid \mathcal{F}_s\right) =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \mathbf{E}(Y_n(t) \mid \mathcal{F}_s) = \lim_{n\to\infty} Y_n(s) = (X \bullet V)(s).$$

Ami éppen a bizonyítandó tulajdonság.

Független Poisson-folyamatok közös ugrásai

Legyenek X és Y egy közös $\mathcal{F}$ filtrációra nézve Poisson-folyamatok. Jelölje M és N a megfelelő exponenciális martingálokat. A parciális integrálási formula szerint

$$MN - 1 = M_{-} \bullet N + N_{-} \bullet M + [M, N].$$

Vegyük észre, hogy tetszőleges véges intervallumon az M_{-} és az N_{-} korlátosak. Ugyancsak véges szakaszokon a trajektóriák variációjából álló $\mathrm{Var}(M)$ és $\mathrm{Var}(N)$ folyamatoknak van integrálható majoránsa. Ebből következően a sztochasztikus integrálok martingálok. Várható értéket véve

$$\mathbf{E}(M(t)N(t)) - 1 = \mathbf{E}([M, N](t)).$$

A kvadratikus keresztvariáció nulla

Érdemes hangsúlyozni, hogy a sztochasztikus integrálok martingál tulajdonságának igazolásához szükséges, hogy az integrandus és az integrátor ugyanarra a filtrációra nézve legyen adaptált. Ezt biztosítja a feltétel, hogy az X és az Y egy közös filtrációra nézve alkot Poisson-folyamatot. Ha az X és Y folyamatoknak nincsen közös ugrása, akkor a Laplace-transzformáltak (vagy Fourier, ahogy tetszik) idő szerinti folytonossága miatt az M és N exponenciális martingáloknak sincsen közös ugrása. Mivel az M és az N trajektóriái korlátos változásúak és véges szakaszokon a Poisson-folyamatoknak csak véges számú ugrása van és az ugrások között az M és az N trajektóriái deriválhatóak, ezért

$$[M, N](t) = \sum_s \Delta M(s) \Delta N(s) = 0.$$

A közös Laplace-transzformáció szorzat alakra bomlik

Ebből következően, ha egy valószínűséggel a két folyamatnak nincsen közös ugrása, akkor

$$\mathbf{E}(M(t)N(t)) = 1.$$

A Fourier-transzformáltakkal átszorozva

$$\mathbf{E}(\exp(-(uX(t) + vY(t)))) = \mathbf{E}(\exp(-uX(t))) \cdot \mathbf{E}(\exp(-vY(t))),$$

vagyis az együttes Laplace-transzformált az egyedi Laplace-transzformáltak szorzatára bomlik. Következésképpen, ha az X-nek és az Y-nak a $[0, t]$ szakaszon egy valószínűséggel nincsen közös ugrása, akkor az $X(t)$ és az $Y(t)$ független.

A fordított irány, a kvadratikus variáció várható értéke nulla

Megfordítva, megmutatjuk, hogy ha az $X(t)$ és az $Y(t)$ függetlenek, akkor az együttes Laplace-transzformáltak szorzat alakra bomlanak. Írjuk fel az exponenciális martingálokat:

$$\begin{aligned} M(s,u) &\circeq \frac{\exp(-sX(u))}{\mathbf{E}(\exp(-sX(u)))} \\ N(s,u) &\circeq \frac{\exp(-sY(u))}{\mathbf{E}(\exp(-sY(u)))} \end{aligned}$$

Ekkor a sztochasztikus integrálok ismét martingálok és a függetlenség miatt

$$\mathbf{E}(M(t)N(t)) = \mathbf{E}(M(t)) \cdot \mathbf{E}(N(t)) = 1$$

következésképpen a fenti gondolatmenet megismétlésével

$$\mathbf{E}([M,N](t)) = 0.$$

Nincsen közös ugrás

Könnyen látható, hogy például

$$\Delta M(s,r) = \frac{\exp(-sX(r)) - \exp(-sX(r-))}{\mathbf{E}(\exp(-sX(r)))} \leq 0$$

Így a közös ugrások szorzata nem negatív, így az ugrások szorzatának összegének várható értéke csak akkor lehet nulla, ha az X és Y folyamatoknak egy valószínűséggel nincsen közös ugrása.

A közös filtráció feltétele fontos

A bemutatottakkal kapcsolatban két megjegyzést teszünk:

1. Ha az X Poisson-folyamat ugrásainak időpontja (σ_n) és az Y ugrásainak időpontja $(2\sigma_n)$, akkor könnyen látható, hogy nincsen közös ugrásuk, de nem is függetlenek. Ugyanakkor nem is lesznek egy közös filtrációra nézve egyszerre Poisson-folyamatok.

