Független növekményű folyamatok

Miért szépek a Lévy-folyamatok

Medvegyev Péter

2008

Definition

Az X sztochasztikus folyamat független növekményű, ha

1. $\mathbf{P}(X(0) = 0) = 1$,
2. a trajektóriák jobbról regulárisak, vagyis jobbról folytonosak, és minden időpontban van bal oldali határértékük, és
3. minden $0 \leq t_0 < t_1 < t_2 < \ldots < t_n$ időpont sorozatra az

$$X(t_0), X(t_1) - X(t_0), \ldots, X(t_n) - X(n_{k-1})$$

növekmények függetlenek. Ha a folyamathoz rendelt $\mathcal{F}$ filtráció adott, akkor a folyamatot független növekményűnek mondjuk, ha minden t-re és $h > 0$ számra az $X(t+h) - X(t)$ növekmény független az $\mathcal{F}_t$ σ-algebrától.

Független értékek

Theorem

Ha a $[0,1]$ *intervallumon értelmezett* X *sztochasztikus folyamat*

1. *stacionárius,*
2. *a különböző időpontokhoz tartozó valószínűségi változók függetlenek,*
3. $\mathbf{E}\left(X\left(t\right)\right) = 0$ *és* $0 < \mathbf{D}\left(X\left(t\right)\right) < \infty$,

akkor az $X\left(t,\omega\right)$ *kétváltozós függvény nem lehet mérhető.*

Független értékek

Tegyük fel, hogy $\mathbf{E}\left(X\left(t\right)\right) = 0$, $\mathbf{D}\left(X\left(t\right)\right) = 1$ és az X mint kétváltozós függvény mérhető. A Cauchy-egyenlőtlenség alapján

$$\int_0^1 \int_0^1 \int_\Omega \left|X\left(t,\omega\right) X\left(s,\omega\right)\right| d\mathbf{P}\left(\omega\right) dsdt \leq$$
$$\leq \int_0^1 \int_0^1 \mathbf{D}\left(X\left(t\right)\right) \mathbf{D}\left(X\left(s\right)\right) dsdt = 1,$$

így mérhetőségre tett feltétel miatt használható a Fubini-tétel.

Független értékek

$$\mathbf{E}\left(\left(\int_0^1 X(t,\omega)\,dt\right)^2\right) = \mathbf{E}\left(\int_0^1 X(t,\omega)\,dt \int_0^1 X(t,\omega)\,dt\right) =$$

$$= \mathbf{E}\left(\int_0^1 \int_0^1 X(t,\omega)\,X(s,\omega)\,dsdt\right) =$$

$$= \int_0^1 \int_0^1 \mathbf{E}\left(X(t,\omega)\,X(s,\omega)\right) dsdt = 0$$

ugyanis a függetlenség miatt, ha $s \neq t$ akkor

$$\mathbf{E}\left(X(t)\,X(s)\right) = \mathbf{E}\left(X(t)\right)\mathbf{E}\left(X(s)\right) = 0.$$

Ezért az $\int_0^1 X(t,\omega)\,dt$ változó majdnem minden ω-ra nulla.

Független értékek

A gondolatmenetet a $[0,1]$ helyett tetszőleges I racionális végpontú intervallumra megismételve megmutatható, hogy létezik olyan N_1 nullmértékű halmaz, hogy ha $\omega \notin N_1$ akkor minden I racionális intervallumra $\int_I X(t,\omega)\,dt = 0$. A Fubini-tétel alapján

$$\mathbf{E}\left(\int_0^1 X^2 d\lambda\right) = \int_0^1 \mathbf{E}\left(X^2\right) d\lambda = \int_0^1 \mathbf{D}^2(X)\, d\lambda = 1,$$

ezért egy nullmértékű N_2 halmazon kívül minden ω-ra $\int_0^1 X(t,\omega)^2\,dt < \infty$. Mivel véges mértékű halmazokon a négyzetes integrálhatóságból következik az integrálhatóság, ezért az $X(t,\omega)$ t szerint integrálható, következésképpen az $F(s) \overset{\circ}{=} \int_0^s X(t,\omega)\,dt$ integrálfüggvény folytonos, így ha az F a racionális végpontú intervallumokon nulla, akkor az F nulla.

