FFT használata sűrűségfüggvények kiszámolására

Medvegyev Péter

2012

Fast Fourier és sűrűségfüggvény

Ki kell számolni az

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\varphi(t)\exp(-itx)\,dt = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty}\varphi(2\pi u)\exp(-i2\pi ux)\,du \end{aligned}$$

integrált. A formula működik, hacsak a φ integrálható.
Az f a karakterisztikus függvény Fourier-transzformáltja.

Fast Fourier és sűrűségfüggvény

Válasszunk egy elég nagy

$$\left[-\frac{N}{2}\cdot dx, \frac{N}{2}\cdot dx\right]$$

szakaszt és az $f(x)$-et ezen szakasz

$$x_k \mathrel{\hat{=}} \left(-\frac{N}{2}+k\right)\cdot dx, \quad k=0,2,\ldots,N-1$$

pontjaiban számoljuk ki. Vagyis az

$$\begin{aligned} f(x_k) &= \int_{-\infty}^{\infty}\varphi(2\pi u)\exp(-i2\pi u x_k)\,du \mathrel{\hat{=}} \\ &\mathrel{\hat{=}} \int_{-\infty}^{\infty}\varphi(2\pi u)\exp\left(-i2\pi u\left(k-\frac{N}{2}\right)dx\right)du \end{aligned}$$

sorozatot akarjuk kiszámolni.

Az integrált diszkretizáljuk

$$
\begin{aligned}
f(x_k) \quad &\approx \quad du \sum_{n=0}^{N-1} \varphi\left(2\pi\left(n-\frac{N}{2}\right)du\right) \times \\
&\times \exp\left(-i2\pi\left(n-\frac{N}{2}\right)du\left(k-\frac{N}{2}\right)dx\right).
\end{aligned}
$$

Ha $du \overset{\circ}{=} 1/\left(N \cdot dx\right)$, akkor

$$
\begin{aligned}
f(x_k) \quad &\approx \quad du \sum_{n=0}^{N-1} \varphi\left(2\pi\left(n-\frac{N}{2}\right)du\right) \times \\
&\times \exp\left(-i2\pi\left(n-\frac{N}{2}\right)\frac{1}{N}\left(k-\frac{N}{2}\right)\right).
\end{aligned}
$$

Az exponenciális tag kitevőjében

$$\left(n-\frac{N}{2}\right)\frac{1}{N}\left(k-\frac{N}{2}\right) = $$
$$= \frac{nk}{N}-\frac{1}{2}\left(k-\frac{N}{2}\right)-\frac{1}{2}n.$$

Amiből

$$f\left(x_k\right) \approx du\cdot(-1)^{k-N/2}\sum_{n=0}^{N-1}\varphi\left(2\pi\left(n-\frac{N}{2}\right)du\right)(-1)^n\times$$
$$\times\exp\left(-i2\pi k\frac{n}{N}\right).$$

Fast Fourier és sűrűségfüggvény

Ha $(x_n)_{n=0}^{N-1}$ egy sorozat, akkor a DFT, diszkrét Fourier-transzformált

$$X_k \circeq \sum_{n=0}^{N-1} x_n \exp\left(-i2\pi k \frac{n}{N}\right), \quad k = 0, 1, \ldots, N-1.$$

Ebből következően

$$\begin{aligned} f(x_k) &\approx du \cdot (-1)^{k-N/2} \cdot \mathrm{DFT}\left((-1)^n \cdot \varphi\left(2\pi \cdot \left(n - \frac{N}{2}\right) \cdot du\right)\right), \\ du &\circeq 1/(N \cdot dx). \\ x_k &\circeq -\left(\frac{N}{2}+0\right)dx, \left(-\frac{N}{2}+1\right)dx, \ldots, \left(\frac{N}{2}-1\right)dx, \end{aligned}$$