Emlékeztetünk a feltételes várható értékből való kiemelési szabályra:

1. Állítás. *Ha ξ és η nem negatív valószínűségi változók és η $\mathcal{F}$-mérhető, akkor*

$$\mathbf{E}\left(\xi\eta \mid \mathcal{F}\right) = \eta\mathbf{E}\left(\xi \mid \mathcal{F}\right).$$

A kiemelési szabály alkalmazásához általában az szükséges, hogy azt követően, hogy a szabályt a ξ és az η változók pozitív, illetve negatív részére külön-külön alkalmaztuk ne kapjunk értelmetlen kifejezéseket. Ez speciálisan teljesül akkor, ha a ξ integrálható és az η korlátos. De ugyancsak használható a szabály akkor is, ha a ξ és az η négyzetesen integrálható. Vegyük észre, hogy mind a két esetben az összes $\xi^{\pm}\eta^{\pm}$ alakú kifejezés feltételes várható értéke véges.

2. Lemma. *Legyen M valamely $\mathcal{F}$ filtrációra nézve diszkrét idejű martingál és legyen X az $\mathcal{F}$-re nézve adaptált folyamat. Ha az (X_k) korlátos, vagy az (M_k) és az (X_k) négyzetesen integrálható, akkor a*

$$Z_0 \circeq 0, \quad Z_n \circeq \sum_{k=1}^{n} X_{k-1} \cdot (M_k - M_{k-1})$$

sorozat nulla várható értékkel rendelkező martingál.

Bizonyítás: Emlékeztetünk, hogy minden martingál definíció szerint rendelkezik véges várható értékkel. Kihasználva, hogy a feltétel szerint használható alább a kiemelési szabály a teljes várható érték tétele szerint, ha $k-1 \geq m$

$$\begin{aligned}
\mathbf{E}\left(X_{k-1}\left[M_k - M_{k-1}\right] \mid \mathcal{F}_m\right) &= \mathbf{E}\left(\mathbf{E}\left(X_{k-1}\left[M_k - M_{k-1}\right] \mid \mathcal{F}_{k-1}\right) \mid \mathcal{F}_m\right) = \\
&= \mathbf{E}\left(X_{k-1}\mathbf{E}\left(\left[M_k - M_{k-1}\right] \mid \mathcal{F}_{k-1}\right) \mid \mathcal{F}_m\right) = \\
&= \mathbf{E}\left(X_{k-1} \cdot 0 \mid \mathcal{F}_m\right) = 0,
\end{aligned}$$

amiből a lemma igazolása már evidens.

□

3. Definíció (Itô–Stieltjes-integrál). *Legyenek X és M sztochasztikus folyamatok és minden*

$$a = t_0^{(n)} < t_1^{(n)} < \ldots < t_m^{(n)} = b$$

felosztáshoz rendeljük hozzá az

$$I_n \circeq \sum_k X\left(t_{k-1}^{(n)}\right)\left(M\left(t_k^{(n)}\right) - M\left(t_{k-1}^{(n)}\right)\right)$$

Itô-féle közelítő összegeket. Ha létezik olyan ζ valószínűségi változó, hogy minden olyan felosztásra, amelyre

$$\lim_{n\to\infty} \max_k \left(t_k^{(n)} - t_{k-1}^{(n)}\right) = 0$$

a közelítő összegek sorozatára sztochasztikus konvergenciában

$$\lim_{n\to\infty} I_n = \zeta,$$

akkor ezt a közös ζ határértéket az X M szerinti Itô–Stieltjes-integráljának mondjuk, és $\int_a^b XdM$ módon jelöljük.

