Theorem

Ha egy K monoton növekedő súlyfüggvény komplex Laplace-transzformálja (komplex) deriválható módon kiterjeszthető egy $\mathrm{Re}\, z > b$ félsíkra, akkor ott

$$L(z) = \int_0^{\infty} \exp(-zx)\, dK(x),$$

következésképpen $b \geq s_0$, ahol s_0 a konvegenciasugár.

Laplace-transzformált kiterjesztése

Indirekt tegyük fel, hogy van egy olyan $g(z)$ deriválható függvény amely $\operatorname{Re} z > b$ félsíkra való kiterjesztése a transzformáltnak és $b < s_0$. Mivel a komplex deriválhatóságból következik a hatványsorba fejthetőség, ezért a g egy alkalmas $s_0 < a$ pontban sorba fejthető úgy, hogy a konvergenciasugár nagyobb lesz, mint $a - s_0$. Ez azt jelenti, hogy a

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{g^{(k)}(a)}{k!} (s-a)^k = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{L^{(k)}(a)}{k!} (s-a)^k$$

Taylor-sor egy $s < s_0 < a$ pontban konvergens. Meg fogjuk mutatni, hogy az s pontban a Laplace-transzformált konvergens.

Az $L^{(k)}(a)$ derivált képletét beírva, kihasználva, hogy az $a > s_0$ miatt a derivált alábbi integrálelőállítása érvényes, a Fubini-tétellel az összegzést és az integrálást a nem negativitás felhasználásával felcserélve

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k \int_0^\infty x^k \exp(-ax)\, dK(x)}{k!} (-1)^k (a-s)^k =$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\int_0^\infty x^k \exp(-ax)\, dK(x)}{k!} (a-s)^k =$$

$$= \int_0^\infty \exp(-ax) \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k (a-s)^k}{k!} dK(x) =$$

$$= \int_0^\infty \exp(-ax) \exp(x(a-s))\, dK(x) =$$

$$= \int_0^\infty \exp(-sx)\, dK(x) < \infty.$$

Theorem

Ha az f hiperbolikusan teljesen monoton függvény (komplex) deriválható módon kiterjeszthető a $\operatorname{Re} z > 0$ komplex félsíkra, akkor minden $u > 0$ esetén a $g(w) \stackrel{\circ}{=} f(uv) f(u/v)$ függvény is (komplex) deriválhatóan kiterjeszthető a $\operatorname{Re} w > 0$ félsíkra, és ott alkalmas K növekedő súlyfüggvénnyel

$$g(w) = \int_0^\infty \exp(-\beta w) \, dK(\beta), \quad \operatorname{Re} w > 0.$$

A hiperbolikus teljes monotonitás definíciója miatt az

$$f(uv)\, f\left(\frac{u}{v}\right) \circeq g(w)$$

függvény minden $u > 0$ esetén teljesen monoton, ha $w \geq 2$. Bernstein tétele alapján $z \circeq w - 2$ helyettesítéssel

$$\begin{aligned} g(w) &= g(z+2) \circeq u(z) = \int_0^\infty \exp(-\beta z)\, dF(\beta) = \\ &= \int_0^\infty \exp(-\beta(w-2))\, dF(\beta) = \\ &= \int_0^\infty \exp(-\beta w) \exp(2\beta)\, dF(\beta) \circeq \\ &\circeq \int_0^\infty \exp(-\beta w)\, dK(\beta) . \end{aligned}$$

alakba írható, hacsak $w \geq 2$.

Tegyük fel, hogy az f függvény a $\operatorname{Re} z > 0$ félsíkban deriválható. Az $f(uv) f(u/v)$ kifejezés minden u pozitív valós szám esetén a $\operatorname{Re} v > 0$ halmazon szintén deriválható. Tekintsük a

$$v \mapsto \frac{v-1}{v+1} \stackrel{\circ}{=} z$$

leképezést, amely a $\operatorname{Re} v > 0$ nyílt félsíkot a $|z| < 1$ komplex nyílt egységkörre képezi. Valóban

$$\left|\frac{v-1}{v+1}\right|^2 = \frac{v-1}{v+1}\overline{\left(\frac{v-1}{v+1}\right)} =$$
$$= \frac{|v-1|^2}{|v+1|^2} =$$
$$= \frac{(\operatorname{Re}(v)-1)^2 + (\operatorname{Im}(v))^2}{(\operatorname{Re}(v)+1)^2 + (\operatorname{Im}(v))^2} < 1.$$

A leképezés ráképezés, ugyanis ha $|z| < 1$, akkor az inverz leképezés

$$
\begin{aligned}
v & \overset{\circ}{=} \frac{1+z}{1-z} = \frac{(1+z)\,\overline{(1-z)}}{|1-z|^2} = \\
& = \frac{(1+z)\,(1-\overline{z})}{|1-z|^2} = \frac{1-\overline{z}+z-|z|^2}{|1-z|^2} = \\
& = \frac{1-|z|^2+2i\,\mathrm{Im}\,z}{|1-z|^2},
\end{aligned}
$$

amely valós része mindig pozitív.

