Wiener-folyamat

Medvegyev Péter

2008

A Wiener-folyamat definíciója

Definition

A $\{w(t,\omega)\}_{t\geq 0}$ folyamatot Wiener–folyamatnak mondjuk, ha teljesíti az alábbi négy feltételt:

1. $w(0) \equiv 0$,
2. a w növekményei függetlenek,
3. tetszőleges $0 \leq s < t$ értékekre a $w(t) - w(s) \cong N\left(0, \sqrt{t-s}\right)$, vagyis a $w(t) - w(s)$ változó sűrűségfüggvénye

$$g_{t-s}(x) \triangleq \frac{1}{\sqrt{2\pi(t-s)}} \exp\left(\frac{-x^2}{2(t-s)}\right).$$

4. A w folytonos abban az értelemben, hogy minden ω kimenetelre a $w(\omega)$ trajektória folytonos.

Paley–Wiener–Zygmund tétele

Theorem

Majdnem minden ω kimenetelre a $w(\omega)$ trajektória egyetlen időpontban sem deriválható.

Elegendő megmutatni, hogy majdnem minden ω-ra a $w(t,\omega)$-nak egyetlen t időpontban sem létezik a jobb oldali deriváltja. Ha f tetszőleges valós függvény, akkor minden t pontban tekinthetjük a következő deriváltszámokat:

$$D^{+}f(t) = \limsup_{h \searrow 0} \frac{f(t+h) - f(t)}{h}, \quad D_{+}f(t) = \liminf_{h \searrow 0} \frac{f(t+h) - f(t)}{h}.$$

Világos, hogy az f függvény a t pontban pontosan akkor deriválható jobbról, ha a deriváltszámok végesek és megegyeznek.

Paley–Wiener–Zygmund tétele Bizonyítás I

Az egyszerűbb jelölés véget legyen $[a, b] = [0, 1]$. Legyenek $j \geq 1$ és $k \geq 1$ egész számok, és tekintsük az

$$A_{jk} \overset{\circ}{=} \bigcup_{t\in[0,1]} \bigcap_{h\in(0,1/k]} \left\{ \left| \frac{w(t+h) - w(t)}{h} \right| \leq j \right\} = \\ = \bigcup_{t\in[0,1]} \bigcap_{h\in[0,1/k]} \{ |w(t+h) - w(t)| \leq hj \}$$

halmazokat. Világos, hogy a $B \overset{\circ}{=} \cup_{j=1}^{\infty} \cup_{k=1}^{\infty} A_{jk}$ halmaz pontosan azokból az ω kimenetelekből áll, amelyekhez létezik t időpont, hogy

$$-\infty < D_{+}w(t,\omega) \quad \text{és} \quad D^{+}w(t,\omega) < +\infty.$$

A tételt belátjuk, ha megmutatjuk, hogy $\mathbf{P}(B) = 0$.

Paley–Wiener–Zygmund tétele Bizonyítás II

Ehhez viszont elegendő belátni, hogy minden k és j természetes számra $\mathbf{P}\left(A_{jk}\right) = 0$. Rögzítsük a j és a k számokat. Legyen $\omega \in A_{jk}$, és legyen t az ω-hoz tartozó egyik időpont. A definíció alapján, ha $0 < h \leq 1/k$, akkor

$$\frac{\left|w\left(t+h,\omega\right) - w\left(t,\omega\right)\right|}{h} \leq j,$$

vagy ami ugyanaz

$$\left|w\left(t+h,\omega\right) - w\left(t,\omega\right)\right| \leq hj.$$

Paley–Wiener–Zygmund tétele Bizonyítás III

Legyen $n \geq 4k$, és osszuk fel a $[0,1]$ intervallumot n egyenlő részre. Legyen $1 \leq i \leq n$ olyan, hogy $t \in [(i-1)/n, i/n]$. Tekintsük a következő három becslés:

Először

$$\begin{aligned}
\left| w\left(\frac{i+1}{n}\right) - w\left(\frac{i}{n}\right) \right| &\leq \left| w\left(\frac{i+1}{n}\right) - w(t) \right| + \left| w\left(\frac{i}{n}\right) - w(t) \right| \leq \\
&\leq \frac{2j}{n} + \frac{j}{n}
\end{aligned}$$

hiszen mivel

$$t \in \left[\frac{i-1}{n}, \frac{i}{n}\right] \quad \text{és} \quad \frac{4}{n} \leq \frac{1}{k}$$

ezért

$$\begin{aligned}
0 &< \frac{i+1}{n} - t = \left(\frac{i}{n} - t\right) + \frac{1}{n} \leq \frac{2}{n} = h \leq \frac{1}{k}, \\
0 &< \frac{i}{n} - t \leq \frac{1}{n} = h \leq \frac{1}{k}.
\end{aligned}$$