2. Érdemes hangsúlyozni, hogy csak az $X(t)$ és $Y(t)$ változók függetlenségét igazoltuk és nem igazoltuk az X és az Y folyamatok függetlenségét. Az X és Y folyamatokat, definíció szerint, függetlennek mondjuk, ha tetszőleges módon választva a $(t_i)_{i=1}^{N}$ és az $(s_j)_{j=1}^{M}$ időpontokat az $(X(t_i))_i$ vektor független az $(Y(s_j))_j$ vektortól. Emlékeztetünk, hogy ez utóbbi azt jelenti, hogy a két vektor által generált két σ-algebra független. A gondolatmenet némi kiterjesztésével megmutatható, hogy az ugrások egy valószínűséggel való diszjunktsága szükséges és elegendő feltétele a folyamatok függetlenségének.

Az integrál definíciója

Definition (Itô–Stieltjes-integrál)

Legyen X sztochasztikus folyamat és minden

$$a = t_0^{(n)} < t_1^{(n)} < \ldots < t_{m_n}^{(n)} = b$$

felosztáshoz rendeljük hozzá az

$$I_n \circeq \sum_k X\left(t_{k-1}^{(n)}\right)\left(Y\left(t_k^{(n)}\right) - Y\left(t_{k-1}^{(n)}\right)\right)$$

Itô–Stieltjes közelítő összeget. Ha létezik olyan ζ valószínűségi változó, hogy minden olyan felosztásra, amelyre $\lim_{n\to\infty} \max_k \left(t_k^{(n)} - t_{k-1}^{(n)}\right) = 0$ a közelítő összegek sorozatára sztochasztikus konvergenciában $\lim_{n\to\infty} I_n = \zeta$, akkor ezt a közös ζ határértéket az X folyamat Y szerinti Itô–Stieltjes-integráljának mondjuk, és $\int_a^b X dY$ módon jelöljük.

Martingál transzformáció

Lemma (Martingáltranszformáció)

Legyen M az $\mathcal{F}$ filtrációra nézve diszkrét idejű martingál, X az $\mathcal{F}$-re nézve adaptált folyamat. Ha az

$$X_{k-1} \cdot (M_k - M_{k-1})$$

kifejezések integrálhatóak, akkor a

$$Z_0 \circeq 0, \quad Z_n \circeq \sum_{k=1}^{n} X_{k-1} \cdot (M_k - M_{k-1})$$

sorozat nulla várható értékkel rendelkező martingál. Speciálisan, ha X egyenletesen korlátos és M tetszőleges martingál, akkor a Z is martingál.

Kihasználva, hogy a feltétel szerint az $X_{k-1} \cdot (M_k - M_{k-1})$ integrálható, a kiemelési szabály és a teljes várható érték tétele szerint, ha $k-1 \geq m$ tetszőleges n-re

$$\begin{gathered}\mathbf{E}\left(X_{k-1}\chi\left(|X_{k-1}| \leq n\right)\left(M_k - M_{k-1}\right) \mid \mathcal{F}_m\right) = \\ = \mathbf{E}\left(\mathbf{E}\left(X_{k-1}\chi\left(|X_{k-1}| \leq n\right)\left(M_k - M_{k-1}\right) \mid \mathcal{F}_{k-1}\right) \mid \mathcal{F}_m\right) = \\ = \mathbf{E}\left(X_{k-1}\chi\left(|X_{k-1}| \leq n\right)\mathbf{E}\left(\left(M_k - M_{k-1}\right) \mid \mathcal{F}_{k-1}\right) \mid \mathcal{F}_m\right) = \\ = \mathbf{E}\left(X_{k-1}\chi\left(|X_{k-1}| \leq n\right) \cdot 0 \mid \mathcal{F}_m\right) = 0.\end{gathered}$$

Mivel a feltétel szerint használhatjuk a majorált konvergencai tételét, így

$$\mathbf{E}\left(X_{k-1}\left(M_k - M_{k-1}\right) \mid \mathcal{F}_m\right) = 0,$$

amiből a lemma igazolása már evidens.