Tekintsük a $f(uv)\,f(u/v)$ függvényt a z függvényeként, vagyis végezzünk

$$v = \frac{1+z}{1-z}, \quad |z| < 1$$

helyettesítést. Jelölje a $|z| < 1$ halmazon értelmezett így kapott függvényt $h(z)$. Ha a z helyébe a $-z$ értéket tesszük, akkor a v helyébe éppen az

$$\frac{1-z}{1+z} = \frac{1}{v}$$

érték kerül, következésképpen $h(z) = h(-z)$. A h függvény (komplex) deriválható, így az egységkörön belül hatványsorba fejthető. A $h(z) = h(-z)$ reláció miatt a h sorfejtésében csak páros kitevők szerepelnek.

Vagyis $h(z) = \Sigma_k a_{2k} z^{2k}$. Ennek következtében

$$f(uv) f\left(\frac{u}{v}\right) = h\left(\frac{v-1}{v+1}\right) = \sum_k a_{2k} \left(\frac{v-1}{v+1}\right)^{2k}.$$

Viszont

$$\left(\frac{v-1}{v+1}\right)^2 = \frac{1+v^2-2v}{1+v^2+2v} = \frac{1/v+v-2}{1/v+v+2} = \frac{w-2}{w+2}.$$

Ez utóbbi kifejezés deriválható a $\mathrm{Re}\, w > -2$ félsíkon. Ha $\mathrm{Re}\, w > 0$, akkor

$$\left|\frac{w-2}{w+2}\right| < 1,$$

így az

$$f(uv) f\left(\frac{u}{v}\right) = h\left(\frac{w-2}{w+2}\right) = g(w)$$

függvény kiterjeszthető a $\mathrm{Re}\, w > 0$ félsíkra.

A $g(w)$ a fenti K súlyfüggvény Laplace-transzformáltja a $\operatorname{Re} w > 2$ félsíkban. Miként láttuk, egy növekedő súlyfüggvény Laplace-transzformáltjának értelmezési tartománya határán szükségszerűen szingularitás van, vagyis azon túl a függvény nem terjeszthető ki (komplex) deriválható módon, miközben a $g(w)$ minden $\operatorname{Re} w > 0$ esetén ilyen, ezért a

$$g(w) = \int_0^\infty \exp(-\beta w) \, dK(\beta)$$

előállítás minden $\operatorname{Re} w > 0$ esetén is érvényes.

Legyen f egy sűrűségfüggvény. Jelölje továbbá L a transzformációt. Ekkor az

$$L(s) \overset{\circ}{=} \int_0^\infty \exp(-sx) f(x)\, dx$$

deriválható módon kiterjeszthető a $\operatorname{Re} z > 0$ félsíkra. Ez azonban nem jelenti azt, hogy nincs egy nagyobb, nem feltétlenül félsík, halmaz, amire az L esetleg kiterjeszthető deriválható módon.

A további kiterjeszthetőséghez szükségünk lesz a következő feltételekre:
Az f sűrűségfüggvényre a következő megkötéseket tesszük:

1. Az f sűrűségfüggvény (komplex) deriválható módon kiterjeszthető a $\operatorname{Re} z > 0$ félsíkra.
2. Jelölje $\arg z$ a z komplex szám polárfelbontásához tartozó $(-\pi, \pi)$-beli szöget, és legyen

$$S(\varepsilon) \overset{\circ}{=} \{z \mid |\arg z| \leq \pi/2 - \varepsilon\}.$$

Tetszőleges $\varepsilon > 0$ esetén az $S(\varepsilon)$ halmazon van olyan $\alpha > 0$, hogy

$$f(z) = z^{\alpha-1} h(z)$$

ahol a $h(z)$ korlátos.

Theorem

A megadott feltételek teljesülése esetén az $L(z)$ *deriválható módon kiterjeszthető a negatív valós számok mentén felvágott komplex síkra, vagyis a* $\mathbb{C}\setminus(-\infty, 0]$ *halmazra.*

Legyen

$$L(z) \triangleq \int_0^\infty \exp(-z \cdot x) f(x)\, dx, \quad \operatorname{Re} z > 0$$

a komplex transzformált. Az L értelmezve van és deriválható a $\operatorname{Re} z > 0$ félsíkban. Megmutatjuk, hogy az L deriválható módon kiterjeszthető az $\operatorname{Im} z > 0$ felső félsíkra. Az $\operatorname{Im} z < 0$ eset indoklása analóg módon végezhető el. Érdemes megjegyezni, hogy mivel egy valós függvény kiterjesztéséről van szó a kiterjesztett függvényre érvényes lesz az $L(\overline{z}) = \overline{L(z)}$ szabály.