Paley–Wiener–Zygmund tétele Bizonyítás IV

Másodszor

$$\left|w\left(\frac{i+2}{n}\right)-w\left(\frac{i+1}{n}\right)\right| \leq \left|w\left(\frac{i+2}{n}\right)-w\left(t\right)\right|+$$
$$+\left|w\left(\frac{i+1}{n}\right)-w\left(t\right)\right| \leq \frac{3j}{n}+\frac{2j}{n}$$

hiszen ismételten miként fent

$$\begin{aligned} 0 &< \frac{i+2}{n}-t=\left(\frac{i}{n}-t\right)+\frac{2}{n} \leq \frac{3}{n}=h \leq \frac{1}{k}, \\ 0 &< \frac{i+1}{n}-t \leq \frac{2}{n}=h \leq \frac{1}{k} \end{aligned}$$

Paley–Wiener–Zygmund tétele Bizonyítás V

Harmadszor

$$\left|w\left(\frac{i+3}{n}\right)-w\left(\frac{i+2}{n}\right)\right| \leq \left|w\left(\frac{i+3}{n}\right)-w\left(t\right)\right| + \\ + \left|w\left(\frac{i+2}{n}\right)-w\left(t\right)\right| \leq \frac{4j}{n}+\frac{3j}{n}$$

hiszen továbbra

$$\begin{aligned} 0 &< \frac{i+3}{n}-t=\frac{i}{n}-t+\frac{3}{n}\leq\frac{4}{n}=h\leq\frac{1}{k}, \\ 0 &< \frac{i+2}{n}-t\leq\frac{3}{n}=h\leq\frac{1}{k}. \end{aligned}$$

Paley–Wiener–Zygmund tétele Bizonyítás VI

Jelölje C_{in} a

$$\cap_{m=1}^{3}\left\{\omega:\left|w\left(\frac{i+m}{n},\omega\right)-w\left(\frac{i+m-1}{n},\omega\right)\right|\leq\frac{2m+1}{n}j\right\}$$

halmazt. Ha $\omega\in A_{jk}$ akkor az ω-hoz tartozó valamelyik t időpontra alkalmas i indexre $t\in\left[\left(i-1\right)/n,i/n\right]$ ezért, ha $n\geq 4k$ akkor az imént belátott három egyenlőtlenségből

$$A_{jk}\subseteq\cup_{i=1}^{n}C_{in}.$$

Elegendő tehát megmutatni, hogy

$$\lim_{n\to\infty}\mathbf{P}\left(\cup_{i=1}^{n}C_{in}\right)=0.$$

Paley–Wiener–Zygmund tétele Bizonyítás VII

Becsüljük meg a C_{in} esemény valószínűségét. A Wiener–folyamat definíciója alapján a

$$\xi_m \mathrel{\mathring{=}} \sqrt{n}\left(w\left(\frac{i+m}{n}\right)-w\left(\frac{i+m-1}{n}\right)\right)$$

változó normális eloszlású nulla várható értékkel és 1 szórással. Az $\exp\left(-x^2/2\right)$ függvény a maximumát a 0 pontban veszi fel, és $\exp(0)=1$, ezért

$$\mathbf{P}\left(|\xi_m| \leq \alpha\right) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\alpha}^{\alpha} \exp\left(-\frac{1}{2}x^2\right) dx \leq \frac{1}{\sqrt{2\pi}}2\alpha \leq \alpha.$$

Paley–Wiener–Zygmund tétele Bizonyítás VIII

Felhasználva, hogy a Wiener–folyamat független növekményű, minden i indexre

$$\mathbf{P}\left(C_{in}\right) =$$

$$= \mathbf{P}\left(\cap_{m=1}^{3}\left\{\sqrt{n}\left|w\left(\frac{i+m}{n}\right) - w\left(\frac{i+m-1}{n}\right)\right| \leq \frac{2m+1}{\sqrt{n}} j\right\}\right) =$$

$$= \prod_{m=1}^{3} \mathbf{P}\left(\left\{\sqrt{n}\left|w\left(\frac{i+m}{n}\right) - w\left(\frac{i+m-1}{n}\right)\right| \leq \frac{2m+1}{\sqrt{n}} j\right\}\right) \leq$$

$$\leq \frac{3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot j^{3}}{n^{3/2}}.$$

Ez alapján

$$\limsup_{n\to\infty} \mathbf{P}\left(\cup_{i=1}^{n} C_{in}\right) \leq \limsup_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} \mathbf{P}\left(C_{in}\right) \leq \lim_{n\to\infty} n \frac{105 j^{3}}{n^{3/2}} = 0.$$

Wiener-folyamat a végtelenben

Theorem

Ha w Wiener-folyamat, akkor majdnem minden kimenetelre

$$\limsup_{t\to\infty} w(t) = \infty, \quad \liminf_{t\to\infty} w(t) = -\infty.$$

Mivel a $t \mapsto w(t+s) - w(s)$ Wiener-folyamat minden s-re elegendő belátni, hogy

$$\eta \circeq \sup_{t\geq 0} w(t) \stackrel{a.s.}{=} \infty. \tag{1}$$

Ha $c \neq 0$ akkor a $w_c \circeq cw\left(t/c^2\right)$ szintén Wiener-folyamat. Elegendő a szuprémumot a racionális időpontokban venni, így az η mérhető. Nyilván

$$\sup_t w_c(t) \circeq \sup_t c \cdot w\left(\frac{t}{c^2}\right) = c \cdot \eta.$$

