

A likviditáskezelés néhány matematikai problémája

Medvegyev Péter
Budapesti Corvinus Egyetem

January 3, 2015

Abstract

A dolgozatban a likviditáskezelés egy speciális matematikai problémáját tárgyalom. Először röviden feleleveníték az optimális likviditási szint meghatározásával kapcsolatos néhány fontos, többé kevésbé klasszikus tételt, majd ezek kapcsán bemutatom, hogy az inverz Laplace-transzformált miként használható az optimális likviditási szint kiszámolására.

Ezen dolgozat legfontosabb mondandója viszonylag egyszerűen összefoglalható: Az elmúlt időszak pénzügyi problémáiban központi szerepet játszott a likviditás kérdésköre. A likviditás kérdésének számos aspektusa van, így a likviditás témaköre kapcsán szinte a teljes pénzügyi irodalom elmondható. Amennyire meg lehet ítélni egy aspektus ezidáig, legalábbis a hazai irodalomban, némiképpen elsikkadt. Nevezetesen a likviditáskezelés és a klasszikus operációkutatás szoros kapcsolata. A likvid eszközök tartásának problémája közeli rokonságban van a raktárkészletkezelés klasszikus matematikai modelljeivel. A dolgozat első felében ezt kapcsolatot elevenítjük fel. Miként látni fogjuk, az optimális likviditási szint meghatározása egy alkalmas kockázatos érték szint meghatározását jelenti.[4] Az egyetlen lényeges eltérés, hogy a kockázatos értékhez tartozó valószínűségi szint nem a szabályozó hatóság által kerül megadásra, hanem a modellben szereplő költségszintek által lesz meghatározva. Ennek következtében az optimális likvid eszköz szintjének meghatározásakor a legfőbb probléma a likvid eszköz iránti kereslet eloszlásának meghatározása, majd az így kapott eloszláshoz tartozó eloszlásfüggvény inverzének kiszámolása. A nehézség abból ered, hogy a likviditás iránti igény eloszlása általában egy összetett eloszlás, így a likviditás iránti igény eloszlásfüggvénye a legritkább esetben tekinthető elemi függvénynek, így a gyakorlatban is használható eloszlások inverzének közvetlen, zárt alakban való, kiszámolására általában nincs mód, így valamilyen numerikus eljárásra kell hagyatkozni. Természetesen az idevágó irodalom áttekinthetetlenül nagy. [1], [2], [3], [5], [6]. Ebben a dolgozatban a legegyszerűbb és legkézenfekvőbb módszert tekintjük át. Az összetett eloszlások Laplace-transzformáltja igen sok esetben egyszerűen felírható. Általában a Laplace-transzformáció invertálását numerikusan instabil problémának szokás tekinteni. Az irodalomban

azonban számos példát találhatunk arra, hogy ez nem mindig van így. Számos esetben az inverz Laplace-transzformált meghatározása igen egyszerűen és, legalábbis a manapság már közönségesnek mondható számítógépeken, viszonylag gyorsan, a gyakorlat igényeihez képest villámgyorsan, elvégezhető és igen hatékony alternatívát szolgáltat a gyakorlatban elterjedt és igen lassú, szimulációs eljárásokkal szemben. A dolgozat második felében az inverz Laplace-transzformációval kapcsolatos matematikai eredményeket ismertetjük. Az idevágó tételek az irodalomban számos helyen szétszórva találhatók meg, így érdemes ezeket összeszedni és a teljesség kedvéért egységes módon összefoglalni. A dolgozat harmadik részében néhány egyszerű számítás található. Ezek részben illusztratív jellegűek és céljuk a módszer hatékonyságának demonstrálása, jórészt azonban azt szeretnénk feltérképezni, hogy miként lehet a Laplace-transzformáció invertálását bonyolultabb valószínűségszámítási helyzetekben hatékonyan alkalmazni. A valószínűségszámításra alapozó közgazdasági modellezésben visszatérő problémát jelent hogy az alapeloszlások, vagyis a zárt képlettel megadható egyszerű eloszlások rosszul illeszkednek a tényleges adatokhoz. Ezért kézenfekvő módon esetleg több különböző eloszlás valamilyen kombinációjával célszerű élni. Ugyanakkor az eloszlásokon végrehajtható kézenfekvő operációk, mint a konvolúció és a keverés analitikusan kifejezetten igényes feladatot jelentenek és csak szigorú feltételek mellett hajthatók végre. Evvel szemben gyakran a valamiképpen kombinált eloszlások különböző függvénytranszformáltjai egyszerűen megadhatók. Így a függvénytranszformáltak szintjén számos kézenfekvő új eloszlás definiálható. A függvénytranszformált megadásakor azonban a tényleges valószínűségszámítási információ csak kódolt formában áll rendelkezésre. A függvénytranszformált inverzének meghatározása éppen ezt a kódolt információhoz való hozzáférés módját adja meg¹.