Lemma

Legyen X egy martingál és tegyük fel, hogy minden t időpontra az $X(t)$ négyzetesen integrálható. Ha $s < t$, akkor

$$\mathbf{E}\left((X(t) - X(s))^2\right) = \mathbf{E}\left(X^2(t)\right) - \mathbf{E}\left(X^2(s)\right).$$

A két oldal eltérése $d \triangleq 2 \cdot \mathbf{E}(X(s) \cdot (X(s) - X(t)))$. Ha $s < t$, akkor a martingál tulajdonság miatt

$$\begin{aligned} d_n &\triangleq 2 \cdot \mathbf{E}(X(s)\chi(|X(s)| \leq n) \cdot (X(s) - X(t))) = \\ &= 2 \cdot \mathbf{E}(\mathbf{E}(X(s)\chi(|X(s)| \leq n) \cdot (X(s) - X(t)) \mid \mathcal{F}_s)) = \\ &= 2 \cdot \mathbf{E}(X(s)\chi(|X(s)| \leq n) \cdot \mathbf{E}(X(s) - X(t) \mid \mathcal{F}_s)) = \\ &= 2 \cdot \mathbf{E}(X(s)\chi(|X(s)| \leq n) \cdot 0) = 0. \end{aligned}$$

Energiaazonosság

Mivel $X(s), X(t) \in L^2(\Omega)$ ezért az $|X(s) \cdot (X(s) - X(t))|$ integrálható. Így a majorált konvergencia tétele alkalmazható mind a két oldalon és

$$d = \lim_{n \to \infty} d_n = 0.$$

A négyzetesen integrálható martingálok definíciója

Definition

Emlékeztetünk, hogy az $M \in \mathcal{H}^2$ azt jelenti, hogy az M olyan martingál, amelyre az $\|M(t)\|_2$ $L^2(\Omega)$-norma a t időparaméter szerint korlátos.

Example

Ha w Wiener-folyamat, akkor minden véges szakaszon w eleme a $\mathcal{H}^2$ térnek, de a teljes időtengelyen $w \notin \mathcal{H}^2$.

Emlékeztetünk, hogy ha $p > 1$, akkor az $L^p(\Omega)$ térben korlátos halmazok egyenletesen integrálhatóak. Ebből következően a $\mathcal{H}^2$-martingálok az egyenletesen integrálható martingálok egy speciális részhalmazát alkotják.

Sztochasztikus integrálok létezése

Theorem

Ha az X adaptált sztochasztikus folyamat az $[a, b]$ véges szakaszon majdnem minden ω-ra folytonos és $M \in \mathcal{H}^2$, akkor az X az $[a, b]$-én M szerint Itô–Stieltjes-integrálható.

Az egyszerűség kedvéért tegyük fel, hogy az X minden kimenetelre folytonos.

A közelítő összeg szórásának becslése

Tegyük fel, hogy $|X| \leq K$ és legyen $\left(t_k^{(n)}\right)_k$ az $[a, b]$ szakasz felbontása. Az előző lemma alapján az integrálközelítő összegek

$$I_n \stackrel{\circ}{=} \sum_k X\left(t_{k-1}^{(n)}\right)\left(M\left(t_k^{(n)}\right) - M\left(t_{k-1}^{(n)}\right)\right)$$

sorozat martingál, így a sorozat tagjainak várható értéke nulla. A bizonyítás kulcsa, hogy

$$\|I_n\|_2^2 = \mathbf{D}^2\left(I_n\right) \leq K^2 L,$$

ahol az L rögzített, X-től nem függő determinisztikus konstans.

A közelítő összeg szórásának becslése

Az energiaazonosság alapján

$$\|I_n\|_2^2 = \sum_k \left\| X\left(t_{k-1}^{(n)}\right)\left(M\left(t_k^{(n)}\right) - M\left(t_{k-1}^{(n)}\right)\right)\right\|_2^2 .$$

Az energiaazonosság újabb alkalmazásával

$$\begin{aligned}
\|I_n\|_2^2 &= \sum_k \left\| X\left(t_{k-1}^{(n)}\right)\left[M\left(t_k^{(n)}\right) - M\left(t_{k-1}^{(n)}\right)\right]\right\|_2^2 \leq \\
&\leq K^2 \sum_k \left\| M\left(t_k^{(n)}\right) - M\left(t_{k-1}^{(n)}\right)\right\|_2^2 = \\
&= K^2 \sum_k \left(\left\| M\left(t_k^{(n)}\right)\right\|_2^2 - \left\| M\left(t_{k-1}^{(n)}\right)\right\|_2^2 \right) = \\
&= K^2 \left(\|M(b)\|_2^2 - \|M(a)\|_2^2 \right) \mathrel{\hat=} K^2 L.
\end{aligned}$$

A folytonossági modulus

A sztochasztikus konvergenciában minden Cauchy–sorozat konvergens, ezért az integrál konvergenciájának belátásához elegendő megmutatni, hogy az integrálközelítő összegek (I_n) sorozata sztochasztikusan Cauchy-sorozat. Az X trajektóriái folytonosak, vagyis az $[a,b]$ véges szakaszon egyenletesen is folytonosak, ezért ha $\delta \to 0$, akkor tetszőleges ω kimenetelre az

$$U(\omega,\delta) \overset{\circ}{=} \sup_{|t-s|\leq\delta} |X(t,\omega) - X(s,\omega)|$$

folytonossági modulus nullához tart. Könnyen látható, hogy az U kiszámolásakor elegendő a racionális időpontokat venni, így az U mérhető.

