Sztochasztikus integrálás

A sztochasztikus folyamatok integrálfogalmának pontosítása

Medvegyev Péter

2008

Egyenletes integrálhatóság

Definition

Egy (f_α) függvényhalmazt egyenletesen integrálhatónak mondjuk, ha

$$\lim_{N\to\infty} \sup_{\alpha} \int_{\{|f_\alpha|>N\}} |f_\alpha| \, d\mu = 0.$$

Example

A majorált konvergencia tétel miatt minden integrálható függvény egyenletesen integrálható. Véges sok egyenletesen integrálható halmaz egyesítése is egyenletesen integrálható.

Example

Ha létezik g integrálható függvény, amelyre $|f_\alpha| \leq g$ minden α esetén, akkor az (f_α) egyenletesen integrálható.

Egy fontos kritérium

Example

Ha (f_α) függvények egy halmaza, G olyan nem negatív növekedő függvény, amelyre

$$\lim_{t\to\infty}\frac{G(t)}{t}=\infty,$$

és

$$\sup_\alpha \int_X G(|f_\alpha|)\,d\mu<\infty,$$

akkor az (f_α) egyenletesen integrálható.

Ha $\varepsilon>0$ tetszőleges, $M \circeq \sup_\alpha \int_X G(|f_\alpha|)\,d\mu$, $a \circeq M/\varepsilon$, és N olyan nagy, hogy $G(t)/t\geq a$, ha $t\geq N$, akkor

$$\int_{\{|f_\alpha|>N\}}|f_\alpha|\,d\mu\leq\frac{1}{a}\int_{\{|f_\alpha|>N\}}G(|f_\alpha|)\,d\mu\leq\frac{M}{a}=\varepsilon.$$

Example

Ha $p > 1$ és az (f_α) halmaz korlátos az L^p térben, akkor a halmaz egyenletesen integrálható.

Mit lehet mondani az L^1 térben való korlátosság esetén?

Valószínűségi mértékek és az egyenletes integrálhatóság

Theorem

Ha az X alaptér mértéke véges, akkor egy (f_α) függvényhalmaz pontosan akkor egyenletesen integrálható, ha

1. *az $\left(\int_X |f_\alpha|\, d\mu\right)_\alpha$ halmaz korlátos, vagyis az (f_α) korlátos az $L^1(\mu)$ térben és*
2. *$\mu(A) \to 0$ esetén $\int_A |f_\alpha|\, d\mu \to 0$ az α szerint egyenletesen, vagyis*

$$\lim_{\mu(A)\to 0} \sup_\alpha \left(\int_A |f_\alpha|\, d\mu\right) = 0.$$

Véges mérték esetén az L^p, $p > 1$ korlátosságból következik az L^1 korlátosság, de nem fordítva.

Valószínűségi mértékek és az egyenletes integrálhatóság

Evidens módon

$$\begin{aligned}\int_A |f_\alpha|\, d\mu &= \int_A |f_\alpha|\, \chi\left(|f_\alpha| \leq N\right) d\mu + \int_A |f_\alpha|\, \chi\left(|f_\alpha| > N\right) d\mu \leq \\ &\leq N\mu\left(A\right) + \int_{\{|f_\alpha|>N\}} |f_\alpha|\, d\mu.\end{aligned}$$

Ha az (f_α) egyenletes integrálható, akkor elég nagy N-re a második tag $\varepsilon/2$ alá hozható. Ha $A = X$, akkor az alaptér végessége miatt a kifejezés korlátos, következésképpen teljesül az 1. Ha $\mu(A) \to 0$, akkor az első tag is $\varepsilon/2$ alá vihető, vagyis teljesül a 2. is.

Megfordítva legyen $\varepsilon > 0$ és $\delta > 0$ olyan, hogy minden α-ra $\int_A |f_\alpha| \, d\mu < \varepsilon$, ha $\mu(A) < \delta$. A Markov-egyenlőtlenség és az első feltétel alapján

$$\mu(|f_\alpha| > N) \leq \frac{1}{N} \int_X |f_\alpha| \, d\mu \leq \frac{K}{N} \to 0,$$

amiből elég nagy N-re tetszőleges α-ra $\mu(|f_\alpha| > N) < \delta$, vagyis a második feltétel miatt

$$\int_{\{|f_\alpha| > N\}} |f_\alpha| \, d\mu < \varepsilon,$$

következésképpen az $(f_\alpha)_\alpha$ egyenletesen integrálható.

A sztochasztikus és a pontonkénti konvergencia kapcsolata

A határérték és az integrál felcserélését általában a pontonkénti konvergencia, vagy a majdnem mindenhol való konvergencia esetében szokás tárgyalni, ugyanis ezek a mértékelmélet természetes konvergencia fogalmai. Most az $f_n \to f$ konvergencián a sztochasztikus konvergenciát értjük. Véges mértékű halmazokon a pontonkénti konvergenciából következik a sztochasztikus konvergencia, így az eredmények speciálisan alkalmazhatók a majdnem mindenhol való konvergenciára is. Triviálisan

$$\left| \int_X f_n d\mu - \int_X f d\mu \right| \leq \int_X |f_n - f| \, d\mu \to 0,$$

ezért elegendő az $\int_X |f_n - f| \, d\mu \to 0$ konvergenciára koncentrálni.

Egyenletes integrálhatóság és az integrál alatti konvergencia

Theorem

Ha a μ mérték véges, az (f_n) függvények egyenletesen integrálhatóak, és $f_n \to f$, akkor az f is integrálható, és

$$\int_X f_n d\mu \to \int_X f d\mu, \quad \int_X |f_n - f| \, d\mu \to 0.$$

Mivel véges mértékű halmazon az egyenletes integrálhatóságból következik az L^1 korlátosság, és a sztochasztikusan konvergens sorozatoknak van majdnem mindenhol konvergens részsorozata, ezért a Fatou-lemma alapján

$$\int_X |f| \, d\mu \leq \liminf_{n \to \infty} \int_X |f_n| \, d\mu < \infty,$$

vagyis az f integrálható, speciálisan az $(f_n - f)_n$ is egyenletesen integrálható.

Egyenletes integrálhatóság és az integrál alatti konvergencia

Triviálisan

$$\int_X |f_n - f| \, d\mu \leq \varepsilon\mu(X) + \int_{\{|f_n - f| \geq \varepsilon\}} |f_n - f| \, d\mu.$$

A sztochasztikus konvergencia miatt $\mu(|f_n - f| \geq \varepsilon) \to 0$, amiből viszont a korábbi kritérium második pontja, vagyis ismételten az egyenletes integrálhatóság alapján a jobb oldali összeg második tagja is tetszőlegesen kicsivé tehető.

Folytonos folyamatok Itô–Stieltjes integrálhatósága

Theorem

Ha az X adaptált sztochasztikus folyamat az $[a, b]$ véges szakaszon majdnem minden ω-ra folytonos és az S szemimartingál, akkor az X az $[a, b]$-én az S szerint Itô–Stieltjes-integrálható.

Emlékeztetünk, hogy az integrál nullmértékű halmaz erejéig definiált, így az integrálfüggvény mint sztochasztikus folyamat létezése nem triviális. Az $\int_a^b XdM$ alakú integrálokat $[a, b]$ szakaszokon definiáltuk. Nem világos, hogy a $t \mapsto I(t) \triangleq \int_a^t XdM$ integrálfolyamat milyen tulajdonságokkal bír. Milyen feltételek mellett kapunk martingált?

Legyen $M \in \mathcal{H}^2$ és $|X| < K$ az X folyamat egy korlátját. Az energiaazonosság miatt tetszőleges $t \in [0, \infty)$ esetén

$$\|I_n(t)\|_2^2 =$$

$$= \mathbf{E}\left(\left(\sum_k X\left(t_{k-1}^{(n)}\right)\left(M\left(t_k^{(n)} \wedge t\right) - M\left(t_{k-1}^{(n)} \wedge t\right)\right)\right)^2\right) \leq$$

$$\leq K^2\left(\mathbf{E}\left(M^2(t)\right) - \mathbf{E}\left(M^2(0)\right)\right) \leq$$

$$\leq K^2\left(\mathbf{E}\left(M^2(\infty)\right) - \mathbf{E}\left(M^2(0)\right)\right) \triangleq c < \infty,$$

vagyis az $I_n(t) \triangleq \sum_k X\left(t_{k-1}^{(n)}\right)\left(M\left(t_k^{(n)} \wedge t\right) - M\left(t_{k-1}^{(n)} \wedge t\right)\right)$ sorozat az $L^2(\Omega)$-ban korlátos, következésképpen az $(I_n(t))$ sorozata egyenletesen integrálható, így az $I_n(t) \xrightarrow{p} I(t)$ mellett az $I_n(t) \xrightarrow{L^1} I(t)$ is teljesül.

A közelítő sorozat feltételes várható értéke

A közelítő pontok választása miatt, a már korábban látott okok miatt

$$\mathbf{E}\left(I_n\left(t\right) \mid \mathcal{F}_s\right) = I_n\left(s\right),$$

vagyis a közeltő összegek martingálok. (Az indoklás azonos a korlátos változású martingálok esetén látottal.) Az $L^2\left(\Omega\right)$ korlátosságból következő $I_n\left(t\right) \xrightarrow{L^1} I\left(t\right) \stackrel{\circ}{=} \int_a^t XdM$ konvergenciát felhasználva

$$\mathbf{E}\left(\int_a^t XdM \mid \mathcal{F}_s\right) = \int_a^s XdM.$$

Az $\int_a^s XdM$ $\mathcal{F}_s$-mérhető, vagyis az I integrálfolyamat logikai martingál. A szokásos feltételek miatt van olyan módosítása, amely valódi martingál.