1 Likviditáskezelés és a készletgazdálkodás

Első lépésként vázoljuk a készletgazdálkodási modellek és a likviditási modellek kapcsolatát. Mivel a cél a számítógépes realizáció lehetőségének megvizsgálása, ezért a lehetséges irányok közül leginkább a numerikus implementációval kapcsolatos kérdéseket hangsúlyozzuk. Ugyancsak fontos annak hangsúlyozása, hogy a likviditási modellek tárgyalását a pénzügyi irodalomban szokásos var modellek szempontjából tárgyaljuk, evvel is hangsúlyozva, hogy a kockázatkezeléssel kapcsolatban felhalmozott általános ismereteket miként lehet a likviditáskezelés területére is átvinni. Általában a készletgazdálkodási modellek és a kockázatkezelés kapcsolata nem megfelelően hangsúlyozott. A raktározási modellek célja egy olyan biztonságos szint meghatározása, amely esetén a felmerülő költségek minimálisak. A költségek két csoportba oszthatók: Egyrészt a raktárkészlet tartási költségei, másrészt a ki nem elégített igényből származó veszteségek. Ez

¹A Laplace-transzformáció pénzügyi alkalmazásának egyik további fontos példája a különböző opciók árának kiszámolása. Például az ázsiai opciók árát közvetlenül nem lehet zárt képlettel megadni, de a Laplace-transzformáltja egyszerűen megadható, így az ázsia opciók kiszámolásának egyik módszere szintén az inverz Laplace-transzformációra épül. [8]

a fajta gondolkodás közvetlenül átvihető a kockázatkezelés területére is. Az egyetlen eltérés az, hogy a biztonsági szint meghatározása gyakran a szabályozó hatóság által van rögzítve és nem a költségek által van meghatározva. Ez ugyanakkor tekinthető valamiféle közvetett árszabályozásnak is. A szabályozó hatóság valójában amikor előírja a kockázatos értékhez tartozó valószínűséget valójában a ki nem elégített igény költségét írja elő. Az, hogy a kockázatos érték fogalma közvetett módon egy igen természetes optimalizációs modell alkalmas paraméterbeállításával azonos széles körben nem ismert tény.

1.1 Statikus modellek

A legegyszerűbb likviditási modellben, amely az operációkutatás egyik klasszikus² modelljének pénzügyi újrainterpretációja egy adott időszakban a likvid eszköz iránt jelentkező véletlen kereslet fedezését kell megvalósítani. A véletlen kereslet nagyságát jelölje D , ahol a D a demand kifejezésre utal. Feltételezzük, hogy a D eloszlása ismert, és jelölje F az eloszlásfüggvényt, f a sűrűségfüggvényt. Természetesen amennyiben az F tartója a teljes $[0, \infty)$ félegyenes a keresletet nem lehet mindig kielégíteni, mert az ehhez szükséges végtelen nagyságú likvid eszköz iránti igény költsége végtelen. Éppen ezért gazdaságossági megfontolásokkal kell élni. Jelölje h a likvid eszköz tartásának költségét³, és p a ki nem elégített igény költségét⁴. A modell konkrét alkalmazásakor az F és a h és a p értékét előre meg kell határozni. A modell megoldása az S optimális likviditási szint meghatározása⁵. Természetesen szemben a D -vel a S konstans.