Így az η majdnem mindenhol vagy 0 vagy ∞. A $w(t+1) - w(1)$ szintén Wiener-folyamat, így $\sup_{t\geq 1}(w(t) - w(1))$ szintén 0 vagy $+\infty$.

$$
\begin{aligned}
\mathbf{P}(\eta = 0) &\doteq \mathbf{P}\left(\sup_{t\geq 0} w(t) = 0\right) \leq \mathbf{P}\left(\sup_{t\geq 1} w(t) \leq 0\right) = \\
&= \mathbf{P}\left(w(1) + \sup_{t\geq 0}\left(w(t+1) - w(1)\right) \leq 0\right) = \\
&= \mathbf{P}\left(w(1) \leq 0, \sup_{t\geq 0}\left(w(t+1) - w(1)\right) = 0\right)
\end{aligned}
$$

ugyanis a végtelen nem fordulhat elő, hiszen akkor az előző szuprémum is végtelen. A két esemény független, így

$$
p \doteq \mathbf{P}(\eta = 0) \leq \mathbf{P}(w(1) \leq 0) \cdot \mathbf{P}\left(\sup_{t\geq 0}\left\{w(t+1) - w(1)\right\} = 0\right) = \frac{1}{2}p
$$

Így $p = 0$.

A Wiener-folyamatok konstrukciója

A Wiener–folyamatot először a $[0,1]$ intervallumon állítjuk elő, később a független és stacionárius növekmény feltételével a konstrukciót kiterjesztjük az $\mathbb{R}_+$ félegyenesre. Legyen $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$ olyan mező, amelyen létezik megszámlálható sok (ξ_n) független, normális eloszlású valószínűségi változó. Jelölje $H \subseteq L^2(\Omega)$ a változók által kifeszített zárt L^2 alteret. Mivel független normális eloszlású változók lineáris kombinációja újra normális eloszlású, valamint mivel az L^2-konvergenciából következik a gyenge konvergencia, ezért normális eloszlású változók sorozatának L^2-határértéke normális, így a H elemeinek tetszőleges véges részhalmazának együttes eloszlása normális.

Tekintsük az $L^2[0,1]$ Hilbert-teret. Legyen (e_n) az $L^2[0,1]$ tetszőleges ortonormált bázisa. Tekintsük az $e_n \longleftrightarrow \xi_n$ megfeleltetés által meghatározott

$$T : \sum_k a_n e_n \longmapsto \sum_k a_n \xi_n$$

izomorfiát. Tetszőleges t-re $\chi[0,t] \in L^2[0,1]$, ezért értelmes a

$$\begin{aligned} w(t) &\stackrel{\circ}{=} T(\chi[0,t]) = T\left(\sum_k a_k(t)\, e_k\right) = \sum_k a_k(t)\, T(e_k) = \\ &= \sum_k a_k(t)\, \xi_k = \sum_k (\chi[0,t], e_k) \cdot \xi_k = \sum_k \left(\int_0^t e_k \, d\lambda\right) \cdot \xi_k \end{aligned}$$

változó.

A kovariencia kiszámolása

Evidens módon a Parseval-formula alapján

$$
\begin{aligned}
\mathbf{E}\left(w\left(t\right)w\left(s\right)\right) &= \left(T\left(\chi\left[0,t\right]\right), T\left(\chi\left[0,s\right]\right)\right) = \sum_l \sum_k a_k\left(t\right) a_l\left(s\right)\left(\xi_k, \xi_l\right) = \\
&= \sum_k a_k\left(t\right) a_k\left(s\right) = \left(\chi\left[0,t\right], \chi\left[0,s\right]\right) = \\
&= \int_0^1 \chi\left[0,t\right]\chi\left[0,s\right] d\lambda = \min\left(t,s\right),
\end{aligned}
$$

amiből könnyen látható, hogy a folytonosságtól eltekintve a w Wiener-folyamat. Például

$$\mathbf{D}^2\left(w\left(t\right)\right) = \mathbf{E}\left(w^2\left(t\right)\right) = t,$$

$$\mathbf{E}\left(\left[w\left(t+h\right) - w\left(t\right)\right] w\left(t\right)\right) = t - t = 0,$$

vagyis a folyamat független növekményű, ugyanis normális eloszlású változók esetén a korrelálatlanságból következik a függetlenség.

Haar-függvények

A kérdés csak az, hogy alkalmasan megválasztott ortonormált bázis esetén vajon a $w(\omega)$ majdnem minden ω kimenetelre folytonos-e? Az alkalmas ortonormált bázist a Haar-függvények szolgáltatják. Jelölje $I(n)$ a 0 és 2^n közötti páratlan számokat, vagyis legyen $I(0) = \{1\}$, $I(1) = \{1\}$, $I(2) = \{1, 3\}$, stb. Vagyis a $[0, 1]$ szakaszt osszuk fel 2^n részre és vegyük a részszakaszokat párossával. A $[0, 1]$ intervallumon tekintsük a[1]

$$H_k^{(n)}(t) \circeq \begin{cases} +2^{(n-1)/2} & \text{ha} \quad t \in \left[(k-1)/2^n, k/2^n\right) \\ -2^{(n-1)/2} & \text{ha} \quad t \in \left[k/2^n, (k+1)/2^n\right) \\ 0 & \text{ha} \quad t \notin \left[(k-1)/2^n, (k+1)/2^n\right) \end{cases}$$

Haar-féle függvényrendszert.