A Doob-egyenlőtlenség alkalmazása

$I_m - I$ martingál, ezért az első Doob-egyenlőtlenség szerint tetszőleges $\lambda > 0$ esetén

$$\lambda \mathbf{P}\left(\sup_{a \leq t \leq b} |I_n(t) - I(t)| \geq \lambda\right) \leq \mathbf{E}(|I_n(b) - I(b)|).$$

$I_n(b) \to I(b)$ az $L^1(\Omega)$ térben, következésképpen $\sup_t |I_n(t) - I(t)| \xrightarrow{P} 0$, így alkalmas részsorozatra

$$\sup_t |I_{n_k}(t) - I(t)| \xrightarrow{m.m.} 0.$$

Tehát egy részsorozaton a konvergencia majdnem minden trajektóriára egyenletes, vagyis nullmértékű halmaztól eltekintve az I_n trajektóriáinak folytonossági tulajdonságai megőrződnek.

Az integrálfüggvény létezése

Theorem

Ha X tetszőleges véges szakaszon egyenletesen korlátos, folytonos és adaptált folyamat, $M \in \mathcal{H}^2$, akkor az

$$(X \bullet M)(t) \triangleq \int_a^t X dM, \quad t \in [a, b]$$

integrálfolyamatnak van olyan verziója, amely martingál. Ha (I_n) az integrálközelítő összegek sorozata, akkor minden t-re

$$\sup_{a \le s \le t} |I_n(s) - (X \bullet M)(s)| \xrightarrow{P} 0.$$

Ha az M folytonos, akkor az $X \bullet M$ integrálfolyamatnak van folytonos verziója.

Elementary Doob–Meyer decomposition

Theorem

If M is a uniformly bounded, continuous martingale, then

1. *the quadratic variation $P(t) \circeq [M](t) \circeq [M]_0^t$ exists.*
2. *$[M]$ has a version which is increasing and continuous.*
3. *For this version $M^2 - [M]$ is a martingale.*
4. *$[M]$ is indistinguishable from any increasing, continuous process P for which $P(0) = 0$ and $M^2 - P$ is a martingale.*

If $\left(t_k^{(n)}\right)$ is an infinitesimal sequence of partitions of $[0, t]$ and

$$Q_n(s) \circeq \sum_k \left(M\left(t_k^{(n)} \wedge s\right) - M\left(t_{k-1}^{(n)} \wedge s\right)\right)^2$$

then $\sup_{s \leq t} |Q_n(s) - [M](s)| \xrightarrow{p} 0.$

By the integration by parts formula for any t

$$M^2(t) - M^2(0) = 2\int_0^t M dM + [M](t) = 2 \cdot (M \bullet M)(t) + [M](t).$$

As M is continuous and uniformly bounded the integral process $M \bullet M$ has a version which is a continuous martingale, therefore as M^2 is continuous

$$[M] \stackrel{\circ}{=} M^2 - M^2(0) - 2 \cdot M \bullet M$$

is continuous, and

$$M^2 - [M] = M^2(0) + 2 \cdot (M \bullet M)$$

is a martingale.

Fisk's theorem

$[M](t)$ is a version of the quadratic variation $[M]_0^t$ for any t. For any rational numbers $p \leq q$ we have $[M]_0^p \overset{a.s.}{\leq} [M]_0^q$. Taking the union the measure-zero sets and using the continuity of $[M]$ we can construct a version which is increasing.

If P is another continuous, increasing process for which $P(0) = 0$ and $M^2 - P$ is martingale, then $N \mathrel{\hat{=}} P - [M]$ is also a continuous martingale and $N(0) = 0$. As N is the difference of two increasing processes the trajectories of N have finite variation. By Fisk's theorem $N = 0$, so P is indistinguishable from $[M]$. The convergence is a simple consequence of convergence of the integrals.

The stopping rule

Theorem

Under the assumptions of the previous theorem if τ is an arbitrary stopping time then $[M^{\tau}] = [M]^{\tau}$.

As $(M^{\tau})^2 = \left(M^2\right)^{\tau}$

$$(M^{\tau})^2 - [M]^{\tau} = \left(M^2\right)^{\tau} - [M]^{\tau} = \left(M^2 - [M]\right)^{\tau}.$$

Stopped martingales are martingales hence $\left(M^2 - [M]\right)^{\tau}$ is martingale. $[M]^{\tau}$ is increasing, so by the uniqueness of the quadratic variation $[M^{\tau}] = [M]^{\tau}$.

Existence of the quadratic variation of local martingales

Theorem

If M is a continuous local martingale then there is one and only one continuous, increasing process $[M]$ such that

1. $[M](0) = 0$ *and*
2. $M^2 - [M]$ *is a continuous local martingale.*

For any t if $\left(t_k^{(n)}\right)$ is an infinitesimal sequence of partitions of $[0,t]$ then

$$\sup_{s \leq t} \left| Q_n(s) - [M](s) \right| \xrightarrow{p} 0$$

where

$$Q_n(s) \triangleq \sum_k \left(M\left(t_k^{(n)} \wedge s\right) - M\left(t_{k-1}^{(n)} \wedge s\right) \right)^2 .$$

The localization of the local martingale

Let M be a continuous local martingale and let (σ_n) be a localizing sequence of M. As M is continuous the hitting times

$$\upsilon_n \overset{\circ}{=} \inf\{t : |M(t)| \geq n\}$$

are stopping times. From the continuity of M it is obvious that $|M^{\upsilon_n}| \leq n$. Stopped martingales are martingales, so if instead of σ_n we take the localizing sequence $\tau_n \overset{\circ}{=} \sigma_n \wedge \upsilon_n$ then the processes

$$M_n \overset{\circ}{=} M^{\tau_n} = (M^{\sigma_n})^{\upsilon_n}$$

are bounded martingales.

Using the existence for bounded martingales

As M_n is a bounded, continuous martingale $[M_n]$ is an increasing processes and $M_n^2 - [M_n]$ is a continuous martingale. By the previous proposition $[M_{n+1}]^{\tau_n} = \left[M_{n+1}^{\tau_n}\right] = [M_n]$, hence $[M_n] = [M_{n+1}]$ on the interval $[0, \tau_n]$. As $\tau_n \nearrow \infty$ one can define the process $[M]$ as the "union" of the processes $[M_n]$, that is

$$[M](t,\omega) \overset{\circ}{=} [M_n](t,\omega), \quad t \le \tau_n(\omega).$$

Evidently $[M]$ is continuous, increasing and $[M](0) = 0$. Of course

$$\left(M^2 - [M]\right)^{\tau_n} = \left(M^{\tau_n}\right)^2 - [M]^{\tau_n} \overset{\circ}{=} M_n^2 - [M_n],$$

which is a martingale hence $M^2 - [M]$ is a local martingale.

The proof of uniqueness

Assume that $A(0) = 0$ and $M^2 - A$ is a continuous local martingale for some continuous, increasing process A.

$$Z \mathrel{\hat{=}} \left(M^2 - [M]\right) - \left(M^2 - A\right) = A - [M]$$

is a continuous local martingale and Z, as the difference of two increasing processes, has finite variation. So by Fisk's theorem Z is constant. As $Z(0) = A(0) - [M](0) = 0$, obviously $Z \equiv 0$.

The proof of the stochastic convergence

Finally, let us prove the convergence of the supremums. Fix $\varepsilon, \delta, t > 0$ and $\left(t_k^{(n)}\right)_k$. Let Q_n be the approximating sum for $[M]$ and let $Q_n^{(m)}$ be the approximating sum for $[M_m]$.

$$\begin{aligned} A &\doteq \left\{\sup_{s\le t}\left|Q_n(s) - [M](s)\right| > \varepsilon\right\}, \\ A^{(m)} &\doteq \left\{\sup_{s\le t}\left|Q_n^{(m)}(s) - [M_m](s)\right| > \varepsilon\right\}. \end{aligned}$$

As $\tau_m \nearrow \infty$, for m large enough $\mathbf{P}(\tau_m \le t) \le \delta/2$ and $\mathbf{P}\left(A^{(m)}\right) \le \delta/2$.

Obviously

$$\begin{gathered}\mathbf{P}(A)=\mathbf{P}\left(A\cap\left(\tau_{m}\leq t\right)\right)+\mathbf{P}\left(A\cap\left(\tau_{m}>t\right)\right)\leq\\ \leq\mathbf{P}\left(\left(\tau_{m}\leq t\right)\right)+\mathbf{P}\left(A\cap\left(\tau_{m}>t\right)\right)\leq\frac{\delta}{2}+\mathbf{P}\left(A\cap\left(\tau_{m}>t\right)\right)=\\ =\frac{\delta}{2}+\mathbf{P}\left(A^{(m)}\cap\left(\tau_{m}>t\right)\right)\leq\frac{\delta}{2}+\mathbf{P}\left(A^{(m)}\right)\leq\frac{\delta}{2}+\frac{\delta}{2},\end{gathered}$$

hence the stochastic convergence holds.