Független értékek

Az intervallumok π rendszert alkotnak, így a monoton osztály tétel miatt az

$$\nu(B) \overset{\circ}{=} \int_B X(t,\omega)\, dt$$

mérték is nulla. Így ha $\omega \notin N_1 \cup N_2$, akkor majdnem minden t-re $X(t,\omega) = 0$, következésképpen

$$0 = \mathbf{E}\left(\int_0^1 X^2(t)\, dt\right) = \int_0^1 \mathbf{E}\left(X^2(t)\right) dt = \int_0^1 \mathbf{D}^2(X(t))\, dt = 1,$$

ami lehetetlen.

Független növekményű folyamatok ugrásai

Example

Független növekményű folyamatnak lehetnek fix ugrásai.

Legyen ξ $1/2$ valószínűséggel ± 1 az

$$X(t) \circeq \begin{cases} 0 & \text{ha} \quad t < 1 \\ \xi & \text{ha} \quad t \geq 1 \end{cases}$$

folyamat triviálisan független növekményű. Az X Fourier transzformáltja.

$$\varphi(t, u) = \begin{cases} 1 & \text{ha} \quad t < 1 \\ \cos u & \text{ha} \quad t \geq 1 \end{cases}$$

A példából látható, hogy a $\varphi(t, u)$ lehet nulla, de a nulla értéket ugrással éri el.

Sztochasztikusan folytonos folyamatok ugrásai

Megjegyezzük, hogy mivel minden független növekményű folyamat jobbról reguláris ezért egy független növekményű folyamat pontosan akkor folytonos a sztochasztikus konvergenciában, ha a folyamat bármely időpontban csak nulla valószínűséggel ugorhat. Ha valamely időpontban az ugrás valószínűsége pozitív, akkor azt szokás mondani, hogy a folyamatnak fix ugrása van az adott időpontban.

Sztochasztikusan folytonos folyamatok Fourier-transzformáltjai

Theorem

Ha az X független növekményű folyamat sztochasztikus konvergenciában folytonos, akkor az

$$\varphi_t(u) \stackrel{\circ}{=} \varphi(t, u) \stackrel{\circ}{=} \mathbf{E}(\exp(iuX(t)))$$

soha sem lehet nulla.

Rögzítsük az u paramétert. Mivel az X valószínűségben folytonos,ezért a $\varphi(u, t)$ folytonos t-ben. Legyen

$$t_0(u) \stackrel{\circ}{=} \inf\{t : \varphi(u, t) = 0\}.$$

Megmutatjuk, hogy $t_0(u) = \infty$. Definíció szerint $X(0) = 0$ így $\varphi(u, 0) = 1$, és mivel a $\varphi(u, t)$ a t szerint folytonos nyilvánvalóan $t_0(u) > 0$.

Sztochasztikusan folytonos folyamatok Fourier-transzformáltjai

Legyen
$$h(u, s, t) \stackrel{\circ}{=} \mathbf{E}(\exp(iu(X(t) - X(s)))).$$
Az X független növekményű, így ha $s < t$, akkor
$$\varphi(u, t) = \varphi(u, s)h(u, s, t).$$
Az X jobbról való folytonossága miatt
$$\varphi(u, t_0(u)) = 0.$$

Sztochasztikusan folytonos folyamatok Fourier-transzformáltjai

Ha $t_0(u) < \infty$, akkor mivel az X rendelkezik bal oldali határértékkel a $\varphi(u, t_0(u)-)$ határérték értelmes. Megmutatjuk, hogy az értéke nem nulla. Az "exponenciális" egyenlőség miatt, ha $s < t_0(u) < \infty$, akkor

$$\varphi(u, t_0(u)-) = \varphi(u, s)h(u, s, t_0(u)-)$$

A $t_0(u)$ definíciója miatt $\varphi(u, s) \neq 0$ így ha $\varphi(u, t_0(u)-) = 0$, akkor $h(u, s, t_0(u)-) = 0$ minden $s < t_0(u)$ esetén..