A közös finomítás

Tekintsük az I_n és I_m integrálokhoz tartozó felosztások közös finomítását. Világos, hogy az $I_n - I_m$ felírható

$$\sum_i \left(X\left(s_i\right) - X\left(v_i\right)\right)\left(M\left(u_{i+1}\right) - M\left(u_i\right)\right)$$

módon, ahol az $\left(u_i\right)$ az $\left[a, b\right]$ egy partíciója és minden i-re $s_i, v_i \leq u_i$. (Az s_i, v_i persze tartalmazhat ismétlést is.)Világos, hogy az így kapott összeg szintén martingál és az $L^2\left(\Omega\right)$ normájára igaz a korábban bemutatott becslés. (A K persze az $\left|X\left(s_i\right) - X\left(v_i\right)\right|$ közül a legnagyobb.) Az I_n és az I_m közelítő összegekhez tartozó partíciókat elég finomra véve az s_i és a v_i tetszőlegesen közel kerülhet egymáshoz.

A folytonossági modulus nullához tart

A pontonkénti konvergenciából következik a sztochasztikus konvergencia, ezért tetszőleges $\tau, \varepsilon > 0$ számokhoz található olyan A halmaz és $\delta > 0$ szám, hogy $\mathbf{P}(A^c) < \tau$, és ha $\omega \in A$, akkor $U(\omega, \delta) < \varepsilon$. Mivel az $[a, b]$ intervallum felosztása végtelenül finomodik, ezért tetszőleges $\alpha > 0$ számra, elegendően nagy n, m indexekre a Csebisev-egyenlőtlenség miatt

$$\mathbf{P}(|I_n - I_m| > \alpha) \leq \mathbf{P}(A^c) + \mathbf{P}(A \cap \{|I_n - I_m| > \alpha\}) \leq \tau + \frac{\varepsilon^2 L}{\alpha^2}.$$

A jobb oldali kifejezés az ε és a τ megválasztásával tetszőlegesen kicsivé tehető, így az (I_n) sztochasztikusan Cauchy–sorozat.

A folytonossági modulus trajektóriánkénti meghatározása

Megjegyezzük azonban, hogy a bizonyítás pontatlan, ugyanis az $X\chi_A$ függvényhez rendelt lépcsős folyamatra nem alkalmazható a korábbi becslés, ugyanis az így „csonkolt" folyamat nem feltétlenül adaptált! A gondolatmenet azonban könnyen pontosítható. Ha $U(u,\omega,\delta)$ jelöli az $[a,u]$ szakaszon vett folytonossági modulust, akkor evidens módon az $(u,\omega) \mapsto U(u,\omega,\delta)$ folytonos trajektóriájú adaptált folyamat. Ha

$$\tau(\omega) \circeq \inf\{u : U(u,\omega,\delta) \geq \varepsilon\} \wedge b,$$

akkor a τ megállási idő. Ha $\omega \in A$, akkor $\tau(\omega) = b$, így az A halmazon $I_n^\tau - I_m^\tau = I_n - I_m$ és elegendő az A halmazon való „csonkolás" helyett az X^τ megállított folyamatra alkalmazni a becslést és a

$$\begin{aligned}
\mathbf{P}(|I_n - I_m| > \alpha) &\leq \mathbf{P}(A^c) + \mathbf{P}(A \cap \{|I_n - I_m| > \alpha\}) \leq \\
&\leq \tau + \mathbf{P}(|I_n^\tau - I_m^\tau| > \alpha)
\end{aligned}$$

egyenlőtlenséget.

Lokális martingál, lokalizáció

Definition

Valamely L folyamatot lokális martingálnak mondunk, ha megadható olyan megállási időkből álló (τ_n) úgynevezett lokalizációs sorozat, amelyre $\tau_n \nearrow \infty$ és az L^{τ_n} megállított folyamatok mindegyike martingál. Hasonlóan egy L folyamat lokálisan négyzetesen integrálható martingál, ha megadható olyan $\tau_n \nearrow \infty$ lokalizációs sorozat, amelyre az L^{τ_n} négyzetesen integrálható martingál, vagyis amelyre $L^{\tau_n} \in \mathcal{H}^2$ minden n-re. A lokális martingálokat $\mathcal{M}_{\text{loc}}$ a lokálisan négyzetesen integrálható martingálokat $\mathcal{H}^2_{\text{loc}}$ módon szokás jelölni.

Example

Ha w egy Wiener-folyamat, akkor a teljes időtengelyen $w \notin \mathcal{H}^2$, de $w \in \mathcal{H}^2_{\text{loc}}$.