A bizonyítás alapgondolata viszonylag szemléletes. Az f komplex, így definiálható a némiképpen homályosan és félrevezető módon jelölt

$$L(s) \overset{\circ}{=} \int_0^\infty \exp(-s \cdot z) f(z)\, dz$$

komplex integrál. A lényeges gondolat, hogy a z integrációs változó komplex. A jelölés homályossága abból ered, hogy az $\int_a^b g(z)\, dz$ jelölés csak akkor értelmes, ha az a és a b pontokat összekötő minden görbén az integrál értéke azonos. Ennek megfelelően valamely $\int_0^\infty g(z)\, dz$ komplex integrál csak akkor értelmes, ha minden a nulla pontból a végtelenben tartó görbe mentén az integrál értéke azonos. A bizonyítás lényege, hogy az $S(\varepsilon)$-ban haladó görbék esetén ez teljesül.

Tekintsünk két a 0 és a ∞ között az $S(\varepsilon)$-ban haladó görbét. A deriválható függvények zárt görbéken vett vonalintegrálja nulla. Legyen $r < R$ és tekintsük az r és a R sugarú körökön, illetve a görbéken vett integrálokat. Elég megmutatni, hogy ha $r \searrow 0$, illetve, ha $R \nearrow \infty$, akkor a köríveken vett integrálok nullához tartanak.

A belső köríven vett integrál, ha $-\pi/2+\varepsilon \leq \alpha < \beta \leq \pi/2-\varepsilon$ a két görbe metszéspontjához tartozó szög, akkor

$$i\int_{\alpha}^{\beta} \exp\left(-sr\exp\left(it\right)\right) f\left(r\exp\left(it\right)\right) r\exp\left(it\right) dt.$$

A második feltétel miatt

$$zf\left(z\right) = zz^{\alpha-1}h\left(z\right) = z^{\alpha}h\left(z\right).$$

A $h\left(z\right)$ egyenletesen korlátos, és ha $r \searrow 0$, akkor

$$z^{\alpha} = r^{\alpha}\left(\cos\alpha\varphi + i\sin\alpha\varphi\right)$$

egyenletesen nullához tart, így a belső körön az integrál nullához tart.

A külső köríven vett integrálra ha $R \nearrow \infty$, akkor

$$\left|\int_{\alpha}^{\beta} \exp\left(-sR\exp\left(it\right)\right) f\left(R\exp\left(it\right)\right) iR\exp\left(it\right) dt\right| \leq$$

$$\leq \int_{-\pi/2+\varepsilon}^{\pi/2-\varepsilon} R\cdot\left|\exp\left(-sR\exp\left(it\right)\right)\right|\left|f\left(R\exp\left(it\right)\right)\right| dt =$$

$$= R\int_{-\pi/2+\varepsilon}^{\pi/2-\varepsilon} \exp\left(-R\left(s\cos t\right)\right) R^{\alpha-1}\left|h\left(R\exp\left(it\right)\right)\right| dt \leq$$

$$\leq KR^{\alpha}\int_{-\pi/2+\varepsilon}^{\pi/2-\varepsilon} \exp\left(-R\left(s\cos\left(\frac{\pi}{2}-\varepsilon\right)\right)\right) dt \circeq$$

$$\circeq C\cdot R^{\alpha}\exp\left(-c\cdot R\right) \to 0.$$

Ebből következően az integrált bármely görbén vehetjük, vagyis a fenti kifejezés értelmes.

Ha most valós transzformált komplex kiterjesztéshez tartozó korábbi trükköt egy φ szöghöz tartozó egyenes mentén akarjuk alkalmazni, akkor az

$$L(s) = \exp(i\varphi) \int_0^\infty \exp(-s \exp(i\varphi) \cdot t) f(\exp(i\varphi) \cdot t)\, dt$$

integrált kell vizsgálni. Érdemes hangsúlyozni, hogy a vonalmenti integrál egyik „lába" a valós félegyenes, amely mentén az integrál véges. Ugyanakkor a valós tengely mentén vett integrál abszolút konvergens, de az általános egyenes mentén vett integrál minden további feltétel nélkül csak improprius értelemben létezik. Az integrál nyilvánvalóan kétszeresen improprius. A feltételek miatt a végtelen oldalon az exponenciális függvény biztosítja az abszolút érték integráljának konvergenciáját, a nulla oldalon pedig az $O\left(|z|^{\alpha-1}\right)$ feltétel garantálja az abszolút konvergenciát.