Írjuk fel a célfüggvényt. Ismét az irodalomban szokásos jelölést használva

$$J(S) = h \cdot \mathbf{E} \left((S - D)^+ \right) + p \cdot \mathbf{E} \left((D - S)^+ \right).$$

Vagyis ha $S > D$, tehát ha a rendelkezésre álló likvid eszköz állománya nagyobb mint a kereslet, akkor az $S - D$ maradványt egységenként h költséggel raktározni, tartani kell. A raktározandó érték nagysága nyilván $(S - D)^+$. Ha azonban a kereslet nagyobb a kínálatnál, vagyis $D - S$ nagyságú kereslet nem lett kielégítve, akkor az elveszett keresletért, amely nagysága $(D - S)^+$, egységenként p büntetést kell fizetni. A kérdés az, hogy a két költség együttes figyelembevételével mennyi az optimális S ?

Az S meghatározása akkor a legegyszerűbb, ha feltesszük, hogy az F elosz-

²A modellt Edgeworth, F. 1888-ban írt "The Mathematical Theory of Banking" J. Royal Statistical Society. 51, 113-127 oldal dolgozatáig lehet visszavezetni. Később a modell számos formában újra és újra megjelent az irodalomban.

³ h mint holding cost.

⁴ p mint penalty cost.

⁵Értelemszerűen S mint supply.

lásának van sűrűségfüggvénye⁶. Ilyenkor

$$\begin{aligned}\mathbf{E}\left((S-D)^+\right) &= \int_{\mathbb{R}} (S-x)^+ dF(x) = \int_{\mathbb{R}} (S-x)^+ f(x) dx = \\ &= \int_0^S (S-x) f(x) dx,\end{aligned}$$

ahol az alsó határ meghatározásakor feltesszük, hogy a keresletre $D \geq 0$. Hasonlóan

$$\mathbf{E}\left((D-S)^+\right) = \int_S^\infty (x-S) f(x) dx.$$

Ennek megfelelően

$$J(S) = h \int_0^S (S-x) f(x) dx + p \int_S^\infty (x-S) f(x) dx.$$

A $J(S)$ kifejezést S szerint deriválva, a paraméteres integrálok közismert deriválási szabályát felhasználva

$$\begin{aligned}\frac{dJ}{dS} &= h(S-S) + h \int_0^S 1 \cdot f(x) dx + \\ &\quad -p(S-S) + p \int_S^\infty -1 \cdot f(x) dx.\end{aligned}$$

Természetesen ellenőrizni kell, hogy az integrálok alatt el lehet-e végezni a deriválást, de ez nem okoz gondot, ugyanis az integrandusok deriváltjának van integrálható majoránsa. A deriváltat nullával egyenlővé téve

$$\begin{aligned}0 &= h \int_0^S 1 \cdot f(x) dx - p \int_S^\infty 1 \cdot f(x) dx = \\ &= hF(S) - p(1-F(S)).\end{aligned}$$

Ezt S -re megoldva

$$(h+p)F(S) = p, \quad F(S) = \frac{p}{h+p}.$$

Vagyis az optimális likviditási szint éppen az $\alpha \doteq p/(h+p)$ szinthez tartozó kockázatotott értékkel azonos. Ha több ponton is eléri az F az α szintet, akkor érdemes a kockázatotott érték számítás során megszokott

$$S^* = \inf \{S \mid F(S) = \alpha\} = \inf \{S \mid F(S) \geq \alpha\}$$

⁶Gyakran előfordul, hogy a D eloszlása diszkrét, $D = 0, 1, \dots$. Ilyenkor értelemszerűen nincs sűrűségfüggvény, így a bemutatott gondolatmenet nem alkalmazható, de a gondolatmenet viszonylag egyszerűen erre az estre is általánosítható és ilyenkor is az optimális készlet szint egy alkalmas kockázatotott érték szint meghatározására redukálódik. A diszkrét esettel azonban ebben a dolgozatban nem foglalkozunk.

értéket választani⁷.