Lokális martingál, lokalizáció

Theorem

Ha az X adaptált sztochasztikus folyamat az $[a,b]$ véges szakaszon majdnem minden ω-ra folytonos és az M lokálisan négyzetesen integrálható martingál, akkor az X az $[a,b]$-én az M szerint Itô–Stieltjes-integrálható.

Elegendő az előző állítás bizonyítását úgy módosítani, hogy az M helyett M^{τ_n}-et írunk és felhasználjuk, hogy a lokalizáció definíciója alapján tetszőleges $\varepsilon > 0$ számhoz ha n elég nagy akkor $\tau_n \geq b$ egy ε valószínűségű halmaztól eltekintve. Másképpen ha n elég nagy akkor egy tetszőlegesen kicsi valószínűségű halmaztól eltekintve az $[a,b]$ szakaszon az M és az M^{τ_n} egybeesik.

Folytonos lokális martingál négyzetesen integrálható

Theorem

Ha M folytonos lokális martingál, X folytonos adaptált folyamat, akkor az

$$\int_a^b X dM$$

sztochasztikus integrál létezik.

Legyen

$$\tau_n \triangleq \inf\{t : |M(t)| \geq n\}.$$

Az M folytonossága miatt $|M^{\tau_n}| \leq n$, vagyis az M lokálisan korlátos, így nyilván lokálisan négyzetesen integrálható, következésképpen alkalmazható az előző állítás.

A sztochasztikus integrálás eredménye lokális martingál

Theorem

Tegyük fel, hogy teljesülnek a szokásos feltételek. Ha az X folytonos valamint adaptált folyamat és az M lokálisan négyzetesen integrálható martingál, akkor létezik olyan lokális martingál, amelyet $X \bullet M$-mel fogunk jelölni, amelyre tetszőleges t esetén

$$(X \bullet M)(t) \overset{m.m.}{=} \int_0^t X dM.$$

Ha az X egyenletesen korlátos és az M négyzetesen integrálható, akkor az $X \bullet M$ nem csak lokális martingál lesz, hanem martingál is.

Szemimartingálok

Definition

Ha az S folyamat felbontható $S = S(0) + L + V$ módon, ahol az L lokálisan négyzetesen integrálható martingál és a V véges változású adaptált folyamat, akkor az S folyamatot szemimartingálnak mondjuk.

Theorem

Ha az X adaptált sztochasztikus folyamat az $[a, b]$ véges szakaszon majdnem minden ω-ra folytonos és az S szemimartingál, akkor az X az $[a, b]$-én az S szerint Itô–Stieltjes-integrálható.

Parciális integrálás formulája

A sztochasztikus integrált csak folytonos integrandus esetén értelmeztük, ezért fel kell tételezni, hogy a formulában szereplő két folyamat folytonos szemimartingál.

Theorem (Parciális integrálás)

Ha X és Y folytonos szemimartingálok, akkor tetszőleges t időpont esetén

$$X(t)\,Y(t) - X(0)\,Y(0) = \int_0^t XdY + \int_0^t YdX + [X,Y](t),$$

ahol $[X,Y]$ a két szemimartingál kvadratikus keresztvariációja. A keresztvariáció a t időpontban az

$$\sum_i \left(X\left(t_{i+1}^{(n)} \wedge t\right) - X\left(t_i^{(n)} \wedge t\right)\right)\left(Y\left(t_{i+1}^{(n)} \wedge t\right) - Y\left(t_i^{(n)} \wedge t\right)\right)$$

szorzatösszeg sztochasztikus konvergenciában vett határértéke.

A Wiener-folyamat kvadratikus variációja

Example

A Wiener-folyamat kvadratikus variációja a $[0, t]$ intervallumon éppen t.

Legyen w egy Wiener-folyamat és legyen $\left(t_k^{(n)}\right)$ az $[a, b]$ szakasz egy partíciója. Ha $\Delta w\left(t_k^{(n)}\right) \mathrel{\overset{\circ}{=}} w\left(t_k^{(n)}\right) - w\left(t_{k-1}^{(n)}\right)$, akkor a Wiener-folyamat definíciója alapján

$$\mathbf{E}\left(\sum_k \left(\Delta w\left(t_k^{(n)}\right)\right)^2\right) = \sum_k \mathbf{D}^2\left(\Delta w\left(t_k^{(n)}\right)\right) = \sum_k (t_k - t_{k-1}) = b - a.$$