Az integrál (komplex) deriválható kiterjesztését olyan $z = x + iy$ komplex számokra tudjuk elvégezni, amelyekre a $z = x + iy$-hoz tartó exponenciális kifejezés abszolút értéke azonos a fenti integrálban szereplő exponenciális függvény abszolút értékével, vagyis

$$s \cos \varphi = \mathrm{Re}\left(z \exp\left(i\varphi\right)\right) = x \cos \varphi - y \sin \varphi.$$

Vagyis a z akkor szerepel a kiterjesztett transzformáció értelmezési tartományában, ha a $z - s = x - s + iy$ merőleges az $\exp\left(-i\varphi\right) = \cos \varphi - i \sin \varphi$ egységvektorra.

Legyen $0 < \varphi < \pi/2$ és tekintsük a $\operatorname{Re} z > 0$ félsíkban haladó

$$t \mapsto \exp\left(-i\varphi\right) t \circeq \vartheta t$$

sugarat. Az $u \mapsto \exp\left(-z \cdot u\right) f\left(u\right)$ deriválható komplex függvény ezen sugáron vett vonalintegrálja legyen

$$\widehat{L}\left(z\right) \circeq \vartheta \int_0^\infty \exp\left(-z\vartheta \cdot t\right) f\left(\vartheta \cdot t\right) dt.$$

Ez az integrál minden olyan z esetén értelmes, amely az $\exp\left(i\varphi\right)$ vektorra merőleges egyenes felett van. Ezek éppen azok a vektorok, amelyeket a $\operatorname{Re} z > 0$ félsík φ szöggel való elforgatásával kapunk. Az elmondottak miatt az $\widehat{L}$ deriválható és a kifejezésben szereplő integrál abszolút konvergens. Ha most $z = s$, ahol az s valós, vagyis az $\widehat{L}$ értékét a valós tengelyen vesszük, amely része az elforgatott síknak, akkor éppen a fenti integrált kapjuk csak a φ helyébe a $-\varphi$ szöget kell írni. Mivel az integrál értéke $L\left(s\right)$, ezért az $\widehat{L}$ az L kiterjesztése.

Az exponenciális eloszlás transzformáltja $L(s) = \lambda / (\lambda + s)$. A konvergencia sugara $-\lambda$. Ettől jobbra, vagyis ha $\lambda + s > 0$

$$L(s) = \lambda \int_0^\infty \exp(-(\lambda + s)t)\, dt,$$

amely integrál az elmondottak miatt kiterjeszthető a $\mathrm{Re}\, z > -\lambda$ félsíkra.

Ugyanakkor

$$\widehat{L}(z) =$$

$$= \exp(-i\varphi)\,\lambda \int_0^\infty \exp(-z\exp(-i\varphi)\,t)\exp(-\lambda\exp(-i\varphi)\,t)\,dt =$$

$$= \exp(-i\varphi)\,\lambda \int_0^\infty \exp(-(z+\lambda)\exp(-i\varphi)\,t)\,dt.$$

Az exponenciális kifejezés u kitevője éppen a $z+\lambda$ φ szöggel való óramutató irányú elforgatása. Ha a szög elég nagy akkor $\mathrm{Re}\left((z+\lambda)\exp(-i\varphi t)\right) > 0$, Így

$$\begin{aligned}
\widehat{L}(z) &= \exp(-i\varphi)\lambda \int_0^\infty \exp\left(-(z+\lambda)\exp(-i\varphi)\,t\right)dt \mathrel{\mathring{=}} \\
&\mathrel{\mathring{=}} \exp(-i\varphi)\lambda \int_0^\infty \exp(-ut)\,dt = \exp(-i\varphi)\lambda\frac{1}{u} = \\
&= \frac{\exp(-i\varphi)\lambda}{(z+\lambda)\exp(-i\varphi t)} = \frac{\lambda}{\lambda+z}.
\end{aligned}$$

Hasonlóan a gamma eloszlásra

$$\widehat{L}(z) =$$

$$= \exp(-i\varphi) \frac{\lambda^a}{\Gamma(a)} \int_0^\infty (t \exp(i\varphi))^{a-1} \exp(-(z+\lambda)\exp(-i\varphi) t)\, dt \stackrel{\circ}{=}$$

$$\stackrel{\circ}{=} \frac{(\exp(-i\varphi)\lambda)^a}{\Gamma(a)} \int_0^\infty t^{a-1} \exp(-ut)\, dt,$$

ahol az $u = (z+\lambda)\exp(-i\varphi)$ érték természetesen komplex.