Sztochasztikusan folytonos folyamatok Fourier-transzformáltjai

Ebből

$$\begin{aligned} 0 &= \lim_{s \nearrow t_0(u)} h(u, s, t_0(u)-) = \\ &= \lim_{s \nearrow t_0(u)} \mathbf{E}(\exp(iuX(t_0(u)-) - iuX(s))) = \\ &= \mathbf{E}(\exp(0)) = 1, \end{aligned}$$

ami lehetetlen. Következésképpen

$$0 = \varphi(u, t_0(u)) = \varphi(u, t_0(u)-) \neq 0,$$

ami szintén lehetelen, ugyanis a φ folytonos.

A jobbról reguláris függvények tere

Definition

A továbbiakban $D(\mathbb{R}_+)$ jelöli az $\mathbb{R}_+$ időtengelyen értelmezett jobbról reguláris függvények terét. A mérhetőséget az $f \mapsto f(t)$ pont-funkcionálok által generált σ-algebrát értjük, vagyis azt a legszűkebb σ-algebrát, amelyre nézve az $f \mapsto f(t)$ funkcionálok mindegyike mérhető. Az így kapott σ-algebrát $\mathcal{H}$-val jelöljük.

Világos, hogy a $\mathcal{H}$ σ-algebrát az

$$\{f \in D(\mathbb{R}_+) : f(t_1) \in B_1, \ldots, f(t_n) \in B_n\}$$

alakú halmazok generálják, ahol $B_1, B_2, \ldots, B_n$ Borel-mérhető halmazok.

Example

A $\Phi(f) \overset{\circ}{=} \sup_t |f(t)|$ mérhető a $\mathcal{H}$-ra nézve.

Mivel a suprémumot elegendő a racionális időpontokban venni, ezért

$$\{\Phi(f) \leq \lambda\} = \{f : |f(r)| \leq \lambda, r \in \mathbb{Q}\} = \cap_{r \in \mathbf{Q}} \{|f(r)| \leq \lambda\} \in \mathcal{H}.$$

Erős Markov-tulajdonság

Ha az X egy jobbról reguláris sztochasztikus folyamat, akkor az $X(t)$ minden t-re mérhető, ezért az $\omega \mapsto X(\omega)$ egy $(\Omega, \mathcal{A}) \to D(\mathbb{R}_+, \mathcal{H})$ mérhető leképezés, ugyanis az inverzhalmazok mérhetőségét elegendő a generáló σ-algebrára ellenőrizni. Így az $\omega \mapsto X(\omega) \mapsto \Phi(X(\omega))$ egy valószínűségi változó az $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$ tér felett.

Theorem

Legyen X független növekményű folyamat és tegyük fel, hogy az X a sztochasztikus konvergenciában folytonos. Ha Φ nem negatív $\mathcal{H}$-mérhető funkcionál a $D(\mathbb{R}_+)$ tér felett, akkor tetszőleges $\tau < \infty$ megállási időre

$$\mathbf{E}(\Phi(X^*)|\mathcal{F}_\tau) = \mathbf{E}(\Phi(X_s^*))|_{s=\tau}$$

ahol $X^*(t) \doteq X(\tau + t) - X(\tau)$ és $X_s^*(t) \doteq X(s + t) - X(s)$.

A megállási opciókról szóló tétel

Legyen $\varphi(u,t)$ az $X(t)$ Fourier-transzformáltja. Mivel az X a sztochasztikus konvergencia szerint folytonos a $\varphi(u,t) \neq 0$ és értelmes a

$$Z(u,t) \stackrel{\circ}{=} \frac{\exp(iuX(t))}{\varphi(u,t)}$$

exponenciális martingál. Legyen τ korlátos megállási idő. A megállási opciókról szóló tétel miatt

$$\mathbf{E}(Z(u,\tau+s)|\mathcal{F}_\tau) = Z(u,\tau).$$

Átosztás után

$$\mathbf{E}(\frac{Z(u,\tau+s)}{Z(u,\tau)}|\mathcal{F}_\tau) = 1,$$

vagyis

$$\mathbf{E}(\exp(iu(X(\tau+t)-X(\tau)))|\mathcal{F}_\tau) = \frac{\varphi(u,\tau+t)}{\varphi(u,\tau)}.$$