A Wiener-folyamat kvadratikus variációja

A w független növekményű és a növekmények várható értéke nulla, ezért, ha a $\left(t_k^{(n)}\right)$ felosztás finomsága nullához tart, akkor

$$\left\|\sum_k \left(\Delta w\left(t_k^{(n)}\right)\right)^2 - (b-a)\right\|_2^2 = \mathbf{D}^2\left(\sum_k \left(\Delta w\left(t_k^{(n)}\right)\right)^2\right) =$$

$$= \sum_k \mathbf{D}^2\left(\left(\Delta w\left(t_k^{(n)}\right)\right)^2\right) \leq \sum_k \mathbf{E}\left(\left(\Delta w\left(t_k^{(n)}\right)\right)^4\right) =$$

$$= \mathbf{E}\left((N(0,1))^4\right)\sum_k\left(\sqrt{t_k^{(n)} - t_{k-1}^{(n)}}\right)^4 = \sum_k 3\cdot\left(t_k^{(n)} - t_{k-1}^{(n)}\right)^2 \leq$$

$$\leq 3\cdot(b-a)\cdot\max_k\left(t_k^{(n)} - t_{k-1}^{(n)}\right) \to 0.$$

Mivel az $L^2(\Omega)$-ban való konvergenciából következik a sztochasztikus konvergencia ezért a w kvadratikus variációja az $[a,b]$ szakaszon éppen $b-a$.

Normális eloszlás negyedik momentuma

A számolás során kihasználtuk, hogy a standard normális eloszlás negyedik momentuma éppen 3. Valóban

$$\begin{aligned}
\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} x^4 \exp\left(-\frac{x^2}{2}\right) dx &= \frac{2}{\sqrt{2\pi}}\int_{0}^{\infty} x^4 \exp\left(-\frac{x^2}{2}\right) dx = \\
&= \frac{2}{\sqrt{2\pi}}\int_{0}^{\infty} 4y^2 \exp\left(-y\right) \frac{1}{\sqrt{2y}} dy = \\
&= \frac{4}{\sqrt{\pi}}\int_{0}^{\infty} y^{3/2} \exp\left(-y\right) dy = \\
&= \frac{4}{\sqrt{\pi}}\Gamma\left(\frac{5}{2}\right) = \frac{4}{\sqrt{\pi}}\frac{3}{2}\frac{1}{2}\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = 3.
\end{aligned}$$

Polaritási formula

További kvadratikus variációk kiszámolását teszi lehetővé az úgynevezett polaritási formula.

Theorem

Ha L tetszőleges lokális martingál, akkor $[X \bullet L] = X^2 \bullet [L]$. Hasonlóan, ha M és N két lokális martingál, akkor

$$[X \bullet M, Y \bullet N] = XY \bullet [M, N].$$

Polaritási formula heurisztikus indoklása

A formula bizonyítása nagyon messze vezetne, itt csak egy heurisztikus indoklást mutatunk be: A kvadratikus variáció definíciója alapján

$$[X \bullet L] \approx \sum_k ((X \bullet L)(t_k) - (X \bullet L)(t_{k-1}))^2 .$$

A sztochasztikus integrál a közelítő összegek határértéke, így egy igen kicsi intervallumon az integrál megváltozása éppen egy darab közelítő „téglalap" vagyis éppen $X(t_{k-1})(L(t_k) - L(t_{k-1}))$. Tehát

$$\begin{aligned} [X \bullet L] &\approx \sum_k (X(t_{k-1})(L(t_k) - L(t_{k-1})))^2 = \\ &= \sum_k X(t_{k-1})^2 (L(t_k) - L(t_{k-1}))^2 . \end{aligned}$$

Polaritási formula heurisztikus indoklása

Ugyanakkor az $(L(t_k) - L(t_{k-1}))^2$ éppen a $[L]$ kvadratikus variáció növekményének egy közelítése, így

$$[X \bullet L] \approx \sum_k X(t_{k-1})^2 ([L](t_k) - [L](t_{k-1})).$$

Vegyük észre, hogy ez a szorzatösszeg éppen az $X^2 \bullet [L]$ integrál egy közelítő összege, amiből a polaritási formula már „világos“.

Polaritási formula heurisztikus indoklása

Hasonlóan kell igazolni az általános formulát:

$$\begin{aligned}
[X \bullet M, Y \bullet N] &\approx \sum_k \Delta (X \bullet M)(t_k) \Delta (Y \bullet N)(t_k) = \\
&= \sum_k X(t_k) \Delta M(t_k) Y(t_k) \Delta N(t_k) = \\
&= \sum_k X(t_j) Y(t_k) \Delta N(t_k) \Delta M(t_k) = \\
&= \sum_k X(t_j) Y(t_k) \Delta [N, M](t_k) \approx \\
&\approx XY \bullet [N, M].
\end{aligned}$$

Theorem

Tegyük fel, hogy a $Z \stackrel{\circ}{=} X \bullet M$ *sztochasztikus integrál létezik. Az* $Y \bullet Z$ *sztochasztikus integrál pontosan akkor létezik, ha létezik az* $XY \bullet M$ *integrál és érvényes a következő asszociativitási formula:*

$$Y \bullet (X \bullet M) = (YX) \bullet M.$$

Másképpen fogalmazva integrálfüggvény szerinti integrálás esetén az integrálok elvégzésének sorrendje „átrendezhető".