Ha azonban az elforgatás φ szöge elég nagy, akkor $\operatorname{Re} u > 0$ és a gamma függvényt megadó integrál komplex félsíkra való kiterjesztése miatt

$$\int_0^\infty t^{a-1} \exp(-ut)\, dt = \frac{\Gamma(a)}{u^\alpha},$$

ugyanis mind a két oldalon egy deriválható komplex kifejezés van, amelyek a pozitív valós számokra megegyeznek. Ezek szerint

$$\widehat{L}(z) = \frac{(\exp(-i\varphi)\lambda)^a}{\Gamma(a)} \frac{\Gamma(a)}{u^\alpha} = \frac{(\exp(-i\varphi)\lambda)^a}{((z+\lambda)\exp(-i\varphi))^a} = \left(\frac{\lambda}{\lambda+z}\right)^a.$$

Az egyszerűbb jelöléshez tegyük fel, hogy $\mu = 0$ és $\sigma = 1$. A

$$g(t) \overset{\circ}{=} \frac{1}{t} \exp\left(-\frac{\ln^2 t}{2}\right) (\cos(\varphi \ln t) + i \sin(\varphi \ln t))$$

„sűrűségfüggvény" korlátos, így ha $s > 0$, akkor az $\int_0^\infty \exp(-st)\, g(t)\, dt$ transzformáltban az integráljel alatt lehet deriválni, így a transzformált deriválható módon kiterjeszthető a $\mathrm{Re}\, z > 0$ félsíkra.

Ha $u \overset{\circ}{=} z \exp(-i\varphi)$, akkor

$$\widehat{L}(z) =$$

$$= \frac{\exp(-i\varphi)}{\sqrt{2\pi}} \int_0^\infty \exp(-ut) \frac{1}{\exp(-i\varphi)\, t} \exp\left(-\frac{\ln^2(\exp(-i\varphi)\, t)}{2}\right) dt =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^\infty \exp(-u \cdot t) \frac{1}{t} \exp\left(-\frac{(\ln t - i\varphi)^2}{2}\right) dt =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^\infty \exp(-u \cdot t) \frac{1}{t} \exp\left(-\frac{\ln^2 t + \varphi^2 - 2i\varphi \ln t}{2}\right) dt =$$

$$= \frac{\exp(-\varphi^2/2)}{\sqrt{2\pi}} \int_0^\infty \exp(-u \cdot t) \frac{1}{t} \exp\left(-\frac{\ln^2 t}{2} + i\varphi \ln t\right) dt =$$

$$= \frac{\exp(-\varphi^2/2)}{\sqrt{2\pi}} \times$$

$$\times \int_0^\infty \exp(-u \cdot t) \frac{1}{t} \exp\left(-\frac{\ln^2 t}{2}\right) (\cos(\varphi \ln t) + i \sin(\ln t))\, dt =$$

$$= \frac{\exp(-\varphi^2/2)}{\sqrt{2\pi}} \int_0^\infty \exp(-u \cdot t)\, g(t)\, dt.$$

Ha most $\operatorname{Re} u > 0$, akkor az $\widehat{L}$ deriválható. Ugyanakkor most nem ismerjük az integrál zárt alakját, így nem tudjuk, hogy valóban a lognormális eloszlás Laplace-transzformáltjának kiterjesztéséről van-e szó. Ha most $z = s + i0$, akkor mivel a $\varphi < \pi/2$, a formula alkalmazható. De $\widehat{L}(s) = L(s)$ a bizonyításban szereplő egyenlőség miatt, vagyis valóban kiterjesztésről van szó.

Theorem

Ha egy $\xi \geq 0$ *valószínűségi változó* L *Laplace-transzformáltja deriválható módon kiterjeszthető a* $\mathbb{C} \setminus (-\infty, 0]$ *halmazra, és*

$$\operatorname{Im}\left(L'(z)\,\overline{L(z)}\right) \geq 0, \quad ha \quad \operatorname{Im} z > 0,$$

akkor ξ *egy általánosított gamma-konvolúció.*

Első lépésként megmutatjuk, hogy a feltétel teljesülése esetén $L(z) \neq 0$ az $\operatorname{Im} z > 0$ halmazon. Ha mégis $L(z_0) = 0$ lenne, akkor mivel az L analitikus, ezért a z_0 pont körül sorba fejthető. Ezért alkalmas $k \geq 1$ és $a_k \neq 0$ számokkal, ahol a_k az első nem nulla együttható

$$\begin{aligned} L(z) &= a_k (z - z_0)^k + (z - z_0)^{k+1} (a_{k+1} + a_{k+2} (z - z_0) + \ldots) = \\ &= a_k (z - z_0)^k + O\left(|z - z_0|^{k+1}\right). \\ L'(z) &= k a_k (z - z_0)^{k-1} + O\left(|z - z_0|^k\right). \end{aligned}$$

Ekkor

$$\operatorname{Im}\left(L'(z)\,\overline{L(z)}\right) =$$

$$\operatorname{Im}\left(\left(ka_k(z-z_0)^{k-1}+O\left(|z-z_0|^k\right)\right)\left(\overline{a_k(z-z_0)^k}+\overline{O\left(|z-z_0|^{k+1}\right)}\right)\right)$$

$$= k|a_k|^2|z-z_0|^{2k-2}\operatorname{Im}\overline{z-z_0}+O\left(|z-z_0|^{2k}\right).$$

Ha most $z-z_0=iy$, akkor

$$\begin{aligned}\operatorname{Im}\left(L'(z)\,\overline{L(z)}\right) &= k|a_k|^2y^{2k-2}(-y)+O\left(y^{2k}\right)= \\ &= y^{2k}\left(-\frac{k}{y}|a_k|^2+\frac{O\left(y^{2k}\right)}{y^{2k}}\right).\end{aligned}$$

Ha $y>0$ és y elég kicsi, akkor a most kapott kifejezés negatív, ami ellentmondás.