[1] $H_1^{(0)}(t) \circeq 1.$

A Haar-függvények teljes ortonormált rendszer

A Haar-függvények igen fontos tulajdonsága, hogy az $L^2[0,1]$ teljes, ortonormált rendszerét alkotják. Az ortonormáltság közvetlen számolással egyszerűen ellenőrizhető. A teljességet a következő módon igazolhatjuk: Ha f merőleges az összes $H_k^{(n)}$ függvényre, akkor az f $F(x) \circeq \int_0^x f(t)\,dt$ integrálfüggvényére $F(1) - F(0) = \left(f, H_1^{(0)}\right) = 0$, amiből $F(1) = F(0) = 0$. Hasonlóan $0 = \left(f, H_1^{(1)}\right) = 2F(1/2) = 0$ stb., amiből $F(k/2^n) = 0$, vagyis $F \equiv 0$.

A sátorfüggvények definiálása

Minden $k \in I(n)$ (n, k) párhoz tekintsük az

$$S_k^{(n)}(t) \overset{\circ}{=} \int_0^t H_k^{(n)} d\lambda$$

sátorfüggvényt, amely a $\left[0, (k-1)/2^n\right]$, illetve a $\left[(k+1)/2^n, 1\right]$ halmazokon nulla, és a $\left[(k-1)/2^n, (k+1)/2^n\right]$ intervallumon pedig a gráfja a $k/2^n$ pont mint középpont fölé emelt, és a két szomszédos páros számlálóval rendelkező n-ed rendű diadikus törtekre mint csúcspontokra támaszkodó $2^{-(n+1)/2}$ magasságú, egyenlő szárú háromszög. Az imént vázolt konstrukciónak megfelelően legyen

$$w_n(t) \overset{\circ}{=} \sum_{m=0}^{n} \sum_{k \in I(m)} S_k^{(m)}(t)\, \xi_k^{(m)}.$$

Mivel az $S_k^{(n)}(t)$ függvények folytonosak, a $w_n(\omega)$ trajektória minden ω kimenetelre folytonos.

Megmutatjuk, hogy majdnem minden ω-ra a $\left(w_n\left(t,\omega\right)\right)$ sorozat t-ben egyenletesen konvergens. Tekintsük a

$$b_n \circeq \max_{k\in I(n)} \left|\xi_k^{(n)}\right|$$

változót. $\xi_k^{(n)} \cong N\left(0,1\right)$, ezért ha $x>0$, akkor

$$\begin{aligned}\mathbf{P}\left(\left|\xi_k^{(n)}\right|>x\right) &= 2\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_x^\infty \exp\left(-\frac{u^2}{2}\right)du \leq \\ &\leq \sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_x^\infty \frac{u}{x}\exp\left(-\frac{u^2}{2}\right)du = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{\exp\left(-x^2/2\right)}{x},\end{aligned}$$

amiből

$$\mathbf{P}\left(b_n>n\right) = \mathbf{P}\left(\bigcup_{k\in I(n)}\left\{\left|\xi_k^{(n)}\right|>n\right\}\right) \leq 2^n\sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{\exp\left(-n^2/2\right)}{n}.$$

Borel–Cantelli lemma

$\sum_{n=1}^{\infty} 2^n \exp\left(-n^2/2\right)/n < \infty$, ezért a Borel–Cantelli-lemma alapján $\mathbf{P}\left(\limsup_{n\to\infty}\{b_n > n\}\right) = 0$, vagyis majdnem minden ω-ra, ha $n \geq n_0(\omega)$, akkor $b_n(\omega) \leq n$, amiből majdnem minden ω-ra elég nagy n indextől, felhasználva, hogy az $S_k^{(n)}$ függvények tartója diszkrét

$$\begin{aligned} \left|w_n(t,\omega) - w_{n-1}(t,\omega)\right| &= \left|\sum_{k\in I(n)} \xi_k^{(n)}(\omega) S_k^{(n)}(t)\right| \leq \\ &\leq n \sum_{k\in I(n)} S_k^{(n)}(t) \leq n2^{-(n+1)/2}. \end{aligned}$$

$\sum_{n=1}^{\infty} n2^{-(n+1)/2} < \infty$, ezért a $(w_n(t,\omega))$ sorozat majdnem minden ω-ra egyenletesen konvergens, és ezért a $w(t,\omega)$ határérték a t időparaméter szerint folytonos.