Asszociativitási szabály heurisztikus igazolása

Tegyük fel, hogy $S(u) \overset{\circ}{=} \int_0^u X(s)\, dM(s)$, és tekintsük az $\int_0^t Y(u)\, dS(u)$ integrált. Az integrál a közelítő összegek határértéke, így

$$\int_0^t Y(u)\, dS(u) \approx \sum_k Y(u_{k-1})\, \Delta S(u_k).$$

Az $S(u)$ integrálfüggvény $\Delta S(u_k)$ növekményei az S alakja miatt közelíthetőek az $X(u_k)\, \Delta M(u_k)$ „téglalapokkal", így

$$\int_0^t Y(u)\, dS(u) \approx \sum_k Y(u_k)\, X(u_k)\, \Delta M(u_k) \approx \int_0^t Y(u)\, X(u)\, dM(u).$$

Sztochasztikus differenciálok

A sztochasztikus folyamatok irodalomban gyakran minden további említés nélkül használni szokás a formulát. Ha az integrálokat differenciális formában írjuk fel és $dS = XdM$, akkor a $\int_0^t Y(u)\, dS(u)$ integrál az $YdS = Y(XdM) = (YX)\, dM$ formális szabály szerint alakítható, vagyis formálisan a differenciális alakban felírt kifejezés átzárójelezhető.

Sűrűségfüggvény szerinti integrálás és az asszociativitási formula

A formula érvényes minden fajta integrálra, így a Stieltjes- vagy az absztrak mérték szerinti integrálokra egyaránt használható. Emlékeztettünk, ha valamely G súlyfüggvény deriválható és a G deriváltja, g, a G sűrűségfüggvénye, akkor

$$\int_a^b f(x)\, dG(x) = \int_a^b f(x)\, g(x)\, dx.$$

Ezt a formulát szokás a különböző momentumok kiszámolására használni az elemi valószínűségszámításban. Az asszociativitási szabály éppen ennek a sűrűségfüggvényre vonatkozó formulának az általánosítása sztochasztikus integrálok esetére.

Megállítási szabály

A sztochasztikus integrál egy további fontos tulajdonsága a következő:

Theorem

Ha az $X \bullet M$ sztochasztikus integrál létezik és τ tetszőleges megállási idő, akkor

$$(X \bullet M)^{\tau} = X \bullet M^{\tau} = X\chi\left((0,\tau]\right) \bullet M.$$

A formula tartalma ismét nyilvánvaló. Ha az M integrátort megállítjuk a τ időpontban, akkor a τ után az M növekményei már nullák, ugyanis az M a τ időpont után konstans. Így az $X \bullet M$ a τ után már nem nő, vagyis az így kapott integrál éppen az $(X \bullet M)^{\tau}$.

Miért is lesz a sztochasztikus integrál lokális martingál?

Legyen X és M folytonos. Legyen

$$\tau_n \mathrel{\hat{=}} \inf \{t : |X(t)| \geq n\} \wedge \inf \{t : |M(t)| \geq n\}.$$

A folytonosság miatt világos, hogy $|X^{\tau_n}| \leq n$ és $|M^{\tau_n}| \leq n$, így $X\chi((0, \tau_n])$ korlátos, M^{τ_n} négyzetesen integrálható martingál. Így $X\chi((0, \tau_n]) \bullet M^{\tau_n}$ martingál. De a megállítási szabály miatt

$$(X \bullet M)^{\tau_n} = X\chi((0, \tau_n]) \bullet M^{\tau_n},$$

vagyis az $X \bullet M$ lokális martingál.

A fő probléma

A sztochasztikus analízis legfőbb technikai problémája:

Mikor lesz egy lokális martingál valódi martingál?

A kérdés természetesen főleg azért érdekes, mert tudni szeretnénk, hogy egy sztochasztikus integrál mikor lesz martingál, ugyanis ilyenkor a sztochasztikus integrál várható értéke nulla lesz minden t-re. Általában ezt csak akkor tudjuk garantáni, ha garantálni tudjuk, hogy az integrál valódi martingál.