Quadratic variation of square integrable martingales

Example

If $M \in \mathcal{H}^2$ then $M^2 - [M]$ is a martingale

Let $M(0) = 0$ and let (σ_n) be a localization of $M^2 - [M]$. By Doob's inequality $M^2(\sigma_n) \leq \sup_t M^2(t) \in L^1(\Omega)$, hence by the Dominated Convergence Theorem $\lim_{n\to\infty} \mathbf{E}\left(M^2(\sigma_n)\right) = \mathbf{E}\left(M^2(\infty)\right) < \infty$. $[M]$ is increasing, hence by the Monotone Convergence Theorem

$$\begin{aligned}
\mathbf{E}([M](\infty)) &= \lim_{n\to\infty} \mathbf{E}([M](\sigma_n)) = \lim_{n\to\infty} \mathbf{E}([M](\sigma_n)) + \lim_{n\to\infty} 0 = \\
&= \lim_{n\to\infty} \mathbf{E}([M](\sigma_n)) + \lim_{n\to\infty} \mathbf{E}\left(M^2(\sigma_n) - [M](\sigma_n)\right) = \\
&= \lim_{n\to\infty} \left(\mathbf{E}([M](\sigma_n)) + \mathbf{E}\left(M^2(\sigma_n) - [M](\sigma_n)\right)\right) = \\
&= \lim_{n\to\infty} \mathbf{E}\left(M^2(\sigma_n)\right) = \mathbf{E}\left(M^2(\infty)\right) < \infty.
\end{aligned}$$

Dominated Convergence Theorem and the local martingales

So $N \stackrel{\circ}{=} M^2 - [M]$, therefore N^{σ_n} has an integrable majorant, hence by the Dominated Convergence Theorem if $t > s$

$$\begin{aligned}
\mathbf{E}\left(N(t) \mid \mathcal{F}_s\right) &= \mathbf{E}\left(\lim_{n\to\infty} N(t \wedge \sigma_n) \mid \mathcal{F}_s\right) = \\
&= \mathbf{E}\left(\lim_{n\to\infty} N^{\sigma_n}(t) \mid \mathcal{F}_s\right) = \\
&= \lim_{n\to\infty} \mathbf{E}\left(N^{\sigma_n}(t) \mid \mathcal{F}_s\right) = \\
&= \lim_{n\to\infty} N^{\sigma_n}(s) = N(s),
\end{aligned}$$

so N is a martingale.

When the martingale starts from a non-zero variable

As $[M - M(0)] = [M]$ obviously $(M - M(0))^2 - [M]$ is a martingale.

$$M^2 - [M] = (M - M(0))^2 - [M] - M^2(0) + 2M \cdot M(0).$$

As $M \in \mathcal{H}^2$ obviously the constant $M^2(0) \in L^1(\Omega)$ is a martingale. It is also clear that $M \cdot M(0)\chi(|M(0)| \le n)$ is also a martingale.
$M(0)M(t)$ is integrable, so by the Dominated Convergece Theorem

$$\mathbf{E}(M(t)M(0) \mid \mathcal{F}_s) =$$
$$= \lim_{n\to\infty} \mathbf{E}(M(t)M(0)\chi(|M(0)| \le n) \mid \mathcal{F}_s) =$$
$$= \lim_{n\to\infty} M(s)M(0)\chi(|M(0)| \le n) = M(s)M(0),$$

hence $M \cdot M(0)$ is a martingale, so $M^2 - [M]$ is a martingale.

Quadratic co-variation of continuous local martingales

Theorem

If M and N are continuous local martingales then $[M,N]$ is the only continuous process with finite variation on finite intervals for which

1. $[M,N](0)=0$ *and*
2. $MN-[M,N]$ *is a continuous local martingale.*

For any infinitesimal sequence of partitions $\left(t_k^{(n)}\right)$ *of* $[0,t]$

$$\sup_{s\leq t}\left|Q_n(s)-[M,N](s)\right| \xrightarrow{p} 0$$

where

$$Q_n(s) \overset{\circ}{=} \sum_k \left(M(t_k\wedge s)-M(t_{k-1}\wedge s)\right)\left(N(t_k\wedge s)-N(t_{k-1}\wedge s)\right).$$

Quadratic co-variation

From Fisk's theorem the uniqueness of $[M, N]$ is trivial, as if $MN - A$ and $MN - B$ are continuous local martingales for some A and B, then $A - B$ is a continuous local martingale with finite variation, so $A - B$ is a constant. As $A(0) = B(0) = 0$ obviously $A = B$.

$$MN = \frac{1}{4}\left((M+N)^2 - (M-N)^2\right),$$

so it is easy to see that the theorem above can be applied to

$$[M, N] \stackrel{\circ}{=} \frac{1}{4}\left([M+N] - [M-N]\right)$$

in order to show that $MN - [M, N]$ is a continuous local martingale and that the convergence holds.

The quadratic co-variation is bilinear

Theorem

If M, N and U are continuous local martingales; ξ and η are $\mathcal{F}_0$-measurable random variables then

$$[\xi M + \eta N, U] = \xi [M, U] + \eta [N, U] .$$

$MU - [M, U]$ and $NU - [N, U]$ are local martingales hence $(M + N) U - ([M, U] + [N, U])$ is also a local martingale, and by the uniqueness property of the quadratic co-variation $[M + N, U] = [M, U] + [N, U]$. In a similar way: $MU - [M, U]$ is a local martingale, ξ is $\mathcal{F}_0$-measurable, hence $\xi (MU - [M, U])$ is also a local martingale, hence again by the uniqueness property of the quadratic co-variation $[\xi M, N] = \xi [M, N]$.

Stopping rule for the quadratic co-variation

Theorem

Let τ be an arbitrary stopping time.

1. *If M is a continuous local martingale then $[M^\tau] = [M]^\tau$.*
2. *If M and N are continuous local martingales then $[M^\tau, N^\tau] = [M, N]^\tau = [M^\tau, N]$.*

$[M^\tau]$ is the only continuous, increasing process A for which $A(0) = 0$ and $(M^\tau)^2 - A$ is a continuous local martingale. $M^2 - [M]$ is a continuous local martingale, hence

$$\left(M^2 - [M]\right)^\tau = \left(M^2\right)^\tau - [M]^\tau = (M^\tau)^2 - [M]^\tau$$

is a continuous local martingale, hence by the uniqueness $[M]^\tau = [M^\tau]$.

Stopping rule for the quadratic co-variation

From this

$$\begin{aligned}[M^{\tau}, N^{\tau}] &\overset{\circ}{=} \frac{1}{4}\left(\left[(M+N)^{\tau}\right] - \left[(M-N)^{\tau}\right]\right) = \\ &= \frac{1}{4}\left([M+N]^{\tau} - [M-N]^{\tau}\right) = [M, N]^{\tau}.\end{aligned}$$

Stopping rule for the quadratic co-variation

To prove the other relation by the linearity of the quadratic variation one should show that

$$[M - M^{\tau}, N^{\tau}] = [M, N^{\tau}] - [M^{\tau}, N^{\tau}] = 0.$$

Observe that the trajectories of N^{τ} are constant after τ and the trajectories of $M - M^{\tau}$ are constant before τ. So if for any t one takes the approximating sums of the quadratic variation $[M - M^{\tau}, N^{\tau}](t)$ then all the terms are zero unless $t_{i-1}^{(n)} < \tau(\omega) < t_i^{(n)}$. Therefore the quadratic variation is the limit of maximum one term in the approximating sums. This implies that the limit of the approximating sums is zero.

When is the quadratic variation zero?

Theorem

Let M be a continuous local martingale. M is indistinguishable from a constant if and only if the quadratic variation $[M]$ is zero.

If M is a constant then M^2 is also a constant, hence M^2 is a local martingale so $[M] = 0$. On the other hand if $[M] = 0$ then $M^2 - [M] = M^2$ is local martingale. The proposition follows from the next proposition.

When is the quadratic variation zero?

Theorem

M and M^2 are continuous local martingales, if and only if M is a constant.

If M is constant then M and M^2 are local martingales. On the other hand

$$(M - M(0))^2 = M^2 - 2 \cdot M \cdot M(0) + M^2(0).$$

Since M and M^2 are local martingales and $M(0)$ is $\mathcal{F}_0$-measurable, $(M - M(0))^2$ is also a local martingale. Let (τ_n) be a localizing sequence for $(M - M(0))^2$.

By the martingale property

$$\mathbf{E}\left(\left(M^{\tau_n}(t) - M^{\tau_n}(0)\right)^2\right) = \mathbf{E}\left(\left(M^{\tau_n}(0) - M^{\tau_n}(0)\right)^2\right) = 0,$$

hence $M(t \wedge \tau_n) \overset{a.s.}{=} M(0)$ for any t .Therefore

$$M(t) = \lim_{n\to\infty} M(t \wedge \tau_n) \overset{a.s.}{=} M(0)$$

for any t. M is continuous therefore it is indistinguishable from $M(0)$.

Kunita–Watanabe inequality

Theorem

If X, Y are product measurable processes, and M, N are semimartingales, $a \leq b \leq \infty$ and $V \mathrel{\mathring{=}} \mathrm{Var}([M, N])$ then

$$\int_a^b |XY| \, dV \overset{a.s.}{\leq} \sqrt{\int_a^b X^2 d[M]} \sqrt{\int_a^b Y^2 d[N]}.$$

We shall proof the inequality only if M and N are continuous local martingales. For general semimartingales we do not know the existence of the quadratic variation.

Kunita–Watanabe inequality

If X and Y are continuous local martingales then for any constants a

$$[aX + Y] = a^2 [X] + 2a [X, Y] + [Y]$$

where the two sides are equal only almost surely that is the trajectories of the two sides are equal only outside a measure zero set. If a is any rational number then we can unify the measure zero set into one measure zero set and assume that the equality holds for every rational number and for every trajectory. As we cannot make a limit under the quadratic variation we cannot extend the equality to all the real numbers a But still we can assume that

$$a^2 [X] + 2a [X, Y] + [Y] \geq 0$$

for almost all trajectories and for all rational numbers.