Kiterjesztés a számegyenesre

Hátra van a w kiterjesztése a $[0,1]$-ről a $[0,\infty)$-re. Legyen $w^{(n)}$ $(n=1,2,\ldots)$ megszámlálható $[0,1]$-en definiált olyan Wiener–folyamat, amelyekre minden $t,s\in[0,1]$ esetén ha $m\neq k$ akkor $w^{(m)}(t)$ és a $w^{(k)}(s)$ változók függetlenek. Ilyen folyamatok léteznek, hiszen a kiindulási feltétel alapján az alapul vett Ω valószínűségi mezőn létezik megszámlálható sok független normális eloszlású valószínűségi változó, amelyeket két dimenziós végtelen mátrixba rendezve megszámlálható sok Wiener–folyamatot kapunk. Mivel az egyes sorokban levő változók függetlenek, ezért mind a lineáris kombinációik mind a lineáris kombinációk határértékei függetlenek. Legyen $w(t)\overset{\circ}{=}w^{(1)}(t)$, ha $t\in[0,1]$, és legyen

$$w(t)\overset{\circ}{=}w(n)+w^{(n+1)}(t-n), \quad \text{ha} \quad t\in[n,n+1].$$

Minden n-re $w^{(n)}(0)=0$, ezért a w folytonos a $[0,\infty)$ halmazon. Közvetlen ellenőrzéssel könnyen belátható, hogy a w-re teljesülnek a Wiener–folyamat tulajdonságai

Véletlen időpontok, amelyek nem megállási idők

Example

A nullába való utolsó visszatérés nem megállási idő.

Legyen $a > 0$ és legyen w egy Wiener-folyamat. Legyen

$$\gamma_a \overset{\circ}{=} \sup\{0 \leq s \leq a : w(s) = 0\} = \inf\{s \geq 0 : w(a - s) = 0\}.$$

A γ_a nyilván $\mathcal{F}_a$-mérhető, így véletlen időpont. Mivel $\mathbf{P}(w(a) = 0) = 0$ majdnem minden kimenetelre $\gamma_a < a$. Ha γ_a megállási idő lenne, akkor az erős Markov-tulajdonság miatt a

$$w^*(t) \overset{\circ}{=} w(t + \gamma_a) - w(\gamma_a)$$

szintén Wiener-folyamat lenne.

A nullába való utolsó visszatérés

Ha w^* Wiener-folyamat, akkor a $\widetilde{w}(t) \circeq tw^*(1/t)$ megfordított folyamat szintén Wiener-folyamat. Mivel az egy-dimenziós Wiener-folyamatok egy valószínűséggel visszatérnek az origóba az erős Markov-tulajdonsággal könnyű belátni, hogy majdnem minden trajektóriára a $\widetilde{w}$ tetszőleges t után is visszatér az origóba. Így majdnem minden trajektóriára létezik olyan $t_n \searrow 0$, természetesen ω-tól függő, sorozat, hogy $t_n > 0$ és $w^*(t_n) = 0$. De ez lehetetlen, ugyanis a w^* nem nulla a $(0, a - \gamma_a]$ szakaszon.

Véletlen időpontok, amelyek nem megállási idők

Example

A maximum időpontja nem megállási idő.

Legyen

$$\begin{aligned}\beta_a &\circeq \max\{w(s) : 0 \le s \le a\},\\ \rho_a &\circeq \inf\{0 \le s \le a : w(s) = \beta_a\}.\end{aligned}$$

Mivel $\mathbf{P}(w(a) - w(a/2) < 0) = 1/2$, ezért $\mathbf{P}(\rho_a < a) > 0$.

Véletlen időpontok, amelyek nem megállási idők

Ha ρ_a megállási idő lenne, akkor az erős Markov-tulajdonság miatt a

$$w^*(t) \overset{\circ}{=} w(t+\rho_a) - w(\rho_a)$$

szintén Wiener-folyamat lenne. Minden Wiener-folyamatra majdnem minden kimenetelre $\limsup_{t\to\infty} w(t) = \infty$. Ha ezt a $\widetilde{w}(t) \overset{\circ}{=} tw(1/t)$ megfordított folyamatra alkalmazzuk, akkor azt kapjuk, hogy minden Wiener-folyamat az origó közelében majdnem minden kimenetelre tetszőleges rövid időszakaszon felvesz pozitív értéket. Ez azonban a w^* esetén nem teljesül, ugyanis pozitív valószínűséggel a $(0, a-\rho_a]$ szakasz nem üres és a w^* nem rendelkezik rajta pozitív értékkel.

Négyzetesen integrálható martingálok

Definition

Legyen $p > 1$ és jelölje $\mathcal{H}^p$ az olyan M martingálok osztályát, amelyekre

$$\sup_t \|M(t)\|_p < \infty.$$

A $\mathcal{H}^2$ tér elemeit négyzetesen integrálható vagy L^2-martingáloknak szokás mondani.