A modell további finomításaként tegyük fel, hogy egységnyi likviditás beszerzése c egységköltséggel jár. Ekkor

$$J(S) = c \cdot S + h \cdot \mathbf{E} \left((S - D)^+ \right) + p \cdot \mathbf{E} \left((D - S)^+ \right).$$

Deriváltat a már bemutatott módon kiszámolva és nullával egyenlővé téve

$$c + hF(S) - p(1 - F(S)) = 0.$$

Ezt rendezve

$$c - p + F(S)(h + p) = 0, \quad \frac{p - c}{p + h} = F(S^*)$$

egyenletre jutunk.

Example 1 *Normális eloszlás esete, Edgeworth megoldása.*

A likviditás matematikai elméletének XIX. századi irodalmában Edgeworth a centrális határeloszlás tételére hivatkozva feltételezte, hogy a D likviditás iránti igény számos apró független tényező összegeként jelentkezik, következésképpen a D eloszlása normális $N(\mu, \sigma)$ paraméterekkel. Ekkor

$$\alpha = F(S) = \mathbf{P}(\mu + \sigma\xi < S) = \mathbf{P}\left(\xi < \frac{S - \mu}{\sigma}\right) = \Phi\left(\frac{S - \mu}{\sigma}\right),$$

ahol a ξ eloszlása $N(0, 1)$. A standard normális eloszlás eloszlásfüggvényének inverze $\Phi^{-1}(x)$ kiszámolása a legtöbb szoftvercsomagban szerepel⁸. Ha $x^* = \Phi^{-1}(\alpha)$, akkor

$$x^* = \frac{S^* - \mu}{\sigma}, \quad S^* = \sigma x^* + \mu.$$

Edgeworth megoldása negatív keresletet is megenged. Ez bizonyos esetekben indokolt, de a legtöbb esetben azonban megköveteljük, hogy a D likviditás iránti igény nem lehet negatív. A D eloszlására ilyenkor kézenfekvő feltenni a lognormalitást. Ilyenkor a számolás visszavezethető a normális esetre

$$\mathbf{P}(D < S^*) = \mathbf{P}(\ln D < \ln S^*) = \mathbf{P}(N(\mu, \sigma) < \ln S^*) = \alpha.$$

A $N(\mu, \sigma)$ normális eloszlású, így alkalmazható a normális eloszlás esetén bemutatott képlet. Ha az eredeti D lognormális eloszlás várható értéke m és a

⁷ Amikor a szabályozó hatóság a likviditás iránti igény szintjét magasra helyezi, akkor a p árát szabályozza indirekt módon. Világos, hogy ha $p \rightarrow \infty$, akkor $p/(h + p) \rightarrow 1$ és általában $S \rightarrow \infty$. Világos, hogy minnél vastagabb a D farokeloszlása, annál nagyobb az S adott p és h esetén. A kockázatkezelési irodalomban igen elterjedt nézet miszerint a kockázatotott érték nem megfelelő jelszámú a tényleges kockázatnak. Miközben ennek a kritikának a jogosságát nem lehet vitatni érdemes megjegyezni, hogy a kockázatotott érték az itt bemutatott szemléletben igen kézenfekvően és természetes módon jelentkezik.

⁸ Az irodalomban számos algoritmus ismert. A Matlab R2008b által használt algoritmus az erfcinv.m állományban van dokumentálva.

varianciája v , akkor a hozzá tartozó normális eloszlásra

$$\begin{aligned}\mu &= \ln\left(\frac{m^2}{\sqrt{v+m^2}}\right), \\ \sigma &= \sqrt{\ln\left(\frac{v}{m^2}+1\right)}.\end{aligned}$$