Legyen

$$\rho(z) \circeq \frac{L'(z)}{L(z)}, \quad \operatorname{Im} z > 0,$$

amely így értelmes. A feltétel szerint

$$\operatorname{Im} \rho(z) \circeq \operatorname{Im} \frac{L'(z)}{L(z)} = \operatorname{Im} \frac{L'(z)\,\overline{L(z)}}{|L(z)|^2} \geq 0.$$

Ugyanakkor a pozitív valós számokon $\rho(s) \leq 0$ ugyanis a valós számokon

$$L(s) = \exp\left(\int_0^s \rho(u)\,du\right)$$

és az L monoton csökken. Pick-tétel miatt

$$\rho(s) = a - \int_0^\infty \frac{1}{u+s} dA(u), \quad s > 0.$$

Ebből az állítás már evidens ugyanis

$$\begin{aligned}
L(s) &= \exp\left(\int_0^s \rho(u)\,du\right) = \\
&= \exp\left(sa - \int_0^s \int_0^\infty \frac{1}{\lambda + u} dA(\lambda)\,du\right) = \\
&= \exp\left(sa - \int_0^s \int_0^\infty \frac{1}{\lambda + u} dA(\lambda)\,du\right) = \\
&= \exp\left(sa - \int_0^s \int_0^\infty \frac{1}{u + \lambda} dA(\lambda)\,du\right) = \\
&= \exp\left(sa - \int_0^\infty \int_0^s \frac{1}{u + \lambda} du dA(\lambda)\right) = \\
&= \exp\left(sa + \int_0^\infty \ln \frac{\lambda}{\lambda + s} dA(\lambda)\right).
\end{aligned}$$

Első lépésként biztosítani kell, hogy az L kiterjeszthető legyen a $\mathbb{C}\setminus(-\infty,0]$ halmazra. Ehhez természetesen szükségünk van a már bemutatott komplex deriválhatósági feltevésekre. Miként láttuk, a megadott feltételek teljesülése esetén az $L(z)$ kiterjeszthető a negatív valós tengely mentén felvágott komplex síkra, és ott

$$L(z) = \exp(-i\varphi)\int_0^\infty \exp(-z\exp(-i\varphi)\,t)\,f(\exp(-i\varphi)\,t)\,dt,$$

valamint az integrálok abszolút konvergensek és $0<\varphi<\pi/2$.

Tekintsük a $L'(z)\overline{L(z)}$ kifejezést, ahol $\operatorname{Im} z > 0$, rögzített komplex szám. A jobb olvashatóság kedvéért legyen $\vartheta \stackrel{\circ}{=} \exp(-i\varphi)$, illetve

$$h(x) \stackrel{\circ}{=} \exp(-z\vartheta x) f(\vartheta x).$$

Ekkor

$$\begin{aligned} \overline{L(z)} &= \overline{\vartheta} \int_0^\infty \overline{h(t)} dt = \frac{1}{\vartheta} \int_0^\infty \overline{h(t)} dt, \\ \frac{d}{dz} L(z) &= -\vartheta^2 \int_0^\infty sh(s)\, ds. \end{aligned}$$

Ebből

$$-L'(z)\overline{L(z)} = \vartheta \int_0^\infty \overline{h(t)} dt \int_0^\infty sh(s)\, ds =$$
$$= \vartheta \int_0^\infty \int_0^\infty sh(s)\, \overline{h(t)} dtds.$$

Az $L(z)$ függvényt megadó integrál abszolút konvergens, ezért az $L'(z)$ és az $\overline{L(z)}$ értékeket megadó integrálok is abszolút konvergensek, így a kettős integrál is abszolút konvergens, következésképpen használható az integráltranszformációs tétel. Végezzünk $s = uv$, $t = u/v$ transzformációt:

$$-L'(z) \cdot \overline{L(z)} = \vartheta \int_0^\infty \int_0^\infty uvh(uv)\,\overline{h\left(\frac{u}{v}\right)}\frac{2u}{v}dtds =$$
$$= 2\vartheta \int_0^\infty \int_0^\infty u^2 h(uv)\,\overline{h\left(\frac{u}{v}\right)}dvdu.$$

Vegyük észre, hogy a Jacobi-determináns

$$\left|\det\begin{pmatrix} v & u \\ 1/v & -u/v^2 \end{pmatrix}\right| = \frac{2u}{v},$$

illetve, hogy a transzformáció a nem negatív számpárok halmazát önmagára képező bijekció.