Az állítás teljesül a pontfunkcionálok exponenciális függvényére

A $\varphi(u, \tau + t)$ nyilván $\mathcal{F}_\tau$-mérhető. Legyen $\Phi(f) \stackrel{\circ}{=} \exp(iuf(t))$.

$$\mathbf{E}(\Phi(X^*) \, | \mathcal{F}_\tau) = \mathbf{E}(\exp(iuX^*(t)) | \mathcal{F}_\tau) \stackrel{\circ}{=}$$
$$\stackrel{\circ}{=} \mathbf{E}(\exp(iu(X(\tau + t) - X(\tau))) | \mathcal{F}_\tau) =$$
$$= \frac{\varphi(u, \tau + t)}{\varphi(u, \tau)} = \frac{\varphi(u, s + t)}{\varphi(u, s)} \, |_{s=\tau} =$$
$$= \frac{\varphi(u, s) \mathbf{E}(\exp(iu(X(t + s) - X(s))))}{\varphi(u, s)} \, |_{\tau=s} =$$
$$= \mathbf{E}(\exp(iu(X_s^*(t)))) |_{s=\tau} = \mathbf{E}(\Phi(X_s^*)) \, |_{s=\tau}.$$

Vagyis az állítás teljesül, ha $\Phi(f) \stackrel{\circ}{=} \exp(iuf(t))$ funkcionálra.

Kiterjesztés tetszőleges megállási időre

Ha a τ nem korlátos, akkor a $\tau_n \circeq \tau \wedge n$ egy korlátos megállási idő. Ha $A \in \mathcal{F}_\tau$, akkor

$$A \cap \{\tau \leq n\} \in \mathcal{F}_{\tau_n}.$$

Ehhez ellenőrizni kell, hogy minden t-re

$$A \cap \{\tau \leq n\} \cap \{\tau_n \leq t\} \in \mathcal{F}_t.$$

Ha $t > n$, akkor $\{\tau_n \leq t\} = \Omega$ és így a metszetben elhagyható

$$A \cap \{\tau \leq n\} \in \mathcal{F}_n \subseteq \mathcal{F}_t.$$

Ha $t \leq n$, akkor $\{\tau_n \leq t\} = \{\tau \leq t\}$ és

$$A \cap \{\tau \leq n\} \cap \{\tau \leq t\} = A \cap \{\tau \leq t\} \in \mathcal{F}_t.$$

Kiterjesztés tetszőleges megállási időre

Ha $X_n^* \circeq X(\tau_n + t) - X(\tau_n)$ és $\Phi(f) \circeq \exp(iuf(t))$ akkor a már belátottak szerint

$$\int_{A \cap \{\tau \leq n\}} \Phi(X_n^*) \, d\mathbf{P} = \int_{A \cap \{\tau \leq n\}} \mathbf{E}(\Phi(X_s^*)) \mid_{s=\tau_n} d\mathbf{P}.$$

Mivel $\tau < \infty$, ezért minden ω-ra ha n elég nagy $\tau_n(\omega) = \tau(\omega)$, így

$$X(\tau_n + t) - X(\tau_n) \to X(\tau + t) - X(\tau).$$

A majorált konvergencia tétel szerint

$$\int_A \Phi(X^*) \, d\mathbf{P} = \int_A \mathbf{E}(\Phi(X_s^*)) \mid_{s=\tau} d\mathbf{P}.$$

Következésképpen, felhasználva, hogy a jobb oldali integrandus $\mathcal{F}_\tau$-mérhető, elhagyhatjuk a korlátosságára vonatkozó feltételt.