□

1.2 Dinamikus modellek

A modell dinamikus verziójában egy végtelen időhorizonton tekintjük a likviditás iránti keresletet és a várható költségek diszkontált összegét minimalizáljuk. Több modell is felírható, de a legegyszerűbb, amikor a likviditás iránti igény az egyes periódusokban azonos eloszlás szerint jelentkezik. Természetesen az egyes periódusokban jelentkező D_n likviditási igényről feltesszük, hogy függetlenek. A likviditáskezeléskor a rendszer dinamikáját megadó egyenlet

$$y_{n+1} = (y_n + S_n - D_n)^+, \quad y_0 = x,$$

ahol x egy előre adott konstans, amely a kezdőállapotban, a $t = 0$ időpontban, rendelkezésre álló likvid eszközök értékét adja meg és y_n az n -edik periódus végén rendelkezésre álló, megmaradt likvid eszköz nagysága. Feltesszük, hogy az egyes időpontokban jelentkező D_n likviditási iránti kereslet eloszlása minden időszakban azonos és az egyes időszakok egymástól függetlenek. Feltesszük továbbá, hogy a közös eloszlás rendelkezik egy folytonos $f(x)$ sűrűségfüggvénnyel. Az S_n változó az egyes időpontokban beszerzett likvid eszközök mennyisége. Nyilván az S_n a rendszer kontrolváltozója, és a modell célja az S_n értékének meghatározása.

A fenti állapotegyenlet felírása igen kézenfekvő, kevésbé nyilvánvaló az egyenlet megoldását megadó célfüggvény felírása. A matematikailag legegyszerűbben kezelhető alak amikor a diszkontált várható költséget akarjuk minimalizálni. Ehhez természetesen meg kell adni egy α -val jelölt diszkonttényezőt. Legyen

$$\begin{aligned}l(y, S) &= c \cdot S + h \cdot y + p \cdot \mathbf{E}\left((D - (y + S))^+\right) = \\ &= c \cdot S + h \cdot y + p \left(\int_{x+S}^{\infty} (z - (y + S)) f(z) dz\right)\end{aligned}$$

az egy lépéses költségfüggvény. Minden időszakban az előző időszak végén megmaradt y után ki kell fizetni a h tartási költséget, az időszak elején meg kell vásárolni az S likviditást és az így rendelkezésre álló $y + S$ likviditás fölötti kereslet után ki kell fizetni a p büntetést. A dinamikus modellben a célfüggvény

$$J(x, S) = \sum_{n=0}^{\infty} \alpha^n l(y_n, S_n).$$

A modell szerint tetszőleges időszakban egyrészt az előző időszak végéről rendelkezésre áll y_n nagyságú likvid eszköz, illetve S_n egységnyi likvid eszköz az

időszak elején beszerzésre kerül. Ennek az időszak során két költségkövetkezménye van: a c beszerzési egységköltség és a h tartási egységköltség. A tartási költséget az adott időszakban fel nem használt likvid eszközért kell kifizetni. Az időszak során keletkező, ki nem elégített kereslettöbblet egységköltsége p . A ki nem elégített likviditáskeresletből származó átlagos veszteség éppen az $l(y, S)$ képletében szereplő várható értékből származó veszteség. A dinamikus modell szerint a D kereslet fölötti rész átkerül a következő időszakba.

A sztochasztikus dinamikus programozás eszköztárával [4] a következő eredményt kapjuk:

Theorem 2 *Ha $p > c$, akkor létezik olyan S^* konstans és $S^*(y)$ optimális stratégia, amelyre*

$$S^*(y) = \begin{cases} S^* - y & \text{ha } y \leq S^* \\ 0 & \text{ha } y > S^* \end{cases},$$

vagyis az optimális S^* készletszintre kell minden időszak elején a készletet feltölteni. Az S^* értékét a következő egyenlőség segítségével határozhatjuk meg:

$$F(S^*) = \frac{p - c}{p + \alpha(h - c)}.$$

Összehasonlítva a statikus modellben kapott

$$\frac{p - c}{p + h} = F(S^*)$$

értékkel látható, hogy a statikus és a dinamikus esetben a számláló azonos, de a dinamikus esetben a h helyébe $\alpha(h - c)$ kerül.