Kunita–Watanabe inequality

One can obviously extend this inequality to all real numbers. Therefore using that the discriminant should be non-positive

$$|[X, Y]| \leq \sqrt{[X]}\sqrt{[Y]}$$

which is of course holds for almost all trajectories. Let s be arbitrary. Applying the inequality for

$$\widetilde{X}(t) \circeq X(s+t) \quad \text{and} \quad \widetilde{Y}(t) \circeq Y(s+t)$$

and using that

$$\left[\widetilde{X}, \widetilde{Y}\right](t) = [X, Y](t) - [X, Y](s)$$

one can easily show that

$$\left|[X, Y]_{t_1}^{t_2}\right| \leq \sqrt{[X]_{t_1}^{t_2}}\sqrt{[Y]_{t_1}^{t_2}}.$$

Kunita–Watanabe inequality

Of course the inequality holds only almost surely. Hence it is still almost surely true for every rational intervals. As the trajectories are continuous one can assume that t_1 and t_2 are arbitrary number. Now fix an outcome and denote the trajectories of $[X, Y]$, $[X]$ and of $[Y]$ by f, g and h. So it $t_1 < t_2$ then

$$|f(t_2) - f(t_1)| \leq \sqrt{g(t_2) - g(t_1)}\sqrt{h(t_2) - h(t_1)}.$$

Kunita–Watanabe inequality

Let $\mu \circeq \mathrm{Var}(f) + g + h$ and let $\nu_a \circeq a^2 g + 2af + h$. It is trivial to show from the above inequality that if $t_1 < t_2$ then

$$\begin{aligned}\nu_a(t_2) - \nu_a(t_1) &= a^2\left(g(t_2) - g(t_1)\right) + \\ &\quad + 2a\left(f(t_2) - f(t_1)\right) + \\ &\quad + h(t_2) - h(t_1)\end{aligned}$$

is non-negative, the discriminant is non-positive, so ν_a increasing for every a. Hence as $f, g, h, \nu_a \ll \mu$

$$0 \leq \frac{d\nu_a}{d\mu} = a^2 \frac{dg}{d\mu} + 2a\frac{df}{d\mu} + \frac{dh}{d\mu}$$

holds almost surely with respect to μ.

Kunita–Watanabe inequality

Unifying the measure zero sets one can assume that it is true for every rational number a. Hence again

$$\left|\frac{df}{d\mu}\right| \leq \sqrt{\frac{dg}{d\mu}}\sqrt{\frac{dh}{d\mu}}$$

almost everywhere with respect to μ.

Kunita–Watanabe inequality

Now for any Borel measurable function u and v using that $f, g, h \ll \mu$

$$
\begin{aligned}
\left|\int_0^\infty |uv|\, df\right| &= \left|\int_0^\infty |uv| \frac{df}{d\mu} d\mu\right| \leq \int_0^\infty |uv| \left|\frac{df}{d\mu}\right| d\mu \leq \\
&\leq \int_0^\infty |uv| \sqrt{\frac{dg}{d\mu}} \sqrt{\frac{dh}{d\mu}} d\mu \leq \\
&\leq \sqrt{\int_0^\infty u^2 \frac{dg}{d\mu} d\mu} \sqrt{\int_0^\infty v^2 \frac{dh}{d\mu} d\mu} = \\
&= \sqrt{\int_0^\infty u^2\, dg} \sqrt{\int_0^\infty v^2\, dh}
\end{aligned}
$$

which is just the Kunita–Watanabe inequality.

Corollary

If $q, p \geq 1$ and $1/p + 1/q$, then

$$\mathbf{E}\left(\int_0^\infty |XY|\, d\,[M,N]\right) \leq \left\| \sqrt{\int_0^\infty X^2 d\,[M]} \right\|_p \left\| \sqrt{\int_0^\infty Y^2 d\,[N]} \right\|_q .$$

By Hölder's inequality

$$\begin{aligned}
\mathbf{E}\left(\int_0^\infty |XY|\, d\,[M,N]\right) &\leq \mathbf{E}\left(\sqrt{\int_0^\infty X^2 d\,[M]}\sqrt{\int_0^\infty Y^2 d\,[N]}\right) \leq \\
&\leq \left\| \sqrt{\int_0^\infty X^2 d\,[M]} \right\|_p \left\| \sqrt{\int_0^\infty Y^2 d\,[N]} \right\|_q .
\end{aligned}$$

A négyzetesen integrálható martingálok normája

Jelölje $\mathcal{H}^2$ a folytonos, négyzetesen integrálható martingálok terét. Jelölje $\mathcal{H}_0^2$ az olyan elemeket $\mathcal{H}^2$-ből, amelyek a nulla időpontban nulla értéket vesznek fel.

Theorem

Ha $M \in \mathcal{H}_0^2$, akkor

$$\|M\|_{\mathcal{H}^2} \overset{\circ}{=} \sqrt{\mathbf{E}\left(M^2(\infty)\right)} = \sqrt{\mathbf{E}\left([M](\infty)\right)} \overset{\circ}{=} \left\| \sqrt{[M](\infty)} \right\|_2 .$$

Az $M^2 - [M]$ martingál tulajdonsága és az $M(0) = 0$ miatt

$$\mathbf{E}\left(M^2(\infty) - [M](\infty)\right) = \mathbf{E}\left(M^2(0) - [M](0)\right) = 0.$$

Mivel $\mathbf{E}\left(M^2(\infty)\right) < \infty$ és $\mathbf{E}\left([M](\infty)\right) < \infty$ az integrálok szétszedhetők, így

$$\|M\|_{\mathcal{H}^2}^2 \overset{\circ}{=} \mathbf{E}\left(M^2(\infty)\right) = \mathbf{E}\left([M](\infty)\right).$$

Doléans-mérték

Definition

Legyen M folytonos lokális martingál. Tetszőleges szorzatmérhető halmazra

$$\alpha_M(B) \circeq \mathbf{E}\left(\int_0^\infty \chi_B d[M]\right).$$

α_M az M Doléans-mértéke. Jelölje $\mathcal{L}^2(M)$ az $(\mathbb{R}_+ \times \Omega, \mathcal{R}, \alpha_M)$ mértéktéren négyzetesen integrálható, progresszíven mérhető függvények ekvivalenciaosztályaiból álló teret. Az $\mathcal{L}^2(M)$ Hilbert-térben a normát $\|\cdot\|_M$ módon fogjuk jelölni.

A definícióból világos, hogy $X \in \mathcal{L}^2(M)$ pontosan akkor, ha $\mathbf{E}\left(\int_0^\infty X^2 d[M]\right) < \infty$. Ebből következően majdnem minden trajektóriára $X(\omega)$ eleme az $L^2(\mathbb{R}_+, [M](\omega))$ mértéktérnek. Ha $M \in \mathcal{H}^2$, akkor majdnem minden kimenetelre az $[M](\omega)$ mérték véges. Ilyenkor az $X(\omega)$ integrálható az egész $\mathbb{R}_+$ félegyenesen. Ha M lokális martingál, akkor az $X(\omega)$ minden véges szakaszon integrálható, így az $X \bullet [M]$ értelmes.

A Wiener-folyamatok Doléans-mértéke

Example

A Wiener-folyamat esete.

A Wiener-folyamat kvadratikus variációja a $[0, t]$ szakaszon t, ezért egy $[0, T]$ szakaszon $\|X\|_w^2 = \mathbf{E}\left(\int_0^T X^2(s)\, ds\right)$. Speciálisan, ha $T < \infty$, akkor $w \in \mathcal{L}^2(w)$, ugyanis a Fubini–tétel szerint

$$\|w\|_w^2 = \mathbf{E}\left(\int_0^T w^2(s)\, ds\right) = \int_0^T \mathbf{E}\left(w^2(s)\right) ds = \int_0^T s ds < \infty.$$

A főtétel

Theorem

Ha M folytonos lokális martingál, $X \in \mathcal{L}^2(M)$, akkor létezik, mégpedig egyetlen, olyan $X \bullet M$ módon jelölt $\mathcal{H}_0^2$-beli elem, amelyre minden $N \in \mathcal{H}^2$ esetén érvényes az

$$[X \bullet M, N] = X \bullet [M, N]$$

úgynevezett polaritási szabály.

Ha az $X \bullet M$ folyamatot $\int_0^t XdM$ módon jelöljük, akkor a polaritási szabály

$$\left[\int_0^t XdM, N\right] = \int_0^t Xd[M, N]$$

módon írható. A bizonyítás több részből áll. Egyrészt be kell látni, hogy a definíció értelmes, másrészt egyértelmű, harmadrészt teljesül a polaritási szabály.

Egyértelműség

Az egyértelműséget könnyen igazolhatjuk. Ha I_1 és I_2 két a polaritási szabálynak eleget tevő $\mathcal{H}_0^2$-beli elem, akkor minden $N \in \mathcal{H}^2$-re

$$[I_1, N] = X \bullet [M, N] = [I_2, N],$$

amiből tetszőleges $N \in \mathcal{H}^2$-re $[I_1 - I_2, N] = 0$. Speciálisan $I_1 - I_2 \in \mathcal{H}_0^2 \subseteq \mathcal{H}^2$, ezért

$$[I_1 - I_2, I_1 - I_2] \overset{\circ}{=} [I_1 - I_2] = 0.$$

Felhasználva, hogy $I_1 - I_2 \in \mathcal{H}_0^2$, $I_1 - I_2 = 0$, amiből $I_1 = I_2$.