A h képletében szereplő két tagot kiírva, illetve f-re kihasználva a tükrözési elvet

$$\begin{aligned}\overline{h\left(\frac{u}{v}\right)} &= \overline{\exp\left(-z\vartheta\frac{u}{v}\right)f\left(\vartheta\frac{u}{v}\right)} = \exp\left(-\overline{z\vartheta\frac{u}{v}}\right)f\left(\overline{\vartheta\frac{u}{v}}\right) = \\ &= \exp\left(-\bar{z}\frac{u}{v\vartheta}\right)f\left(\frac{u}{v\vartheta}\right).\end{aligned}$$

Mivel $0 < \varphi < \pi/2$, ezért a $\mathrm{Re}\,\vartheta$ és a $\mathrm{Re}\,1/\vartheta$ pozitív.

Az f hiperbolikusan teljesen monoton, és a feltételek szerint kiterjeszthető a $\operatorname{Re} z > 0$ félsíkra következésképpen, miként korábban láttuk

$$f\left(\frac{u}{\vartheta v}\right) \cdot f\left(u \cdot \vartheta v\right) =$$
$$= \int_0^{\infty} \exp\left(-t\left(\frac{u}{\vartheta v} + \vartheta uv\right)\right) dK_u\left(t\right)$$

módon írható. Ezt beírva az alábbi hármas integrált kapjuk:

$$2\vartheta \int_0^{\infty} u^2 \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} \exp\left(-\overline{(z+t)} \cdot \frac{u}{v\vartheta} - (z+t) \cdot u\vartheta v\right) dK_u\left(t\right) dvdu.$$

Ismét az áttekinthető jelölés céljából legyen

$$q \mathrel{\hat{=}} q(t,u) \mathrel{\hat{=}} \frac{u}{\vartheta}\overline{(z+t)}.$$

Az integrál

$$2\vartheta\int_0^\infty u^2\int_0^\infty\int_0^\infty \exp\left(-\left(\frac{q}{v}+\overline{q}\cdot v\right)\right)dK_u(t)\,dvdu.$$

A belső két integrál felcserélhető. Fubini-tétele értelmében ehhez igazolni kell, hogy a hármas integrál abszolút konvergens. Ezt lényegében az előző számítások megfordításával igazolhatjuk:

$$\left|\exp\left(-\left(\frac{q}{v}+\overline{q}v\right)\right)\right| = \exp\left(-\operatorname{Re}\left(\frac{q}{v}+\overline{q}v\right)\right).$$

Mivel $\operatorname{Re} z\vartheta > 0$ és $\operatorname{Re}\vartheta > 0$ ezért a kitevőben szereplő valós rész alkalmas $a, b > 0$ konstansokkal

$$(at+b)\left(\frac{u}{v}+uv\right)$$

alakba írható. Ebből következően a belső integrál

$$\int_0^\infty \exp\left(-(at+b)\left(\frac{u}{v}+uv\right)\right)dK_u(t) =$$
$$= \exp\left(-b\left(\frac{u}{v}+uv\right)\right)\int_0^\infty \exp\left(-t\left(\frac{au}{v}+auv\right)\right)dK_u(t)$$
$$= \exp\left(-b\left(\frac{u}{v}+uv\right)\right)f\left(\frac{au}{v}\right)\cdot f(au\cdot v).$$

Ezt u és v szerint integrálva, majd kihasználva, hogy az integrandus nem negatív, így a helyettesítést „visszacsinálva"

$$\int_0^\infty 2u^2 \int_0^\infty \exp\left(-b\left(\frac{u}{v}+uv\right)\right) \times$$
$$\times f\left(\frac{au}{v}\right)\cdot f\left(au\cdot v\right) dudv =$$
$$= \int_0^\infty \int_0^\infty x \exp\left(-b\left(x+y\right)\right) f\left(ax\right)\cdot f\left(ay\right) dxdy =$$
$$= \int_0^\infty x \exp\left(-bx\right) f\left(ax\right) dx \int_0^\infty \exp\left(-by\right) f\left(ay\right) dy,$$

amely két integrál véges.