Lokális martingálok és a várható érték

Ha L lokális martingál és (τ_n) a megfelelő lokalizációs sorozat, akkor

$$\mathbf{E}(L^{\tau_n}(t)|\mathcal{F}_s) = \mathbf{E}(L(t \wedge \tau_n)|\mathcal{F}_s) = L(s \wedge \tau_n) = L^{\tau_n}(s).$$

valahányszor $t > s$. Várható értéket véve

$$\mathbf{E}(L(t \wedge \tau_n)) = \mathbf{E}\left(L(s \wedge \tau_n)\right).$$

Ha $n \nearrow \infty$, akkor mivel a lokalizáció definíciója miatt $\tau_n \nearrow \infty$, ezért minden kimenetelre $\lim_{n\to\infty} L^{\tau_m}(s) = L(s)$. A kérdés csak az, hogy az egyenlőség másik oldalán mikor vihető be a határérték a (feltételes) várható értékbe. Vagyis a pontonkénti konvergencia mellett mikor van $L^1(\Omega)$ konvergencia.

Lokális martingálok és a várható érték

Erre számos általános tétel ismert, a legegyszerűbb talán, ha az $L(t)$-nek t-szerint van integrálható majoránsa. Az integrálható majoráns létezésének szükséges és elegendő feltétele, hogy a

$$\sup_t |L(t)|$$

változó integrálható legyen. Erre vonatkozóan hasznos az úgynevezett Davis-féle egyenlőtlenség, amely a $\sup_t |L(t)|$ integrálhatóságának szükséges és elegendő feltételét adja meg a folyamat kvadratikus variációjának segítségével:

Davis-egyenlőtlenség

Theorem

Vannak olyan c és C univerzális konstansok, hogy tetszőleges L lokális martingál amelyre $L(0) = 0$ és τ megállási idő esetén

$$c \left\| \sqrt{[L](\tau)} \right\|_1 \leq \left\| \sup_{t \leq \tau} |L(t)| \right\|_1 \leq C \left\| \sqrt{[L](\tau)} \right\|_1 ,$$

ahol a norma a megfelelő változók $L^1(\Omega)$ térben vett normáját jelöli.

A Doléans mérték és a négyzetesen integrálható integrandusok

Definition

Definíció szerint $X \in \mathcal{L}^2(M)$, ha $\mathbf{E}\left(\int_0^\infty X^2 d[M]\right) < \infty$. A

$$\mu(B) \circeq \mathbf{E}\left(\int_0^\infty \chi_B d[M]\right)$$

mértéket az M Doléans-mértékének mondjuk. $\mathcal{L}^2(M)$ éppen a Doléans-mérték szerint négyzetesen integrálható folyamatok.

A belső integrál az $[M]$ monoton növekedő folyamat trajektóriánkénti integrálja egy nem negatív folyamatnak: minden ω kimenetelre ki kell számolni egy-egy integrált és az így kapott valószínűségi változónak kell venni a várható értékét. Természetesen az $\mathbb{R}_+$ időtengely helyett tetszőleges más intervallum is írható. Ilyenkor az integrálokat az adott időszakaszra kell kiszámolni.

Négyzetesen integrálható folyamatok integrálja martingál

Theorem

Ha M tetszőleges lokális martingál és $X \in \mathcal{L}^2(M)$, akkor az $X \bullet M$ sztochasztikus integrál martingál.

A Davis-egyenlőtlenség szerint az $X \bullet M$ sztochasztikus integrálnak pontosan akkor van integrálható majoránsa, ha

$$\left\| \sqrt{[X \bullet M](\infty)} \right\|_1 < \infty.$$

A polaritási formula és a Jensen-egyenlőtlenség szerint:

$$\mathbf{E}\left(\sqrt{[X \bullet M](\infty)}\right) \leq \sqrt{\mathbf{E}([X \bullet M](\infty))} \leq$$

$$\leq \sqrt{\mathbf{E}(X^2 \bullet [M](\infty))} \doteq \sqrt{\mathbf{E}\left(\int_0^\infty X^2 d[M]\right)} < \infty.$$

Az exponenciális Wiener-folyamat integrálja martingál.

Example

Ha w Wiener-folyamat, akkor az $\exp(w) \bullet w$ sztochasztikus integrál martingál.

Elegendő megmutatni, hogy tetszőleges $[0, t]$ szakaszon $\exp(w) \in \mathcal{L}^2(w)$. Emlékeztetünk, hogy a w kvadratikus variációja éppen $[w](s) = s$, így

$$\mathbf{E}\left(\int_0^t (\exp(w(s)))^2\, ds\right) = \mathbf{E}\left(\int_0^t \exp(2w(s))\, ds\right) =$$

$$= \int_0^t \mathbf{E}(\exp(2w(s)))\, ds = \int_0^t \exp\left(\frac{\left(2\sqrt{s}\right)^2}{2}\right) ds < \infty,$$

ahol természetesen az utolsó sorban felhasználtuk a lognormális eloszlás várható értékére vonatkozó formulát, illetve azt, hogy a $w(s)$ eloszlása $N\left(0, \sqrt{t}\right)$.