Kunita–Watanabe egyenlőtlenség használata

Rátérve a létezés igazolására tegyük fel, hogy $N \in \mathcal{H}_0^2$. A Kunita–Watanabe-egyenlőtlenség és a $\mathcal{H}^2$ normájának kvadratikus variációval való képlete szerint

$$\begin{aligned}
\left|\mathbf{E}\left(\int_0^\infty X d\left[M,N\right]\right)\right| &\leq \left\|\sqrt{\int_0^\infty X^2 d\left[M\right]}\right\|_2 \left\|\sqrt{\int_0^\infty d\left[N\right]}\right\|_2 \mathrel{\mathring{=}} \\
&\mathrel{\mathring{=}} \|X\|_M \sqrt{\mathbf{E}\left(\int_0^\infty d\left[N\right]\right)} = \\
&= \|X\|_M \sqrt{\mathbf{E}\left(\left[N\right](\infty)\right)} = \|X\|_M \|N\|_{\mathcal{H}^2} .
\end{aligned}$$

Ez alapján az

$$N \mapsto \mathbf{E}\left(\int_0^\infty X d\left[M, N\right]\right)$$

a $\mathcal{H}_0^2$ Hilbert-téren értelmezett folytonos lineáris funkcionál, tehát van olyan $X \bullet M \in \mathcal{H}_0^2$, hogy

$$\mathbf{E}\left(\int_0^\infty X d\left[M, N\right]\right) = (X \bullet M, N) \mathrel{\hat{=}} \mathbf{E}\left(\left(X \bullet M\right)(\infty) N(\infty)\right).$$

Megállási opciókról szóló tétel alkalmazása

A bizonyítás érdemi része annak belátása, hogy teljesül a polaritási azonosság. Ha τ tetszőleges megállási idő, akkor mivel $X \bullet M \in \mathcal{H}_0^2$, és a $\mathcal{H}_0^2$ elemei egyenletesen integrálhatóak, ezért a megállási opciókról szóló tétel alapján

$$(X \bullet M)(\tau) = \mathbf{E}\left((X \bullet M)(\infty) \mid \mathcal{F}_\tau\right),$$

amit $N(\tau)$-val megszorozva, és mind a két oldal várható értékét véve:

$$\mathbf{E}\left((X \bullet M)(\tau) \cdot N(\tau)\right) = \mathbf{E}\left(\mathbf{E}\left((X \bullet M)(\infty) \mid \mathcal{F}_\tau\right) \cdot N(\tau)\right).$$

A megállítási szabály használata

A teljes várható érték tétel szerint tovább számolva

$$\begin{gathered}\mathbf{E}\left(\left(X\bullet M\right)\left(\tau\right)N\left(\tau\right)\right)=\mathbf{E}\left(\mathbf{E}\left(\left(X\bullet M\right)\left(\infty\right)N\left(\tau\right)\mid\mathcal{F}_{\tau}\right)\right)\\ =\mathbf{E}\left(\left(X\bullet M\right)\left(\infty\right)N\left(\tau\right)\right)=\mathbf{E}\left(\left(X\bullet M\right)\left(\infty\right)N^{\tau}\left(\infty\right)\right)\\ =\mathbf{E}\left(\int_{0}^{\infty}Xd\left[M,N^{\tau}\right]\right)=\mathbf{E}\left(\int_{0}^{\infty}Xd\left[M,N\right]^{\tau}\right)=\mathbf{E}\left(\int_{0}^{\tau}Xd\left[M,N\right]\right).\end{gathered}$$

A progresszíven való mérhetőség kihasználása

Tekintsük az

$$S(t) \overset{\circ}{=} (X \bullet M)(t) N(t) - \int_0^t X d[M, N]$$

folyamatot. $S(0) = 0$. Vegyük észre, hogy az S adaptált, ugyanis az $(X \bullet M) N$ két adaptált függvény szorzata, az $\int_0^t X d[M, N]$ függvény pedig adaptált, ugyanis az X progresszíven mérhető. Az $[M, N]$ folyamat folytonos, tehát az $\int_0^t X d[M, N]$ integrál a t határ olyan folytonos függvénye, amely a Kunita–Watanabe-egyenlőtlenség szerint majdnem minden kimenetelre véges.

A martingál megmaradási tétel használata

Az S folytonos, adaptált és tetszőleges τ megállási idővel az előzőek miatt

$$\mathbf{E}\left(S\left(\tau\right)\right) \overset{\circ}{=} \mathbf{E}\left(\left(X \bullet M\right)\left(\tau\right) N\left(\tau\right)\right) - \mathbf{E}\left(\int_0^{\tau} X\left[M, N\right]\right) = 0 = \mathbf{E}\left(S\left(0\right)\right),$$

ezért az S martingál. Így a négyzetes keresztvariáció karakterizációja alapján $X \bullet [M, N]$ éppen az $X \bullet M$ és az N keresztvariációja, vagyis

$$[X \bullet M, N] = X \bullet [M, N],$$

ami éppen a polaritási szabály!

A kezdőpontra vonatkozó feltétel elejtése

Végezetül, ha $N \in \mathcal{H}^2$, akkor, $N - N(0) \in \mathcal{H}_0^2$, tehát

$$\begin{aligned}
[X \bullet M, N] &= [X \bullet M, N - N(0) + N(0)] = \\
&= [X \bullet M, N - N(0)] + [X \bullet M, N(0)] = \\
&= X \bullet [M, N - N(0)] + 0.
\end{aligned}$$

A sztochasztikus integrál lineáris

Theorem

Az $X \bullet M$ bilineáris, vagyis

$$X \bullet (\alpha_1 M_1 + \alpha_2 M_2) = \alpha_1 (X \bullet M_1) + \alpha_2 (X \bullet M_2)$$

és

$$(\alpha_1 X_1 + \alpha_2 X_2) \bullet M = \alpha_1 (X_1 \bullet M) + \alpha_2 (X_2 \bullet M)$$

feltéve, hogy az összes kifejezés értelmes. Ha az egyenlőségben szereplő három tagból kettő értelmes, akkor értelmes a harmadik is.

Bizonyítás

Ha $X \in \mathcal{L}^2(M_1) \cap \mathcal{L}^2(M_2)$, akkor

$$\mathbf{E}\left(\int_0^\infty X^2 d[M_1]\right) < \infty \quad \text{és} \quad \mathbf{E}\left(\int_0^\infty X^2 d[M_2]\right) < \infty.$$

Elemi megfontolásokból $[M_1 + M_2] \leq 2([M_1] + [M_2])$, amiből

$$\mathbf{E}\left(\int_0^\infty X^2 d[M_1 + M_2]\right) \leq$$

$$\leq 2\mathbf{E}\left(\int_0^\infty X^2 d[M_1]\right) + 2\mathbf{E}\left(\int_0^\infty X^2 d[M_2]\right) < \infty,$$

vagyis $X \in \mathcal{L}^2(M_1 + M_2)$.

Bizonyítás

A trajektóriánként való integrálás linearitása és a kvadratikus keresztvariáció bilinearitása alapján

$$\begin{aligned}
[X \bullet (\alpha_1 M_1 + \alpha_2 M_2), N] &= X \bullet [(\alpha_1 M_1 + \alpha_2 M_2), N] = \\
&= X \bullet (\alpha_1 [M_1, N] + \alpha_2 [M_2, N]) = \\
&= \alpha_1 X \bullet [M_1, N] + \alpha_2 X \bullet [M_2, N] = \\
&= [\alpha_1 X \bullet M_1 + \alpha_2 X \bullet M_2, N],
\end{aligned}$$

amiből az integrál linearitása evidens. A második sor az

$$\begin{aligned}
[(\alpha_1 X_1 + \alpha_2 X_2) \bullet M, N] &= (\alpha_1 X_1 + \alpha_2 X_2) \bullet [M, N] = \\
&= \alpha_1 X_1 \bullet [M, N] + \alpha_2 X_2 \bullet [M, N]
\end{aligned}$$

miatt evidens. Az integrálhatóságra vonatkozó megjegyzés azonnal következik az $\mathcal{L}^2(M)$ tér linearitásából.

Elemi folyamatok integrálja

Definition

Az X elemi folyamat, ha

$$X \circeq \sum_{i=1}^{n} \xi_i \chi\left(\left(t_{i-1}, t_i\right]\right)$$

ahol az ξ_i ugrások $\mathcal{F}_{t_{i-1}}$ mérhetőek és a t_i pontok száma véges.

Theorem

Ha X korlátos elemi folyamat, $M \in \mathcal{H}^2$, akkor

$$\int_0^t X dM \circeq (X \bullet M)(t) = \sum_i \xi_i \left(M\left(t_i \wedge t\right) - M\left(t_{i-1} \wedge t\right)\right).$$

Bizonyítás

Az integrál linearitását kihasználva elég kiszámolni az $X \stackrel{\circ}{=} \xi\chi\left(\left(a, b\right]\right)$ alakú folyamatok integrálját. A kiemelési szabály segítségével látható, hogy a

$$\xi\left(M\left(b \wedge t\right) - M\left(a \wedge t\right)\right) = \xi\left(M^{b}\left(t\right) - M^{a}\left(t\right)\right) \stackrel{\circ}{=} \xi \cdot U\left(t\right)$$

$\mathcal{H}^2$-martingál. Az $UN - \left[U, N\right]$ lokális martingál, így felhasználva a ξ mérhetőségére tett feltételt, illetve, hogy az a előtt a kifejezés nulla a $\xi UN - \xi\left[U, N\right]$ is lokális martingál, tehát

$$\left[\xi U, N\right] \stackrel{\circ}{=} \left[\xi\left(M^{b} - M^{a}\right), N\right] = \xi\left[U, N\right] \stackrel{\circ}{=} \xi\left[M^{b} - M^{a}, N\right].$$

Bizonyítás

Ezt felhasználva

$$\begin{aligned}
[X \bullet M, N] &\stackrel{\circ}{=} \left[\xi\left(M^b - M^a\right), N\right] = \xi\left[M^b - M^a, N\right] = \\
&= \xi\left(\left[M^b, N\right] - [M^a, N]\right) = \\
&= \xi\left([M, N]^b - [M, N]^a\right) = \\
&= \xi\chi\left((a, b]\right) \bullet [M, N] = X \bullet [M, N].
\end{aligned}$$

Asszociativitási szabály trajektóriánként vett integrálokra

Theorem

Ha ν egy (előjeles) mérték és

$$\mu(B) \circeq \int_B f d\nu \circeq (f \bullet \nu)(B)$$

értelmes, akkor az $\int_X g d\mu$ pontosan akkor értelmes, ha az $\int_X fg d\nu$ értelmes és ilyenkor

$$\int_X gf d\nu = \int_X g d\mu.$$

Asszociativitási szabály trajektóriánként vett integrálokra

Legyen $\nu \geq 0$. Ha B mérhető, és $\mu(B) \circeq \int_B f d\nu$, $f \geq 0$, akkor

$$\int_X \chi_B d\mu \circeq \mu(B) \circeq \int_B f d\nu \circeq \int_X \chi_B f d\nu.$$

Ebből az integrál linearitása és a monoton konvergencia tétel miatt tetszőleges, $g \geq 0$ mérhető függvényre

$$\int_X g d\mu = \int_X g f d\nu,$$

ahol a két oldal egyszerre véges, vagy végtelen. Ebből az állítás evidens, ha $\left|\int_X g d\mu\right| < \infty$.