A belső két integrált felcserélése után tekintsük az imaginárius rész előjelét meghatározó

$$\vartheta \int_0^\infty \exp\left(-\left(\frac{q}{v} + \overline{q} \cdot v\right)\right) dv$$

kifejezést. A valós számok mentén való v szerinti integrálás helyett térjünk át a $h \mapsto qh$ sugáron vett integrálra.

$$\operatorname{Re} q = \operatorname{Re} \frac{u}{\vartheta}\overline{(z+t)} = u \operatorname{Re}\left(\overline{\vartheta\,(z+t)}\right) = u \operatorname{Re}\left(\vartheta\,(z+t)\right) > 0,$$

és így a külső körön való integrál nullához tart, következésképpen a korábban már látott módon áttérhetünk az új sugárra. Az integrál értéke tehát

$$\vartheta q \int_0^\infty \exp\left(-\left(\frac{1}{h} + |q|^2\, h\right)\right) dh.$$

A képletben szereplő közönséges valós integrál mindig pozitív, következésképpen a hármas integrál imaginárius részének előjelét az

$$\operatorname{Im} \vartheta q = \operatorname{Im}\left(u \cdot \overline{(z+t)}\right) = -u \operatorname{Im} z$$

kifejezés adja meg. Vagyis ha $\operatorname{Im} z > 0$, akkor a hármas integrál imaginárius része nem lehet pozitív, így a számítás elején használt negatív előjel miatt

$$\operatorname{Im}\left(L'(z)\,\overline{L(z)}\right) \geq 0, \quad \text{ha } \operatorname{Im} z > 0.$$

Ezzel Thorin tételének bizonyítását befejeztük.

A t-eloszlás sűrűségfüggvénye

$$f(x) = \frac{1}{B(1/2, r/2)} \frac{1}{(1+x^2)^{(r+1)/2}}$$

Szimmetrikus általánosított gamma konvolúció:

$$\left(\frac{\mu}{\mu - it}\right)^a \left(\frac{\mu}{\mu + it}\right)^a = \left(\frac{\mu^2}{\mu^2 + t^2}\right)^a = \left(\frac{\lambda}{\lambda + t^2}\right)^a.$$

$$\varphi(t) = \exp\left(\int_{0+}^{\infty} \log \frac{\lambda}{\lambda + t^2} dA(\lambda)\right)$$

$$
\begin{aligned}
\varphi(t) &= L\left(\frac{t^2}{2}\right) = \int_0^\infty \exp\left(-u\frac{t^2}{2}\right) dF(u) = \\
&= \int_0^\infty \exp\left(-\left(\sqrt{u}\right)^2 \frac{t^2}{2}\right) dF(u) = \\
&= \int_0^\infty \varphi_{N\left(0,\sqrt{u}\right)}(t)\, dF(u) = \\
&= \int_0^\infty \frac{1}{\sqrt{u}\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^\infty \exp(itx) \exp\left(-\frac{x^2}{2u}\right) dx dF(u) = \\
&= \int_{-\infty}^\infty \exp(itx) \int_0^\infty \frac{1}{\sqrt{2\pi u}} \exp\left(-\frac{x^2}{2u}\right) dF(u)\, dx = \\
&\hat{=} \int_{-\infty}^\infty \exp(itx)\, g(x)\, dx,
\end{aligned}
$$

$$\frac{1}{\Gamma(r)}\int_0^\infty \left(\frac{1}{x}\right)^{r+1} \exp\left(-\frac{1}{x}\right) dx =$$
$$= \frac{1}{\Gamma(r)}\int_0^\infty u^{r+1} \exp(-u) \frac{1}{u^2} dt = 1.$$

$$f(uv)\, f(u/v) =$$
$$\left(\frac{1}{\Gamma(r)}\right)^2 \left(\frac{1}{uv}\right)^{r+1} \left(\frac{1}{u/v}\right)^{r+1} \exp\left(-\frac{1}{uv}\right) \exp\left(-\frac{1}{u/v}\right) =$$
$$= C(u) \exp\left(-\frac{1}{u}\left(v + \frac{1}{v}\right)\right) = C(u) \exp\left(-\frac{1}{u} w\right).$$

Tekintsük az $u = \sigma^2$ paraméter szerinti keverést:

$$\begin{aligned}
g(x) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}\Gamma(r)} \int_0^\infty \frac{1}{\sqrt{u}} \left(\frac{1}{u}\right)^{r+1} \exp\left(-\frac{1}{u}\right) \exp\left(-\frac{x^2}{2u}\right) du = \\
&= \frac{1}{\sqrt{2}\Gamma(1/2)\Gamma(r)} \int_0^\infty t^{1/2} t^{r+1} \exp(-t) \exp\left(-t\frac{x^2}{2}\right) \frac{dt}{t^2} = \\
&= \frac{1}{\sqrt{2}\Gamma(1/2)\Gamma(r)} \int_0^\infty t^{r-1/2} \exp\left(-t\left(1+\frac{x^2}{2}\right)\right) dt = \\
&= \frac{\Gamma(r+1/2)}{\sqrt{2}\Gamma(1/2)\Gamma(r)} \left(\frac{1}{1+x^2/2}\right)^{r+1/2} = \\
&= \frac{1}{\sqrt{2}B(1/2,r)} \left(\frac{1}{1+\left(x/\sqrt{2}\right)^2}\right)^{r+1/2},
\end{aligned}$$