4. Állítás. *Ha az X adaptált sztochasztikus folyamat az $[a,b]$ véges szakaszon majdnem minden ω-ra folytonos és $M \in \mathcal{H}^2$, akkor az X az $[a,b]$-én M szerint Itô–Stieltjes-integrálható.*

Bizonyítás: Emlékeztetünk, hogy az $M \in \mathcal{H}^2$ azt jelenti, hogy az M olyan martingál, amelyre az $\|M(t)\|_2$ $L^2(\Omega)$-norma a t időparaméter szerint korlátos. Az egyszerűség kedvéért tegyük fel, hogy az X minden kimenetelre folytonos. A bizonyítást több lépésre bontjuk:

1. Tegyük fel, hogy $|X| \leq k$ és legyen $\left(t_k^{(n)}\right)_k$ az $[a,b]$ szakasz felbontása. Az előző lemma alapján az integrálközelítő összegek

$$I_n \doteq \sum_k X\left(t_{k-1}^{(n)}\right)\left(M\left(t_k^{(n)}\right) - M\left(t_{k-1}^{(n)}\right)\right)$$

sorozata martingál, így a sorozat tagjainak várható értéke nulla. A bizonyítás kulcsa, hogy

$$\|I_n\|_2^2 = \mathbf{D}^2(I_n) \leq k^2 l, \tag{1}$$

ahol az l rögzített, X-től nem függő determinisztikus konstans. Az energiaazonosság alapján

$$\|I_n\|_2^2 = \sum_k \left\|X\left(t_{k-1}^{(n)}\right)\left(M\left(t_k^{(n)}\right) - M\left(t_{k-1}^{(n)}\right)\right)\right\|_2^2.$$

Az energiaazonosság újabb alkalmazásával

$$\begin{aligned}
\|I_n\|_2^2 &= \sum_k \left\|X\left(t_{k-1}^{(n)}\right)\left(M\left(t_k^{(n)}\right) - M\left(t_{k-1}^{(n)}\right)\right)\right\|_2^2 \leq \\
&\leq k^2 \sum_k \left\|M\left(t_k^{(n)}\right) - M\left(t_{k-1}^{(n)}\right)\right\|_2^2 = \\
&= k^2 \sum_k \left(\left\|M\left(t_k^{(n)}\right)\right\|_2^2 - \left\|M\left(t_{k-1}^{(n)}\right)\right\|_2^2\right) = \\
&= k^2 \left(\|M(b)\|_2^2 - \|M(a)\|_2^2\right),
\end{aligned}$$

tehát az $M \in \mathcal{H}^2$ feltételezés miatt az

$$l \doteq \|M(b)\|_2^2 - \|M(a)\|_2^2 < \infty$$

definícióval érvényes az (1).

2. A sztochasztikus konvergenciában minden Cauchy–sorozat konvergens, ezért az integrál konvergenciájának belátásához elegendő megmutatni, hogy az integrálközelítő összegek (I_n) sorozata sztochasztikusan Cauchy–sorozat. Az X trajektóriái folytonosak, vagyis az $[a,b]$ véges szakaszon egyenletesen is folytonosak, ezért ha $\delta \to 0$, akkor tetszőleges ω kimenetelre az

$$U(\omega,\delta) \doteq \sup_{|t-s|\leq\delta} |X(t,\omega) - X(s,\omega)|$$

folytonossági modulus nullához tart. Könnyen látható, hogy az U kiszámolásakor elegendő a racionális időpontokat venni, így az U mérhető. A pontonkénti konvergenciából következik a sztochasztikus konvergencia, ezért tetszőleges $\tau, \varepsilon > 0$ számokhoz található olyan A halmaz és $\delta > 0$ szám, hogy $\mathbf{P}(A^c) < \tau$, és ha $\omega \in A$, akkor $U(\omega, \delta) < \varepsilon$. Mivel az $[a, b]$ intervallum felosztása végtelenül finomodik, ezért tetszőleges $\alpha > 0$ számra, elegendően nagy n, m indexekre a Csebisev–egyenlőtlenség miatt

$$\mathbf{P}(|I_n - I_m| > \alpha) \leq \mathbf{P}(A^c) + \mathbf{P}(A \cap \{|I_n - I_m| > \alpha\}) \leq \tau + \frac{\varepsilon^2 l}{\alpha^2}.$$

A jobb oldali kifejezés az ε és a τ megválasztásával tetszőlegesen kicsivé tehető, így az (I_n) sztochasztikusan Cauchy–sorozat.