Asszociativitási szabály trajektóriánként vett integrálokra

Ha a $\int_X gd\mu$ értelmes, akkor mondjuk a g^+ integrálja véges és így

$$\int_X (gf)^+ d\nu = \int_X g^+ fd\nu = \int_X g^+ d\mu < \infty.$$

vagyis ilyenkor a másik oldal is értelmes, illetve megfordítva, és az egyenlőség igaz véges és végtelen integrálokra. Ha az f előjeles, akkor $\mu = \mu^+ - \mu^-$, ahol $\mu^\pm = f^\pm \bullet \nu$. Ilyenkor a g^+ integrálja csak akkor lehet véges, ha a $g^+ f^+$ és a $g^+ f^-$ integrálja a ν szerint véges, ami éppen azt jelenti, hogy a $g^+ f$ integrálja véges a ν szerint, illetve nyilván megfordítva. $\int_X gd\mu = \infty$, pontosan akkor, ha a $\int_X g^\pm d\mu^\pm$ integrálok közül legalább az egyik $+\infty$, a $\int_X g^\pm d\mu^\mp$ integrálok pedig végesek. Az $\int_X fgd\nu$ pontosan akkor $+\infty$, ha az $(fg)^+ = f^+g^+ + f^-g^-$ integrálja végtelen az $(fg)^- = f^-g^+ + f^+g^-$ integrálja véges, ez pedig ekvivalens az előzővel.

Asszociativitási szabály trajektóriánként vett integrálokra

Example

Ha $X \in \mathcal{L}^2(M)$, akkor $X^2 \bullet [M] = X \bullet (X \bullet [M])$.

Mivel $X \in \mathcal{L}^2(M)$, ezért majdnem minden kimenetelre az X trajektóriája integrálható az $[M]$ megfelelő trajektóriája által generált mértékre nézve. Véges szakaszok mértéke az $[M]$ szerint véges, így minden szakaszon az X trajektóriái integrálhatóak az $[M]$ megfelelő trajektóriái szerint definiált mértékre nézve. Így ha $\nu \circeq [M](\omega)$, akkor a $\mu \circeq X(\omega) \bullet [M](\omega)$ minden véges szakaszon értelmes és mivel az $X^2(\omega)$ integrálható a ν-re nézve ezért a véges szakaszokon az $X(\omega)$ integrálható a μ-re nézve és érvényes az aszociativitási szabály.

Itô-izometria

Theorem

Ha $M \in \mathcal{H}^2$, *akkor az* $X \mapsto X \bullet M$ *leképezés* $\mathcal{L}^2(M) \to \mathcal{H}_0^2$ *izometria, vagyis*

$$\mathbf{E}\left((X \bullet M)^2(\infty)\right) \triangleq \|X \bullet M\|_{\mathcal{H}^2}^2 = \|X\|_M^2 \triangleq \mathbf{E}\left(\int_0^\infty X^2 d[M]\right).$$

Bizonyítás

Az integrál konstrukciója, illetve az $X \bullet M \in \mathcal{H}^2$ szerint

$$\begin{aligned} \|X \bullet M\|_{\mathcal{H}^2}^2 &\overset{\circ}{=} (X \bullet M, X \bullet M) = \mathbf{E}\left(\left[X \bullet M, X \bullet M\right](\infty)\right) = \\ &= \mathbf{E}\left(\int_0^\infty X d\left[M, X \bullet M\right]\right) = \mathbf{E}\left(\int_0^\infty X d\left(X \bullet [M, M]\right)\right) = \\ &= \mathbf{E}\left(\int_0^\infty X^2 d\left[M\right]\right) \overset{\circ}{=} \|X\|_M^2 . \end{aligned}$$

Vegyük észre, hogy az $X \bullet (X \bullet [M]) = X^2 \bullet [M]$ egyenlőség éppen a trajektóriánként vett asszociativitási szabály. (Az az eset, amikor az integrálok végesek, ugyanis az $X^2 \bullet .[M]$ az $X \in \mathcal{L}^2(M)$ miatt majdnem mindenhol véges.)

Megjegyzés

A sztochasztikus integrálás elméletének számos felépítése ismert. A legtermészetesebb az Itô-izometriára épül. Először az elemi folyamatok integrálját definiáljuk, majd a martingáltulajdonság segítségével elemi számolással belátjuk az Itô-izometriát. Következő lépésként az izometria segítségével az integrált kiterjesztjük az elemi folyamatok lezártjára. Az Itô-izometriára épülő felépítés, bár igen szemléletes, valamivel nehezebb mint az itt tárgyalt felépítés. A nehézség abban áll, hogy nem világos, hogy milyen folyamatokra lehet az integrált definiálni, vagyis milyen folyamatok állnak elő elemi folyamatok $\mathcal{L}^2(M)$-határértékeként.

Example

Az $\int_0^1 wdw$ változó szórása $1/\sqrt{2}$.

A $[0,1]$ szakaszon

$$\|w\|_w^2 \triangleq \mathbf{E}\left(\int_0^1 w^2 d[w]\right) = \int_0^1 \mathbf{E}\left(w^2(s)\right) ds = \int_0^1 sds = \frac{1}{2} < \infty,$$

így $w \in \mathcal{L}^2(w)$ és az integrál definíciója értelmes. Az integrálfüggvény martingál, ezért a várható értéke nulla. Az Itô-izometria és a Fubini-tétel szerint

$$\mathbf{E}\left(\left(\int_0^1 wdw\right)^2\right) = \|w\|_w^2 = \frac{1}{2},$$

amiből a keresett szórás $1/\sqrt{2}$.

Asszociativitási szabály

Theorem

Ha $X \in \mathcal{L}^2(M)$, *akkor* $Y \in \mathcal{L}^2(X \bullet M)$ *pontosan akkor, ha* $XY \in \mathcal{L}^2(M)$ *és ilyenkor*

$$(YX) \bullet M = Y \bullet (X \bullet M).$$

Az asszociativitási szabály igazolása sztochasztikus integrálokra

A sztochasztikus integrál konstrukciója szerint, felhasználva, hogy az asszociativitási szabály trajektóriánkénti integrálokra teljesül

$$\begin{aligned}[X \bullet M] &\overset{\circ}{=} [X \bullet M, X \bullet M] = X \bullet [M, X \bullet M] = \\ &= X \bullet (X \bullet [M, M]) = X^2 \bullet [M]\end{aligned}$$

ugyanis véges integrálok vannak mindenhol.. Ha $Y \in \mathcal{L}^2 (X \bullet M)$, akkor felhasználva, nem negatív függvényekre a trajektóriánkénti asszociativitási szabályt.

$$\begin{aligned}\infty &> \mathbf{E}\left(\int_0^\infty Y^2 d [X \bullet M]\right) = \mathbf{E}\left(\int_0^\infty Y^2 d \int_0^s X^2 d [M]\right) = \\ &= \mathbf{E}\left(\int_0^\infty Y^2 X^2 d [M]\right),\end{aligned}$$

vagyis $YX \in \mathcal{L}^2 (M)$. Az egyenlőséget fordítva olvasva az $XY \in \mathcal{L}^2 (M)$ implikálja az $Y \in \mathcal{L}^2 (X \bullet M)$-et.