2 A modellek megoldásának problémái folytonos eloszlások esetén

Az optimális likviditási szint meghatározásával kapcsolatos probléma abból ered, hogy hogy a közismert eloszlásfüggvények inverzei általában csak nem triviális módon számolhatóak. A likviditás iránti igény⁹ általában több kockázati faktor következménye. Esetenként több különböző eloszlású csoportokhoz tartozó keresleteket kell összeadni, gyakran pedig külön kell modellezni, hogy hány igény érkezett, és azoknak mi volt a nagysága és az így kapott kevert eloszlás adja meg a likviditás iránti igényt. Vagyis az eloszlás eredendően összetett. Az összetett eloszlások kezelésének legegyszerűbb módja az összetett eloszlás Laplace-transzformáltjának meghatározása, majd az így kapott transzformáció invertálása. Mielőtt erre rátérnénk két közismert példát elevevünk fel.

Example 3 *Exponenciális és gamma eloszlások összege.*

⁹Hasonlóan a kockázat általános modellezéséhez.

Miként közismert két független exponenciális eloszlás összege gamma eloszlást követ feltéve, hogy a λ paraméterük közös. Ilyenkor szokás Erlang-eloszlásról beszélni. Vagyis az Erlang eloszlások speciális gamma eloszlások. Ugyanakkor ha nem közös a λ paraméter, akkor az összegük úgynevezett hipoexponenciális eloszlás lesz. A hipo jelző arra utal, hogy ilyenkor a szórás/várható érték hányados egynél kisebb lesz¹⁰. Például két különböző paraméterű független exponenciális eloszlású valószínűségi változó összegének eloszlásfüggvénye

$$F(x) = 1 - \frac{\lambda_1}{\lambda_1 - \lambda_2} \exp(-\lambda_2 x) + \frac{\lambda_2}{\lambda_1 - \lambda_2} \exp(-\lambda_1 x).$$

Mivel független eloszlások esetén a varianciák összeadódnak a szórás/várható érték hányados

$$\frac{\sqrt{1/\lambda_1^2 + 1/\lambda_2^2}}{1/\lambda_1 + 1/\lambda_2} = \frac{\sqrt{\frac{\lambda_1^2 + \lambda_2^2}{\lambda_1^2 \lambda_2^2}}}{\frac{\lambda_1 + \lambda_2}{\lambda_1 \lambda_2}} = \frac{\sqrt{\lambda_1^2 + \lambda_2^2}}{\lambda_1 + \lambda_2} < 1,$$

amely indokolja az elnevezést. Az $F(x) = \alpha$ egyenlet gyökének megkeresése numerikus módszerrel megoldható. Ugyanakkor két független gamma eloszlású valószínűségi változó összegének eloszlásfüggvénye csak integrálrepresentációval vagy végtelen sorelőállítással adható meg¹¹. Ugyanakkor az (a, λ) paraméterű gammaeloszlás Laplace-transzformáltja egyszerűen felírható

$$L(s) = \left(\frac{1}{1 + s/\lambda} \right)^a.$$

Mivel összegek Laplace-transzformáltja a Laplace-transzformáltak szorzata n darab (a_i, λ_i) gamma eloszlás Laplace-transzformáltja könnyen kiszámolható

$$L(s) = \prod_{i=1}^n \left(\frac{1}{1 + s/\lambda_i} \right)^{a_i} = \prod_{i=1}^n \left(\frac{\lambda_i}{\lambda_i + s} \right)^{a_i}.$$

□

Example 4 Eloszlások keverése.

Tegyük fel, hogy a D változó eloszlása valamilyen N darabszám változóval és valamilyen ξ_k egyedi keresleti elemek véletlen összegével reprezentálható, vagyis

$$D = \sum_{k=1}^N \xi_k.$$

¹⁰A hiperexponenciális eloszlásokat a különböző paraméterű exponenciális eloszlások keverésével hozzuk létre, vagyis a sűrűségfüggvényeik $\sum_k p_k f_{\lambda_k}$ alakúak, ahol a (p_k) valószínűségi eloszlást alkotnak, az f_{λ_k} pedig egy λ_k paraméterű exponenciális eloszlás sűrűségfüggvénye.

¹¹Ebből a szempontból a gamma eloszlások és a lognormális eloszlások hasonló problémát jelentenek. A lényeges eltérés az, hogy a gamma eloszlások esetén a Laplace-transzformáció egyszerűen felírható, így a probléma hatékonyan megkerülhető. Lognormális eloszlások esetén azonban egyrészt az összeg eloszlása nehezen számolható, másrészt a Laplace-transzformáció is csak közelíthető, így a Laplace-transzformáció nem tekinthető kétséget kizáró megoldásnak.