3. Megjegyezzük azonban, hogy a bizonyítás pontatlan, ugyanis az $X\chi_A$ függvényhez rendelt lépcsős folyamatra nem alkalmazható a (1) becslés, ugyanis az így „csonkolt" folyamat nem feltétlenül adaptált! A gondolatmenet azonban könnyen pontosítható. Ha $U(u, \omega, \delta)$ jelöli az $[a, u]$ szakaszon vett folytonossági modulust, akkor evidens módon az $(u, \omega) \mapsto U(u, \omega, \delta)$ folytonos trajektóriájú adaptált folyamat[1]. Ha

$$\tau(\omega) \mathrel{\mathring{=}} \inf\{u : U(u, \omega, \delta) \geq \varepsilon\} \wedge b,$$

akkor a τ megállási idő, és elegendő az A halmazon való „csonkolás" helyett az X^τ megállított folyamatra[2] alkalmazni az (1) becslést és a

$$\mathbf{P}(|I_n - I_m| > \alpha) \leq \mathbf{P}(A^c) + \mathbf{P}(|I_n^\tau - I_m^\tau| > \alpha)$$

egyenlőtlenséget.

□

5. Definíció. *Valamely L folyamatot lokális martingálnak mondunk, ha megadható ölyan megállási időkből álló (τ_n) úgynevezett lokalizációs sorozat, amelyre $\tau_n \nearrow \infty$ és az L^{τ_n} megállított folyamatok mindegyike martingál. Hasonlóan egy L folyamat lokálisan négyzetesen integrálható martingál, ha megadható olyan $\tau_n \nearrow \infty$ lokalizációs sorozat, amelyre az L^{τ_n} négyzetesen integrálható, vagyis amelyre $L^{\tau_n} \in \mathcal{H}^2$ minden n-re.*

6. Állítás. *Ha az X adaptált sztochasztikus folyamat az $[a, b]$ véges szakaszon majdnem minden ω-ra folytonos és az M lokálisan négyzetesen integrálható martingál, akkor az X az $[a, b]$-én M szerint Itô–Stieltjes-integrálható.*

Bizonyítás: Elegendő az előző állítás bizonyítását úgy módosítani, hogy az M helyett az M^{τ_n}-et írunk és felhasználjuk, hogy a lokalizáció definíciója alapján tetszőleges $\varepsilon > 0$ számhoz ha n elég nagy akkor $\tau_n \geq b$ egy ε valószínűségű halmaztól eltekintve. Másképpen ha n elég nagy akkor egy tetszőlegesen kicsi valószínűségű halmaztól eltekintve az $[a, b]$ szakaszon az M és az M^{τ_n} egybeesik.
□

[1] Mindig elég a racionális időpontokat venni.
[2] A megállított folyamat adaptált lesz.

7. Állítás. *Ha M folytonos lokális martingál, X folytonos adaptált folyamat, akkor az*

$$\int_a^b XdM$$

sztochasztikus integrál létezik.

Bizonyítás: Legyen

$$\tau_n \overset{\circ}{=} \inf\{t : |M| \geq n\}.$$

Az M folytonossága miatt $|M^{\tau_n}| \leq n$, vagyis az M lokálisan korlátos, így nyilván lokálisan négyzetesen integrálható, következésképpen alkalmazható az előző állítás.

□

Érdemes hangsúlyozni, hogy mivel az Itô–Stieltjes sztochasztikus integrál csak mint valószínűségi változó értelmes, ezért az értéke csak majdnem mindenhol definiálható. Éppen ezért az $\int_a^b XdM$ valószínűségi változó $\mathcal{F}_b$-mérhetősége csak akkor garantálható, ha az $\mathcal{F}_b$ tartalmazza a nullmértékű halmazokat.

8. Állítás. *Tegyük fel, hogy teljesülnek a szokásos feltételek. Ha az X folytonos valamint adaptált folyamat és az M lokálisan négyzetesen integrálható martingál, akkor létezik olyan folytonos lokális martingál, amelyet $X \bullet M$-mel fogunk jelölni, amelyre tetszőleges t esetén*

$$(X \bullet M)(t) \overset{m.m}{=} \int_0^t XdM.$$

Ha az X egyenletesen korlátos és M négyzetesen integrálható, akkor az $X \bullet M$ nem csak lokális martingál lesz, hanem martingál is.