Energia-azonosság

Theorem

Ha az M martingálra minden t időpontban az $M(t)$ négyzetesen integrálható és $s < t$, akkor

$$\mathbf{E}\left((M(t) - M(s))^2\right) = \mathbf{E}\left(M^2(t)\right) - \mathbf{E}\left(M^2(s)\right).$$

A két oldal különbsége

$$\Delta \overset{\circ}{=} 2 \cdot \mathbf{E}\left(M(s)\left(M(s) - M(t)\right)\right).$$

A teljes várható érték tétel, a kiemelési szabály és a martingáltulajdonság miatt

$$\begin{aligned}
\Delta &\overset{\circ}{=} 2 \cdot \mathbf{E}\left(M(s) \cdot (M(s) - M(t))\right) = \\
&= 2 \cdot \mathbf{E}\left(M(s) \cdot \mathbf{E}\left(M(s) - M(t) \mid \mathcal{F}_s\right)\right) = \\
&= 2 \cdot \mathbf{E}\left(M(s) \cdot 0\right) = 0.
\end{aligned}$$

Négyzetesen integrálható martingálok struktúrája

Theorem

Ha $M \in \mathcal{H}^2$, *akkor létezik olyan* $M(\infty) \in L^2(\Omega, \mathcal{F}_\infty, \mathbf{P})$, *hogy*

$$M(t) = \mathbf{E}(M(\infty) \mid \mathcal{F}_t),$$

és L^2*-konvergenciában*

$$M(t) \to M(\infty).$$

Másképpen fogalmazva a $\mathcal{H}^2$ *martingálok lezárhatóak.*

Bizonyítás

Legyen $t_n \nearrow \infty$ tetszőleges. Az energiaazonosság miatt az $\left(\|M(t_n)\|_2^2\right) \circeq \left(\mathbf{E}\left(M^2(t_n)\right)\right)$ monoton nő, a $\mathcal{H}^2$ definíciója miatt korlátos, tehát van határértéke. Ugyancsak az energiaazonosság miatt, ha $n > m$, akkor

$$\|M(t_n) - M(t_m)\|_2^2 = \|M(t_n)\|_2^2 - \|M(t_m)\|_2^2 ,$$

így az $(M(t_n))$ Cauchy–sorozat. Az $L^2(\Omega)$ teljessége miatt az $(M(t_n))$ sorozat L^2-konvergens. Különböző sorozatok összefésüléséből kapott sorozatok konvergensek, így az $M(\infty)$ határérték, mint az $L^2(\Omega)$-tér eleme, egyértelmű. A martingáltulajdonság miatt, ha $s \geq 0$, akkor

$$M(t) = \mathbf{E}(M(t+s) \mid \mathcal{F}_t) .$$

Ha az alaptér mértéke véges, akkor az L^2-konvergenciából következik az L^1-konvergencia, tehát ha $s \to \infty$, akkor

$$M(t) = \mathbf{E}\left(\lim_{s\to\infty} M(t+s) \mid \mathcal{F}_t\right) = \mathbf{E}(M(\infty) \mid \mathcal{F}_t) .$$

Első Doob-egyenlőtlenség (Kolmogorov-egyenlőtlenség)

Theorem

Ha $\lambda \geq 0$ *és* $X = (X_k, \mathcal{F}_k)_{k=1}^n$ *szubmartingál, akkor*

$$\lambda \mathbf{P}\left(\max_{1 \leq k \leq n} X_k \geq \lambda\right) \leq \mathbf{E}\left(|X_n|\right).$$

Bizonyítás I

Legyen X szubmartingál és $\lambda > 0$.

$$A_1 \circeq \{X_1 \geq \lambda\}, \quad A_k \circeq \left\{\max_{1\leq i<k} X_i < \lambda \leq X_k\right\}, \quad A \circeq \left\{\max_{1\leq k\leq n} X_k \geq \lambda\right\}.$$

Megmutatjuk. hogy

$$\lambda \mathbf{P}(A) \circeq \lambda \mathbf{P}\left(\max_{1\leq k\leq n} X_k \geq \lambda\right) \leq \int_A X_n d\mathbf{P},$$

amiből az egyenlőtlenség következik, ugyanis

$$\int_A X_n d\mathbf{P} \leq \mathbf{E}\left(X_n^+\right) \leq \mathbf{E}\left(|X_n|\right).$$

Bizonyítás II

Evidens módon az A_k halmazok diszjunktak és $A = \cup_k A_k$. Vegyük észre, hogy $A_k \in \mathcal{F}_k$, következésképpen a szubmartingál tulajdonság felhasználásával

$$
\begin{aligned}
\lambda \mathbf{P}(A) &= \lambda \sum_{k=1}^{n} \mathbf{P}(A_k) \leq \sum_{k=1}^{n} \int_{A_k} X_k d\mathbf{P} \leq \sum_{k=1}^{n} \int_{A_k} \mathbf{E}(X_n \mid \mathcal{F}_k) d\mathbf{P} = \\
&= \sum_{k=1}^{n} \int_{A_k} X_n d\mathbf{P} = \int_A X_n d\mathbf{P}.
\end{aligned}
$$