Pontfunkcionálokra az állítás igaz

A monoton osztály tétel miatt tetszőleges B Borel-mérhető halmaz esetén

$$\mathbf{E}(\chi_B(X^*(t))|\mathcal{F}_\tau) = \mathbf{E}(\chi_B(X_s^*(t)))|_{s=\tau}$$

vagyis az állítás a $\Phi(f) \triangleq \chi_B(f(t))$ esetén teljesül. Ebből átvihető lépcsős függvényekre, illetve tetszőleges h nem negatív Borel-mérhető esetén az állítás teljesül, ha $\Phi(f) \triangleq h(f(t))$. A szokásos módon több-dimenziós trigonometrikus polinómokat használva a monoton osztály tétellel kiterjeszthetjük az állítást minden korlátos véges sok ponttól függő funkcionálokra, majd korlátos $\mathcal{H}$-mérhető függvényre. Végezetül a monoton konvergencia tétellel az állítás átvihető minden $\mathcal{H}$-mérhető nem negatív fonkcionálokra.

Több dimenziós polinómokra való áttérés

Legyen $a < b$ és tekintsük a $\Phi(f) \circeq \exp(iuf(a))\exp(ivf(b))$ funkcionált. Világos, hogy az $\widetilde{X}(t) \circeq X(t+a) - X(a)$ független növekményű az $\widetilde{\mathcal{F}}_t \circeq \mathcal{F}_{t+a}$ filtrációra nézve.

$$
\begin{aligned}
&\mathbf{E}(\Phi(X^*)\,|\mathcal{F}_\tau) = \mathbf{E}\left(\mathbf{E}(\Phi(X^*)\,|\mathcal{F}_{\tau+a})|\mathcal{F}_\tau\right) \circeq \\
&\circeq \mathbf{E}\left(\mathbf{E}\exp(iuX^*(a))\exp(ivX^*(b))\,|\mathcal{F}_{\tau+a})|\mathcal{F}_\tau\right) = \\
&= \mathbf{E}\left(\exp(iuX^*(a))\,\mathbf{E}\left(\exp(ivX^*(b))\,|\mathcal{F}_{\tau+a}\right)|\mathcal{F}_\tau\right) = \\
&= \mathbf{E}\left(\exp(i(u+v)X^*(a))\,\mathbf{E}\left(\exp(iv(X(\tau+b)-X(\tau+a)))\,|\mathcal{F}_{\tau+a}\right)|\right. \\
&= \mathbf{E}\left(\exp(i(u+v)(X^*(a)))\,\mathbf{E}\left(\exp(ivX_s^*(b-a))\right)|_{s=\tau+a}|\mathcal{F}_\tau\right) = \\
&= \mathbf{E}\left(\exp(ivX_s^*(b-a))\right)|_{s=\tau+a}\mathbf{E}\left(\exp(i(u+v)X^*(a))\,|\mathcal{F}_\tau\right) = \\
&= \mathbf{E}\left(\exp(ivX_s^*(b-a))\right)|_{s=\tau+a}\mathbf{E}\left(\exp(i(u+v)X_s^*(s))\right)|_{s=\tau} = \\
&= \mathbf{E}\left(\exp(iv(X(s+b)-X(s+a)))\exp(i(u+v)X_s^*(a))\right)|_{s=\tau} = \\
&= \mathbf{E}\left(\exp(iv(X(s+b)-X(s)))\exp(iu(X(s+a)-X(s)))\right)|_{s=\tau},
\end{aligned}
$$

vagyis a szorzatra is igaz. Hasonlóan igazolható, hogy tetszőleges szorzatra is igaz.

Lévy-folyamatok esete

Ha az X Lévy-folyamat és $\Phi(f) \circeq \exp(iuf(t))$, akkor az $\mathbf{E}(\Phi(X_s^*))$ független az s-től amiből a teljes várható érték tétel felhasználásával

$$\mathbf{E}(\exp(iuX^*(t))) = \mathbf{E}(\exp(iuX(t))),$$

így az $X^*(t)$ eloszlása azonos az $X(t)$ eloszlásával. A monoton osztály tételből azonnal következik, hogy ha valamely változó feltételes Fourier-transzformáltja determinisztikus, akkor a változó független a feltételtől: A

$$\mathbf{E}(\exp(iuX^*(t)) \mid \mathcal{F}_\tau) = \mathbf{E}(\exp(iuX(t))) = \mathbf{E}(\exp(iuX^*(t)))$$

sorból

$$\mathbf{E}(\chi_B(X^*(t)) \mid \mathcal{F}_\tau) = \mathbf{E}(\chi_B(X^*(t)))$$

amiből

$$\mathbf{P}(F \cap \{X^*(t) \in B\}) = \int_F \chi_B(X^*(t))\, d\mathbf{P} = \mathbf{P}(F)\,\mathbf{P}(X^*(t) \in B).$$