Ilyenkor a D Laplace-transzformáltja a teljes várható érték tétel alapján

$$\begin{aligned}
L_D(s) &\doteq \mathbf{E}(\exp(-s \cdot D)) = \mathbf{E}(\mathbf{E}(\exp(-s \cdot D) \mid N = k)) = \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} \mathbf{E}(\exp(-s \cdot D) \mid N = k) \cdot p_k = \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} \mathbf{E}\left(\exp\left(-s \cdot \sum_{i=0}^k \xi_i\right)\right) \cdot p_k = \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} (\mathbf{E}(\exp(-s \cdot \xi)))^k p_k = G_N(L_\xi(s)),
\end{aligned}$$

ahol G_N a darabszám változó generátorfüggvénye és L_ξ az egyedi igények közös Laplace-transzformáltja. Természetesen a számolás során kihasználtuk, hogy az egyedi igények, illetve a darabszámok függetlenek. □

A valószínűségszámításban alapvetően három fajta függvénytranszformálttal találkozhatunk. A legegyszerűbb a $G(z)$ generátorfüggvény, amely csak egész értékeket felvevő eloszlások esetén alkalmazható. Valamivel szélesebb körben használható a Laplace-transzformáció, illetve ennek valószínűségszámítási megfelelője a momentumgeneráló függvény. A Laplace-transzformáció alapvetően nem negatív értékeket felvevő változók esetében használható megfelelően. A legáltalánosabb függvénytranszformált a Fourier-transzformáció, amelynek a valószínűségszámításban a karakterisztikus függvény felel meg. A karakterisztikus függvény tetszőleges értéket felvevő változók esetében alkalmazható. Érdemes megemlíteni, hogy a Fourier-transzformáció és a Laplace-transzformáció a valószínűségszámítási párjuktól csak az argumentum előjelében különböznek. Vagyis például a Laplace-transzformáció az $L(s) = \mathbf{E}(-s\xi)$ képlettel definiálható, a neki megfelelő momentumgeneráló függvény pedig az $M(s) = \mathbf{E}(s\xi)$ módon van értelmezve. Mind a három transzformáció egyértelműen meghatározza a neki megfelelő eloszlást, vagyis egész értékű eloszlások esetén a generátorfüggvény, nem negatív eloszlások esetén a Laplace-transzformált, illetve tetszőleges eloszlás esetében a Fourier-transzformáció ismeretében elvileg az eloszlás egyértelműen meghatározott. A generátor függvény esetében az egyértelműség bizonyítása egyúttal algoritmust is szolgáltat: Ha $G(z) = \sum_{k=0}^{\infty} p_k z^k$ valamely p_k diszkrét eloszlás generátorfüggvénye, akkor a $G(z)$ valójában egy hatványsor, így érvényes a