Második Doob-egyenlőtlenség

Theorem

Ha $X = (X_k, \mathcal{F}_k)_{k=1}^{n}$ *nem negatív szubmartingál, és* $p > 1$, *akkor*

$$\left\| \max_{1 \leq k \leq n} X_k \right\|_p \leq \frac{p}{p-1} \left\| X_n \right\|_p \circeq q \left\| X_n \right\|_p .$$

Bizonyítás I

Vezessük be az $X_n^* \stackrel{\circ}{=} \max_{1 \leq k \leq n} X_k$ jelölést. Ha $\|X_n\|_p = \infty$, akkor az állítás evidens. Tegyük fel, hogy $\|X_n\|_p < \infty$. Elvileg előfordulhat, hogy $\|X_n^*\|_p = \infty$, ezért az X_n^* változót le kell vágni. Rögzítsük az N számot, és legyen $\eta \stackrel{\circ}{=} \min(N, X_n^*) \geq 0$. Vezessük be az $A(x) \stackrel{\circ}{=} \{X_n^* \geq x\}$ jelölést. Az első Doob-egyenlőtlenség egyenlőtlenség alapján

$$x\mathbf{P}(A(x)) \leq \int_{A(x)} X_n d\mathbf{P}.$$

A Newton–Leibniz-formula, a Fubini–tétel és a fenti becslés szerint

$$
\begin{aligned}
\mathbf{E}\left(\eta^{p}\right) &= \mathbf{E}\left(\int_0^{\eta} px^{p-1}dx\right) = \mathbf{E}\left(\int_0^{N} px^{p-1}\chi_{A(x)}dx\right) = \\
&= p\int_0^N x^{p-1}\int_\Omega \chi_{A(x)}d\mathbf{P}dx = p\int_0^N x^{p-1}\mathbf{P}\left(A\left(x\right)\right)dx \leq \\
&\leq p\int_0^N x^{p-2}\int_{A(x)} X_n d\mathbf{P}dx = p\int_0^N\int_\Omega X_n x^{p-2}\chi_{A(x)}d\mathbf{P}dx = \\
&= p\int_\Omega X_n\int_0^{\eta} x^{p-2}dxd\mathbf{P} = \frac{p}{p-1}\int_\Omega X_n\eta^{p-1}d\mathbf{P}.
\end{aligned}
$$

Bizonyítás III

A Hölder-egyenlőtlenség alapján

$$\mathbf{E}\left(\eta^{p}\right) \leq q \left\|X_n\right\|_p \left\|\eta^{p-1}\right\|_q = q \left\|X_n\right\|_p \mathbf{E}\left(\eta^{p}\right)^{1/q}.$$

Az $\mathbf{E}\left(\eta^{p}\right)^{1/q}$ kifejezéssel átosztva (Ha a kifejezés nulla, akkor az egyenlőtlenség triviális.) $\left\|\eta\right\|_p \leq q \left\|X_n\right\|_p$. A monoton konvergencia tétel miatt

$$\lim_{N\to\infty} \left\|\min\left(N, X_n^*\right)\right\|_p = \left\|X_n^*\right\|_p,$$

amiből az egyenlőtlenség már következik.

Theorem

Legyen X nem negatív szubmartingál és $T \leq \infty$ az X értelmezési tartományának egy időpontja. Ha $\lambda \geq 0$, akkor

$$\lambda \mathbf{P}\left(\sup_{0 \leq t \leq T} X(t) \geq \lambda\right) \leq \mathbf{E}\left(\left|X(T)\right|\right).$$

Ha $p > 1$, akkor

$$\left\|\sup_{0 \leq t \leq T} X(t)\right\|_p \leq \frac{p}{p-1}\left\|X(T)\right\|_p \stackrel{\circ}{=} q\left\|X(T)\right\|_p .$$

Legyen $\left(t_k^{(n)}\right)$ a $[0, T]$ szakasz egy egyre finomodó infinitezimális partíciója. Mivel minden partíció a korábbi finomítása a szuprémumok nőnek és mivel a szubmartingál nem negatív, így a bal oldalon használható a monoton konvergencia tétele. A jobb oldal pedig konstans módon azonos.

Martingálok szuprémumának integrálhatósága

Theorem

Ha X martingál és $p > 1$, akkor

$$X^* \triangleq \sup_t |X(t)| \in L^p(\Omega)$$

pontosan akkor, ha az X korlátos az L^p térben.

Ha X martingál, akkor $|X|^p$ nem negatív szubmartingál, ugyanis martingál konvex függvénye szubmartingál. Ebből, ha $|X|^p$ integrálja korlátos akkor az X^* integrálja is korlátos. A fordított irány az $|X(t)| \leq X^*$ miatt triviális.

Az integrálható martingálok terei

Definition

Valamely M martingálra definíció szerint $M \in \mathcal{H}^p$, $p \geq 1$, ha $X^* \circeq \sup_t |X(t)| \in L^p(\Omega)$. A térben a normát a

$$\|X\|_p \circeq \left\| \sup_t |X(t)| \right\|_p$$

kifejezés definiálja.

Ha $p > 1$, akkor az $M \in \mathcal{H}^p$ ekvivalens avval, hogy az M martingál korlátos az $L^p(\Omega)$ térben. Ha $p = 1$, akkor ez nem igaz.