Bizonyítás

A Kunita–Watanabe-egyenlőtlenség miatt

$$\int_0^\infty X d\left[M, N\right] \leq \sqrt{\int_0^\infty X^2 d\left[M\right]}\sqrt{\int_0^\infty d\left[N\right]},$$

így ha $X \in \mathcal{L}^2\left(M\right)$, akkor az X majdnem minden kimenetelre $\left[M, N\right]$ integrálható, így alább alkalmazható az aszociatvitási szabály.

$$\begin{aligned}\left[\left(YX\right) \bullet M, N\right] &= \left(YX\right) \bullet \left[M, N\right] = Y \bullet \left(X \bullet \left[M, N\right]\right) = \\ &= Y \bullet \left[X \bullet M, N\right] = \left[Y \bullet \left(X \bullet M\right), N\right].\end{aligned}$$

A sztochasztikus integrál egyértelműsége alapján

$$\left(YX\right) \bullet M = Y \bullet \left(X \bullet M\right).$$

Megállítási szabály

Theorem

Ha τ megállási idő, akkor

$$X \bullet M^{\tau} = \left(\chi\left(\left[0,\tau\right]\right) X\right) \bullet M = \left(X \bullet M\right)^{\tau}.$$

Bizonyítás

$$
\begin{aligned}
\left[(X \bullet M)^{\tau}, N\right] &= \left[(X \bullet M), N\right]^{\tau} = \\
&= (X \bullet [M, N])^{\tau} = X \bullet [M, N]^{\tau} = \\
&= X \bullet [M^{\tau}, N] = [X \bullet M^{\tau}, N],
\end{aligned}
$$

következésképpen az egyértelműség miatt

$$(X \bullet M)^{\tau} = X \bullet M^{\tau}.$$

Bizonyítás

Hasonlóan, ha $N \in \mathcal{H}^2$ tetszőleges, akkor

$$\begin{aligned} [X \bullet M^{\tau}, N] &= X \bullet [M^{\tau}, N] = X \bullet [M, N]^{\tau} = \\ &= (\chi([0, \tau]) X) \bullet [M, N] = \\ &= [(\chi([0, \tau]) X) \bullet M, N], \end{aligned}$$

amiből

$$X \bullet M^{\tau} = (\chi([0, \tau]) X) \bullet M.$$

Lokálisan négyzetesen integrálható integrandusok

Definition

Legyen M folytonos, lokális martingál. Az $\mathcal{L}^2_{\text{loc}}(M)$ téren az olyan X progresszíven mérhető folyamatok halmazát értjük, amelyekhez az M-nek van olyan (τ_n) $\mathcal{H}^2$-lokalizációs sorozata, hogy minden n-re $X \in \mathcal{L}^2(M^{\tau_n})$, vagyis

$$\mathbf{E}\left(\int_0^\infty X^2 d\left[M^{\tau_n}\right]\right) = \mathbf{E}\left(\int_0^\infty X^2 d\left[M\right]^{\tau_n}\right) =$$

$$= \mathbf{E}\left(\int_0^{\tau_n} X^2 d\left[M\right]\right) = \mathbf{E}\left(\int_0^\infty \chi\left(\left[0,\tau_n\right]\right) X^2 d\left[M\right]\right) \triangleq$$

$$\triangleq \int_{(0,\infty)\times\Omega} \chi\left(\left[0,\tau_n\right]\right) X^2 d\alpha_M < \infty.$$

Lokálisan négyzetesen integrálható integrandusok

Theorem

Ha az M folytonos lokális martingál, akkor $X \in \mathcal{L}^2_{loc}(M)$ pontosan akkor, ha az $X^2 \bullet [M]$ véges majdnem minden kimenetelre.

Ha az M folytonos, akkor az $[M]$ is folytonos. Így ha az $Y \stackrel{\circ}{=} X^2 \bullet [M]$ véges, akkor a

$$\tau_n \stackrel{\circ}{=} \inf \{t \mid Y(t) \geq n\}$$

alkalmas lokalizációs sorozat, ugyanis $|Y^{\tau_n}| \leq n$, tehát

$$\mathbf{E}\left(\int_0^{\tau_n} X^2 d[M]\right) = \mathbf{E}(Y(\tau_n)) \leq n < \infty.$$

A fordított irány evidens, ugyanis a feltétel miatt minden n-re az Y^{τ_n} majdnem minden kimenetelre véges és a nullmértékű halmazok egyesíthetőek.

Lokálisan négyzetesen integrálható integrandusok

A lokális martingál szerinti sztochasztikus integráltól elvárjuk, hogy lokális martingál legyen, így ha az $X \bullet M$ létezik, akkor a kvadratikus variációja véges, vagyis, ha érvényes a ploaritási szabály, akkor

$$[X \bullet M] = X^2 \bullet [M] < \infty,$$

így folytonos integrátor esetén az $\mathcal{L}^2_{\mathrm{loc}}(M)$.a maximális tér, amely elemeit integrálni tudjuk.

Example

Ha M folytonos, akkor minden folytonos adaptált folyamat eleme az $\mathcal{L}^2_{\mathrm{loc}}(M)$ térnek. Általában minden lokálisan korlátos, progresszíveb mérhető folyamat eleme az $\mathcal{L}^2_{\mathrm{loc}}(M)$-nek.

Lokális martingálok szerinti integrál létezése

Theorem

Ha M folytonos lokális martingál, akkor tetszőleges $X \in \mathcal{L}^2_{loc}(M)$ folyamathoz létezik, mégpedig egyetlen olyan $X \bullet M$ módon jelölt,

1. *a nulla pontban nulla értéket felvevő, folytonos lokális martingál, amelyre*
2. *minden N folytonos lokális martingálra érvényes az*

$$[X \bullet M, N] = X \bullet [M, N]$$

szabály.

Lokális martingálok szerinti integrál létezése

Legyen $X \in \mathcal{L}^2_{\text{loc}}(M)$ és $M^{\tau_n} \in \mathcal{H}^2$ és $X \in \mathcal{L}^2(M^{\tau_n})$. Tekintsük az $I_n \circeq X \bullet M^{\tau_n}$ integrálokat. Az I_{n+1} a $[0, \tau_n]$ szakaszon megegyezik az

$$I_{n+1}^{\tau_n} \circeq \left(X \bullet M^{\tau_{n+1}}\right)^{\tau_n} = X \bullet \left(M^{\tau_{n+1}}\right)^{\tau_n} = X \bullet M^{\tau_n} = I_n$$

folyamattal, vagyis a $X \bullet M$ integrál egyértelműen definiálható ha értékét a $[0, \tau_n]$ szakaszon az I_n-nel értelmezzük. Az $X \bullet M$ a nulla időpontban biztosan eltűnik és folytonos. Triviálisan

$$(X \bullet M)^{\tau_n} \circeq \left(X \bullet M^{\tau_n}\right)^{\tau_n} = X \bullet M^{\tau_n}.$$

$X \bullet M^{\tau_n}$ $\mathcal{H}^2$-martingál így az $X \bullet M$ lokális négyzetesen integrálható martingál.

A polaritási szabály és egyértelműség

A kvadratikus variációra vonatkozó megállítási szabály szerint

$$
\begin{aligned}
[X \bullet M, N]^{\tau_n} &= \left[(X \bullet M)^{\tau_n}, N^{\tau_n}\right] \overset{\circ}{=} \\
&\overset{\circ}{=} \left[X \bullet M^{\tau_n}, N^{\tau_n}\right] = X \bullet \left[M^{\tau_n}, N^{\tau_n}\right] = \\
&= X \bullet [M, N]^{\tau_n} = (X \bullet [M, N])^{\tau_n},
\end{aligned}
$$

amiből a szabály evidens. A polarizási szabály, miként a négyzetesen integrálható esetben, egyértelműen definiálja az $X \bullet M$ integrált ugyanis, ha egy másik Z lokális martingálra is $[Z, N] = X \bullet [M, N]$, akkor $[Z - X \bullet M, N] = 0$, amit az $Z - X \bullet M \overset{\circ}{=} N$ esetén alkalmazva $[Z - X \bullet M] = 0$, amiből $Z = X \bullet M$.

Theorem

Tetszőleges M folytonos lokális martingál és $X \in \mathcal{L}^2_{loc}(M)$ esetén érvényesek a következő integrálási szabályok:

1. *Tetszőleges τ megállási időre*

$$(X \bullet M)^{\tau} = \chi([0,\tau]) X \bullet M = X^{\tau} \bullet M^{\tau} = X \bullet M^{\tau}.$$

2. *Ha $X \in \mathcal{L}^2_{loc}(M)$ akkor $Y \in \mathcal{L}^2_{loc}(X \bullet M)$ pontosan akkor, ha $XY \in \mathcal{L}^2_{loc}(M)$ és ilyenkor*

$$(YX) \bullet M = Y \bullet (X \bullet M).$$

3. *Az $X \bullet M$ bilineáris, vagyis*

$$X \bullet (\alpha_1 M_1 + \alpha_2 M_2) = \alpha_1 (X \bullet M_1) + \alpha_2 (X \bullet M_2)$$

és

$$(\alpha_1 X_1 + \alpha_2 X_2) \bullet M = \alpha_1 (X_1 \bullet M) + \alpha_2 (X_2 \bullet M).$$

Az asszociativitási szabály igazolása

Legyen (τ_n) az M és az $X \bullet M$ közös lokalizációs sorozata. Az $Y \in \mathcal{L}^2_{\text{loc}}(X \bullet M)$ tartalmazásból evidens módon

$$Y \in \mathcal{L}^2\left((X \bullet M)^{\tau_n}\right) = \mathcal{L}^2\left(X \bullet M^{\tau_n}\right).$$

Így a már belátott alakból

$$\begin{aligned}(Y \bullet (X \bullet M))^{\tau_n} &\overset{\circ}{=} Y \bullet (X \bullet M)^{\tau_n} \overset{\circ}{=} Y \bullet (X \bullet M^{\tau_n}) = \\ &= YX \bullet M^{\tau_n} \overset{\circ}{=} (YX \bullet M)^{\tau_n},\end{aligned}$$

amiből az asszociativitási szabály evidens.
A linearitás indoklása analóg.

A lokálisan négyzetesen integrálható folyamatok jellemzése

Corollary

Az $\mathcal{L}^2_{loc}(M)$ tér pontosan azokból a progresszíven mérhető folyamatokból áll, amelyekre minden t-re

$$\int_0^t X^2 d[M] \circeq \left(X^2 \bullet [M]\right)(t) < \infty.$$

Definition

Az X folyamatot szemimartingálnak mondjuk, ha $X = X(0) + L + V$, ahol az L lokális martingál a V adaptált, korlátos változású folyamat. Ha az L és a V folytonos, akkor folytonos szemimartingálról beszélünk.