A regressziós függvény meghatározása

Theorem

Az előző állítás feltételeinek teljesülése esetén

$$\mathbf{E}(\Phi(X^*) \mid \tau = s) = \mathbf{E}(\Phi(X_s^*)).$$

Megjegyezzük, hogy az $s \mapsto \mathbf{E}(\Phi(X_s^*))$ függvény Borel-mérhető. Ezt az $s \mapsto \mathbf{E}(\exp iu(X(s+t) - X(s))))$ esetén, felhasználva, hogy az X jobbról reguláris, könnyen indokolhatjuk, az általános eset pedig ismételten a monoton osztály tétel közvetlen folyománya. Így

$$\begin{aligned}
\mathbf{E}(\Phi(X^*)|\sigma(\tau)) &= \mathbf{E}\left(\mathbf{E}(\Phi(X^*) \mid \mathcal{F}_\tau|\sigma(\tau))\right) = \\
&= \mathbf{E}\left(\mathbf{E}(\Phi(X_s^*))|_{s=\tau} \mid \sigma(\tau)\right) = \\
&= \mathbf{E}(\Phi(X_s^*))|_{s=\tau},
\end{aligned}$$

amiből a regressziós függvény definíciója miatt az egyenlőség evidens.

Korlátos ugrások és a momentumok létezése

Theorem

Ha az X független növekményű folyamat és az X valószínűségben folytonos, és az X ugrásai nem nagyobbak egy fix c konstansnál, akkor az X momentumai minden véges időszak alatt egyenletesen korlátosak, vagyis ha $t < \infty$, akkor

$$\mathbf{E}(|X^m(s)|) \leq k(m,t) < \infty, \quad s \in [0,t].$$

Korlátos ugrások és a momentumok létezése

Rögzítsük a t időpontot. Az X jobbról reguláris, így minden trajektóriája minden véges szakaszon korlátos. Ebből következően

$$\sup_{s \leq 2t} |X(s)| < \infty.$$

Így ha b elegendően nagy, akkor

$$\mathbf{P}\left(\sup_{s \leq 2t} |X(s)| > \frac{b}{2}\right) \leq q < 1.$$

Korlátos ugrások és a momentumok létezése

Vegyünk egy a számot és legyen

$$\tau \circeq \inf \{ t : |X(s)| > a \} \wedge 2t.$$

A τ definíciója szerint

$$\{\tau < t\} \subseteq \left\{ \sup_{s \le t} |X(s)| > a \right\} \subseteq \{\tau \le t\}.$$

Ugyanakkor a

$$U \circeq \{\tau \le t\} \backslash \{\tau < t\},$$

halmazon $\{\sup_{s<t} |X(s)| \le a\}$ és $|X(t)| > a$, vagyis az X folyamatnak a t időpontban ugrása van, aminek a sztochasztikus folytonosság miatt a valószínűsége nulla.

Korlátos ugrások és a momentumok létezése

Mivel az ugrások nagysága korlátos, ezért az X bal oldali határértékének létezése és az $X(s-)$ balról való folytonossága miatt

$$\sup_{s\leq\tau}|X(s)| \leq \sup_{s\leq\tau}|X(s-)| + |\Delta X(\tau)| \leq a + c.$$

Megmutatjuk, hogy

$$\left\{\sup_{s\leq t}|X(s)| > a+b+c\right\} \subseteq$$

$$\subseteq \left\{\sup_{s\leq t}|X(s)| > a, \sup_{s\leq t}|X(\tau+s) - X(\tau)| > b\right\}.$$

Ha $\sup_{s\leq t}|X(s)| > a+b+c$ akkor nyilván $\sup_{s\leq t}|X(s)| > a$ amiből persze $\tau \leq t$.