Az integrálható martingálok terei

Theorem

A $\mathcal{H}^p$ terek Banach-terek.

Mivel egy adott filtráció felett értelmezett martingálok lineáris teret alkotnak a $\mathcal{H}^p$ terek triviálisan normált terek. Ha (M_n) egy Cauchy-sorozat, és $\delta_k \searrow 0$, akkor egy alkalmas részsorozatra $\left\| M_{n_k} - M_{n_{k+1}} \right\|_p < \delta_k$. Az integrál definíciója miatt

$$\left(2^{-k}\right)^p \mathbf{P}\left(\sup_t \left| M_{n_{k+1}}(t) - M_{n_k}(t) \right| > 2^{-k}\right) \leq \delta_k^p,$$

így esetleg újabb részsorozatra áttérve feltehető. hogy

$$\mathbf{P}\left(\sup_t \left| M_{n_{k+1}}(t) - M_{n_k}(t) \right| > 2^{-k}\right) < 2^{-k}.$$

Az integrálható martingálok terei

A Borel-Cantelli lemma miatt az egyenlőtlenség majdnem minden kimenetelre csak véges sok esetben teljesülhet, így az (M_{n_k}) részsorozat trajektóriái az egyenletes konvergencia topológiában Cauchy-sorozatot alkotnak. Mivel a reguláris függvények az egyenletes konvergenciára nézve Banach-teret alkotnak létezik M reguláris folyamat, amelyre $\sup_t \left|M_{n_k}(t) - M(t)\right| \xrightarrow{m.m.} 0$. A Fatou-lemma miatt ha n és k elég nagy

$$\left\|M_n - M\right\|_p = \left\|\lim_{k\to\infty} \sup_t \left|M_n(t) - M_{n_k}(t)\right|\right\|_p \leq$$

$$\leq \liminf_{k\to\infty} \left\|\sup_t \left|M_n(t) - M_{n_k}(t)\right|\right\|_p = \liminf_{k\to\infty} \left\|M_n - M_{n_k}\right\|_p < \varepsilon.$$

Az integrálható martingálok terei

Így $M_n \to M$ a $\mathcal{H}^p$ térben, feltéve, hogy ha az M is martingál.

$$\begin{aligned}\left\|M_n(t) - M(t)\right\|_p &\leq \left\|\sup_t \left|M_n(t) - M(t)\right|\right\|_p \doteq \\ &\doteq \left\|M_n - M\right\|_p \to 0,\end{aligned}$$

így az $M_n(t)$ tart az $M(t)$-hez az $L^p(\Omega)$ térben. Mivel $p \geq 1$ a konvergencia az $L^1(\Omega)$ térben is érvényes és mivel a feltételes várható érték folytonos az $L^1(\Omega)$ térben, ezért ha $t > s$, akkor az

$$\mathbf{E}\left(M_n(t) \mid \mathcal{F}_s\right) = M_n(s)$$

egyenlőségben határértéket véve

$$\mathbf{E}\left(M(t) \mid \mathcal{F}_s\right) = M(s).$$

Theorem

A $\mathcal{H}^2$ martingálok esetén a norma ekvivalens a $(M, N) \circeq (M(\infty), N(\infty))$ skaláris szorzat által generált Hilbert-tér struktúrával.

A Doob-egyenlőtlenség miatt

$$\|M\|_2 \circeq \|M^*(\infty)\|_2 \leq \frac{2}{2-1}\|M(\infty)\|_2 = (M(\infty), M(\infty)) \circeq (M, M).$$

Másrészt az energiaazonosság miatt az $(M(n), M(n))$ sorozat monoton nő és $L^2(\Omega)$-ban $M(n) \to M(\infty)$, így

$$\begin{aligned} (M, M) &\circeq (M(\infty), M(\infty)) = \lim_{n\to\infty}(M(n), M(n)) \leq \\ &\leq \limsup_{n\to\infty}\left\|\sup_{t\leq n}|M(t)|\right\|_2^2 = \left\|\sup_t |M(t)|\right\|_2^2 = \|M\|_2^2. \end{aligned}$$

A folytonos integrálható martingálok terei

Theorem

A folytonos $\mathcal{H}^p$ martingálok a $\mathcal{H}^p$-martingálok zárt alterét alkotják.

Legyen $M_n \to M$ és legyen az (M_n) folytonos. A norma definíciója miatt $\sup_t |M_n(t) - M(t)|$ $L^p(\Omega)$-ben nullához tart. De akkor egy alkalmas részsorozatra

$$\sup_t |M_{n_k}(t) - M(t)| \stackrel{m.m.}{\to} 0.$$

Az egyenletes konvergencia megőrzi a folytonosságot, így az M trajektóriái majdnem minden kimenetelre folytonosak, így az M definíció szerint folytonos martingál.

A folytonos négyzetesen integrálható martingálok tere

Theorem

A folytonos $\mathcal{H}^2$ martingálok Hilber-teret alkotnak az $(M,N) = (M(\infty), N(\infty))$ skaláris szorzattal.