Fisk tétele miatt a folytonos szemimartingálok felbontása egyértelmű. Ez a folytonosság nélkül nem igaz. A legegyszerűbb példa a Poisson-folyamat, amelyre a

$$\pi(t) = \pi(t) + 0 = (\pi(t) - \lambda t) + \lambda t$$

két különböző felbontás.

Szemimartingálok szerinti integrálás

Az integrál definícióját értelemszerűen kiterjeszthetjük folytonos szemimartingálokra:

Definition

Legyen $X = X(0) + L + V$ folytonos szemimartingál. Ha valamely Y folyamatra az $Y \bullet L$ és az $Y \bullet V$ integrálok értelmesek, akkor az Y folyamat X szerinti sztochasztikus integrálján az

$$Y \bullet X \stackrel{\circ}{=} Y \bullet L + Y \bullet V$$

összeget értjük. Folytonos szemimartingálok felbontása egyértelmű, így az integrál definíciója is egyértelmű.

Majorált konvergencia tétele sztochasztikus integrálokra

Theorem

Legyen X folytonos szemimartingál. Tegyük fel, hogy (Y_n) progresszíven mérhető folyamatok olyan sorozata, amelyre az Y_n minden pontban valamely Y_∞ folyamathoz tart. Ha van olyan az X szerint integrálható Y folyamat, amelyre $|Y_n| \leq Y$, akkor $Y_n \bullet X \to Y_\infty \bullet X$, ahol a konvergencia sztochasztikus konvergenciában minden kompakt intervallumon egyenletesen, vagyis

$$\sup_{s \leq t} |(Y_n \bullet X)(s) - (Y_\infty \bullet X)(s)| \xrightarrow{p} 0, \quad t \geq 0.$$

Az állítást elég külön-külön az X korlátos változású és lokális martingál részére belátni. Az integrál linearitása miatt elegendő belátni az állítást akkor, ha $Y_\infty = 0$.

Bizonyítás a korlátos változású részre

Először tegyük fel, hogy az X korlátos változású. Mivel $|Y_n| \leq Y$, ezért tetszőleges ω-ra és $[0, t]$ intervallumra az $Y_n(\omega)$ trajektória a $[0, t]$ szakaszon integrálható. Trajektóriánként alkalmazva a Lebesgue-féle majorált konvergencia tételt minden $s \leq t$ felső határra

$$\left| \int_0^s Y_n dX \right| \leq \int_0^t |Y_n| \, d\mathrm{Var}(X) \to 0,$$

tehát az integrál trajektóriánként, a felső határ szerint egyenletesen, nullához tart. A pontonkénti konvergenciából következik a sztochasztikus konvergencia, így az állításban szereplő konvergencia teljesül.

Bizonyítás a lokális martingál részre

Legyen X lokális martingál. Az Y a feltétel szerint az X szerint integrálható, tehát $Y \in \mathcal{L}^2_{\text{loc}}(X)$ .Legyen τ olyan megállási idő, amelyre $X^\tau \in \mathcal{H}^2$ és $Y \in \mathcal{L}^2(M^\tau)$. Ha $Y \in \mathcal{L}^2(M^\tau)$, akkor az $|Y_n| \leq Y$ miatt $Y_n \in \mathcal{L}^2(M^\tau)$, így az $Y_n \to 0$ miatt a majorált konvergencia tétel felhasználásával

$$\begin{aligned} \|Y_n\|^2_{X^\tau} &\circeq \mathbf{E}\left(\int_0^\infty Y_n^2 d\left[X^\tau\right]\right) = \mathbf{E}\left(\int_0^\infty Y_n^2 d\left[X\right]^\tau\right) = \\ &= \mathbf{E}\left(\int_0^\infty \chi\left([0,\tau]\right) Y_n^2 d\left[X\right]\right) \to 0, \end{aligned}$$

tehát az $\mathcal{L}^2(X^\tau)$ térben $Y_n \to 0$.

Bizonyítás a lokális martingál részre

Legyen (τ_n) az X integrandus $\mathcal{H}^2$-lokalizációs sorozata. Legyen $\varepsilon, \delta > 0$ és jelölje σ az egyik olyan τ_n megállási idő, amelyre $\mathbf{P}(\tau_n \leq t) \leq \delta$. A $[0, \sigma]$ véletlen intervallumon az $Y_n \bullet X$ megegyezik az $Y_n \bullet X^\sigma$ folyamattal, vagyis ha $s \leq \sigma(\omega)$, akkor

$$(Y_n \bullet X)(s, \omega) = (Y_n \bullet X^\sigma)(s, \omega).$$

Ha $A \circeq \left\{\sup_{s \leq t} |Y_n \bullet X|(s) > \varepsilon\right\}$, akkor

$$\begin{aligned} \mathbf{P}(A) &= \mathbf{P}((\sigma \leq t) \cap A) + \mathbf{P}((\sigma > t) \cap A) \leq \\ &\leq \mathbf{P}(\sigma \leq t) + \mathbf{P}((\sigma > t) \cap A) \leq \delta + \mathbf{P}(A_\sigma) \end{aligned}$$

ahol A_σ az A-val analóg módon képzett halmaz, vagyis ahol az $Y_n \bullet X$, helyett az $Y_n \bullet X^\sigma$ folyamat van.

Bizonyítás a lokális martingál részre

Mivel az $\mathcal{L}^2(X^\sigma)$ topológiában $Y_n \to 0$, és mivel a $Z \mapsto Z \bullet X^\sigma$ izometria, ezért a $\mathcal{H}_0^2$-ban $Y_n \bullet X^\sigma \to 0$. A Doob-egyenlőtlenség szerint

$$\begin{aligned}\mathbf{E}\left(\left(\sup_{s\leq\infty}\left|Y_n \bullet X^\sigma\right|(s)\right)^2\right) &\leq 4\left(\mathbf{E}^2\left(\left(\left(Y_n \bullet X^\sigma\right)(\infty)\right)^2\right)\right) = \\ &= 4\left\|Y_n \bullet X^\sigma\right\|_{\mathcal{H}^2}^2 \to 0.\end{aligned}$$

A Markov-egyenlőtlenség szerint az L^2-konvergenciából következik a sztochasztikus konvergencia, ezért

$$\mathbf{P}(A_\sigma) \overset{\circ}{=} \mathbf{P}\left(\sup_{s\leq\tau}\left|Y_n \bullet X^\sigma\right|(s) > \varepsilon\right) \to 0.$$

Lokálisan korlátos folyamatok

Definition

Egy X folyamatot lokálisan korlátosnak mondunk, ha az $X - X(0)$ rendelkezik olyan lokalizációs sorozattal, amelyre nézve az $(X - X(0))^{\tau_n}$ egyenletesen korlátos.

Ha egy X folyamat lokálisan korlátos és progresszíven mérhető és az M egy folytonos lokális martingál, akkor van olyan (τ_n) lokalizációs sorozat, hogy az $(X - X(0))^{\tau_n}$ és az $[M^{\tau_n}]$ is korlátos, így $X \in \mathcal{L}^2_{\text{loc}}(M)$, vagyis az $X \bullet M$ létezik.

Balról reguláris folyamatok és a lokális korlátosság

Theorem

Minden balról reguláris folyamat lokálisan korlátos, így minden balról reguláris, adaptált folyamat integrálható tetszőleges folytonos szemimartingál esetén.

Feltehető, hogy $X(0) = 0$. Legyen

$$\tau_n \mathrel{\hat{=}} \inf \{t : |X(t)| > n\}.$$

A balról való folytonosság miatt $|X^{\tau_n}| \leq n$, ugyanis ha a τ_n időpontban nem teljesülne, akkor a balról való folytonosság miatt a τ_n csökkenthető lenne. A jobb oldali határérték létezése miatt $\tau_n \nearrow \infty$, ugyanis ellenkező esetben a (τ_n) véges torlódási pontjában nem létezhetne a jobb oldali határérték. Triviálisan minden lokálisan korlátos folyamatra és tetszőlges M lokális martingálra az $X^2 \bullet [M]$ folyamat véges, így $X \in \mathcal{L}^2_{\text{loc}}(M)$, így az M feltételezett folytonossága miatt az X integrálható.

Balról reguláris folyamatok integrálhatósága

Theorem

Ha X lokálisan korlátos, adaptált és reguláris, akkor az $X^*(t) \stackrel{\circ}{=} \sup \{|X(s)| : s \leq t\}$ folyamat is lokálisan korlátos és ezért tetszőleges M lokális martingál esetén integrálható.

Az Y reguláris, ezért a szuprémumot elég a racionális koordinátájú pontokban venni, így az X^* progresszíven mérhető. Ha X lokálisan korlátos, akkor triviálisan ugyan avval a (τ_n) lokalizációs sorozattal az X^* is lokálisan korlátos.

A két integrálfogalom balról reguláris függvényekre azonos

Theorem

Ha X folytonos szemimartingál, Y balról-reguláris, adaptált folyamat, akkor az $Y \bullet X$ integrál előáll Itô–Stieltjes-típusú közelítő összegek határértékeként, ahol a konvergencia sztochasztikusan a véges szakaszokon egyenletes.

Legyek $\left(t_k^{(n)}\right)$ egy infinitezimális partíció és $Y^{(n)} \triangleq \sum_k Y\left(t_{k-1}^{(n)}\right)\chi\left(t_{k-1}^{(n)}, t_k^{(n)}\right]$. Az Y balról folytonos, ezért pontonként $Y^{(n)} \to Y$. Vegyük a $K(t) \triangleq \sup_{s<t}|Y(s)|$ folyamatot. és mivel $\left|Y^{(n)}\right| \leq K$, ezért a majorált konvergencia tétel szerint

$$Y^{(n)} \bullet X \to Y \bullet X,$$

ahol a konvergencia sztochasztikusan a véges szakaszokon egyenletes.