Korlátos ugrások és a momentumok létezése

A $\tau \leq t$ felhasználásával

$$\sup_{\tau \leq s \leq t} |X(s)| \leq |X(\tau)| + \sup_{0 \leq u \leq t} |X(\tau + u) - X(\tau)|$$

amiből a $\sup_{s \leq \tau} |X(s)| \leq a + c$ miatt ha
$\sup_{s \leq t} |X(\tau + s) - X(\tau)| \leq b$ lenne

$$\begin{aligned}
\sup_{s \leq t} |X(s)| &= \sup_{s < \tau} |X(s)| \vee \sup_{\tau \leq s \leq t} |X(s)| \leq \\
&\leq \left(\sup_{s < \tau} |X(s)| \right) \vee \left(|X(\tau)| + \sup_{s \leq t} |X(\tau + s) - X(\tau)| \right) \leq \\
&\leq \sup_{s \leq \tau} |X(s)| + \sup_{s \leq t} |X(\tau + s) - X(\tau)| \leq a + b + c,
\end{aligned}$$

lenne, ami lehetelen.

Korlátos ugrások és a momentumok létezése

Ugyanakkor mivel

$$b < \sup_{s \le t} \left| X\left(u+s\right) - X\left(u\right) \right| \le \sup_{s \le t} \left| X\left(u+s\right) \right| + \sup_{s \le t} \left| X\left(u\right) \right| \le 2 \sup_{s \le 2t} |X ($$

ezért

$$\left\{ \sup_{s \le t} |X(u+s) - X(u)| > b \right\} \subseteq \left\{ \sup_{s \le 2t} |X(s)| > \frac{b}{2} \right\}.$$

Korlátos ugrások és a momentumok létezése

Jelölje F a τ eloszlásfüggvényét. Az erős Markov-tulajdonság és a regressziós függvény definíciója és a már belátottak alapján

Korlátos ugrások és a momentumok létezése

$$
\begin{aligned}
&\mathbf{P}\left(\sup_{s\leq t}|X(s)|>a+b+c\right)\leq\\
&\leq\mathbf{P}\left(\sup_{s\leq t}|X(s)|>a,\sup_{s\leq t}|X(\tau+s)-X(\tau)|>b\right)\leq\\
&\leq\mathbf{P}\left(\tau\leq t,\sup_{s\leq t}|X(\tau+s)-X(\tau)|>b\right)=\\
&=\int_0^t\mathbf{P}\left(\sup_{s\leq t}|X((\tau+s))-X(\tau)|>b\mid\tau=u\right)dF(u)=\\
&=\int_0^t\mathbf{P}\left(\sup_{s\leq t}|X(u+s)-X(u)|>b\right)dF(u)\leq\\
&\leq\mathbf{P}\left(\sup_{s\leq 2t}|X(s)|>\frac{b}{2}\right)\cdot\mathbf{P}(\tau\leq t)\leq\\
&\leq q\cdot\mathbf{P}(\tau\leq t)=q\cdot\mathbf{P}\left(\sup_{s\leq t}|X(s)|>a\right).
\end{aligned}
$$

Korlátos ugrások és a momentumok létezése

Ebből, ha

$$a \circeq (n-1)(b+c),$$

akkor

$$\mathbf{P}\left(\sup_{s\leq t}|X(s)| > n(b+c)\right) \leq$$
$$\leq q \cdot \mathbf{P}\left(\sup_{s\leq t}|X(s)| > (n-1)(b+c)\right) \leq$$
$$\leq \ldots \leq q^n.$$

Korlátos ugrások és a momentumok létezése

Az

$$\left\{\sup_{s\le t}|X(s)| > n(b+c)\right\} \setminus \left\{\sup_{s\le t}|X(s)| \ge (n+1)(b+c)\right\}$$

halmazon az integrál felülről becsülhető a

$$\mathbf{P}\left(\sup_{s\le t}|X(s)| > n(b+c)\right)((n+1)(b+c))^m$$

számmal, így

$$\mathbf{E}(|X(t)|^m) \le \mathbf{E}\left(\sup_{s\le t}|X(s)|^m\right) \le \sum_{n=1}^{\infty}(n(b+c))^m q^{n-1} < \infty.$$

Folytonos független növekményű folyamatok

Theorem

Minden folytonos független növekményű folyamat Gauss-folyamat, vagyis tetszőleges $t_1, t_2, ..., t_n$ *időpontok esetén az*

$$(X(t_1), X(t_2), ..., .X(t_n))$$

eloszlása normális.

Az X független növekményű folyamat, ezért a $Z(t) \stackrel{\circ}{=} X(t+s) - X(s)$ független növekményű folyamat minden s esetén. Ebből következően elegendő megmutatni, hogy az $X(t)$ normális eloszlású minden t-re.

Folytonos független növekményű folyamatok

Az X folytonossága miatt véges szakaszokon az X összes momentuma korlátos. Ebből következően egyrészt az $\mathbf{E}(X(t))$ minden t esetén véges, másrészt az X a véges időszakaszokon az $L^2(\Omega)$ térben korlátos, így minden véges szakaszon egyenletesen integrálható. Ebből következően a várható érték és a határérték felcserélhető, következésképpen az $\mathbf{E}(X(t))$ folytonos. Ebből következően az

$$Y(t) \stackrel{\circ}{=} X(t) - \mathbf{E}(X(t))$$

folytonos martingál. Mivel az együttes eloszlás típusát a várható értékekkel való eltolás nem módosítja, ezért feltehetjük, hogy az X folytonos martingál.

Folytonos független növekményű folyamatok

Az X növekményei függetlenek, ezért az $[X]$ növekményei is függetlenek. Így az $U(t) \stackrel{\circ}{=} [X](t) - \mathbf{E}([X](t))$ ismételten egy folytonos martingál. Az $[X]$ növekedő így az U véges változású, így majdnem minden kimenetelre $U \equiv 0$. Ebből következően az $[X]$ determinisztikus. Az Itô-formula szerint

$$\begin{aligned} \exp(iuX(t)) - 1 &= iu \int_0^t \exp(iuX(s))dX(s) - \\ &\quad - \frac{1}{2}u^2 \int_0^t \exp(iuX(s))d[X](s). \end{aligned}$$

Folytonos független növekményű folyamatok

Az $\exp(iuX)$ korlátos az X a véges szakaszokon négyzetesen integrálható, így a sztochasztikus integrál martingál. Várható értéket véve

$$\mathbf{E}\left(\exp(iuX(t))\right) - 1 = -\frac{1}{2}u^2\mathbf{E}\left(\int_0^t \exp(iuX(s))d\left[X\right](s)\right).$$

Mivel a kvadratikus variáció determinisztikus, ezért a Fubini-tétel használható. A várható értéket és az integrálást felcserélve

$$\varphi\left(t, u\right) - 1 = \frac{1}{2}u^2\int_0^t \varphi\left(s, u\right)d\left[X\right](s).$$

Folytonos független növekményű folyamatok

Könnyen, például az Itô-formulával megmutatható, hogy a

$$\varphi(t, u) = \exp\left(-\frac{u^2}{2}[X](t)\right)$$

kielégíti az egyenletet. Meg kell mutatni, hogy a megoldás egyértelmű. Ha φ és ψ kielégíti az egyenletet és $\rho \circeq \varphi - \psi$, akkor a ρ függvényre $\rho(0) = 0$ és

$$\rho = -\frac{u^2}{2} \int_0^t \rho(s)\, d[X](s) \circeq -c \int_0^t \rho(s)\, d[X](s).$$

Folytonos független növekményű folyamatok

Ha valamely t időpontban $\rho(t) \neq 0$, akkor az ilyen időpontok halmazának van véges infimuma. Jelölje ezt az infimumot s. Világos, hogy $\rho(s) = 0$, ugyanis ha nem nulla, akkor az infimum csökkenthető lenne. Ha $s < \infty$, akkor az $[X]$ folytonossága miatt van olyan $t > s$, hogy.

$$[X](t) - [X](s) < \frac{1}{2c}.$$

Tetszőleges $w \in [s, t]$ időpontra

$$|\rho(w)| = |\rho(w) - \rho(s)| = \left| c \int_s^w \rho(u)\, d[X](u) \right| \leq \frac{1}{2} \sup_{s \leq u \leq t} |\rho(u)|$$

ami lehetetlen.