$$G(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{G^{(k)}(0)}{k!} z^k$$

sorfejtés is. Mivel a sorfejtés egyértelmű, ezért teljesül a

$$p_k = \frac{G^{(k)}(0)}{k!}$$

inverziós formula. Nyilván a G egyértelműen megadja a $G^{(k)}(0)$ deriváltakat, amelyek pedig megadják a p_k valószínűségeket. Természetesen a formulából az is világos, hogy a $G^{(k)}(0)$ deriváltak viszonylag gyorsan nőnek, így közvetlen kiszámolásuk általában nemtriviális sőt igen nehéz is lehet. A gyakorlatban használható esetekben, mind például a CreditRisk+ modellben a deriváltak azonban valamilyen rekurzív képlettel írhatók fel, amely már egy rekurziós formulát eredményez a p_k értékekre¹². A rekurzió számolásához szükséges tudni a p_0 értékét. A p_0 értéke általában ismert, ugyanis a p_0 a nulla értékű kereslet valószínűsége, amely megegyezik a nulla keresleti igény valószínűségével, amely a darabszámot modellező N eloszlásából már ismert, vagyis érvényes a $p_0 = \mathbf{P}(N = 0)$ egyenlőség. A megfelelő kockázati érték kiszámolásához a rekurziót addig kell folytatni, amíg a $\sum_k p_k$ kumulált érték el nem éri az előírt valószínűségi szintet. Az ehhez szükséges lépésszám megadja az eloszlásfüggvény inverzét. Ugyanakkor a folytonos eloszlásokra használható Laplace- és Fourier-transzformációk és az eloszlások egyértelmű kapcsolatát biztosító gondolatmenetek absztrakt jellegűek és nem adnak közvetlen útmutatást arra, hogy miként kell az eloszlást kiszámolni. Ez felveti ezen függvénytranszformáltak hatékony numerikus invertálásának kérdését. Mivel a likviditás iránti igény definícióját tekintve nem negatív ezért nem szükséges az általános esettel, vagyis a karakterisztikus függvény invertálásával, foglalkozni, hanem elegendő a Laplace-transzformált inverzének numerikus meghatározásának problematikáját tárgyalni.

2.1 Az eloszlásfüggvény transzformálása

Definíció szerint tetszőleges s esetén, ha az F eloszlásnak létezik f sűrűségfüggvénye, akkor

$$L(s) = \mathbf{E}(\exp(-s\xi)) = \int_0^\infty \exp(-sx) dF(x) = \int_0^\infty \exp(-sx) f(x) dx.$$

A különböző numerikus invertálási algoritmusok az $f(x)$ meghatározását célozzák meg, vagyis az

$$\hat{f}(s) = \int_0^\infty \exp(-sx) f(x) dx$$

alakú transzformációból próbálják az $\hat{f}(s)$ függvényből visszaszámolni az $f(x)$ függvényt. Nekünk azonban az $F(x)$ függvényre van szükségünk. Parciálisan integrálva és felhasználva, hogy az F eloszlásnak van sűrűségfüggvénye

$$\begin{aligned} L(s) &= \hat{f}(s) = \int_0^\infty \exp(-sx) f(x) dx = \\ &= [F(x) \exp(-sx)]_0^\infty + s \int_0^\infty \exp(-sx) F(x) dx = \\ &= s \int_0^\infty \exp(-sx) F(x) dx, \end{aligned}$$

¹²Ezt az eljárást szokás Panjer-rekurzióknak nevezni.

ahol felhasználtuk, hogy $F(0) = 0$. Vagyis

$$\widehat{F}(s) = \frac{1}{s} \widehat{f}(s) = \frac{L(s)}{s}.$$

Az $F(0) = 0$ feltétel és a sűrűségfüggvény létezése azt jelenti, hogy feltesszük, hogy a likviditás iránti igény mindig pozitív, vagyis ha D jelöli a likviditás iránti igényt, akkor $\mathbf{P}(D \leq 0) = 0$. Érdeemes megjegyezni, hogy a Laplace-transzformációs módszert gyakran, például a CreditRisk+ modell általánosításaiban, szokás a veszteségek meghatározására is használni. Ilyenkor azonban kézenfekvő feltenni, hogy a nulla veszteség valószínűsége pozitív. Ilyenkor sűrűségfüggvény csak az $x > 0$ tartományon van, vagyis ha most D jelöli a veszteség nagyságát, akkor, minden $x > 0$ esetén

$$F(x) = \mathbf{P}(D = 0) + \int_0^x f(t) dt.$$

Jelölje $L(s)$ az összetett veszteséeloszlás Laplace-transzformáltját. Minden $s > 0$ esetén

$$\begin{aligned} L(s) &= \int_0^\infty \exp(-sx) dF(x) = \\ &= \int_{\{0\}} \exp(-sx) dF(x) + \int_{0+}^\infty \exp(-sx) dF(x) = \\ &= \mathbf{P}(D = 0) + \int_{0+}^\infty \exp(-sx) f(x) dx = \\ &= \mathbf{P}(D = 0) + [F(x) \exp(-sx)]_{0+}^\infty + s \int_{0+}^\infty \exp(-sx) F(x) dx = \\ &= \mathbf{P}(D = 0) - F(x+) + s \int_0^\infty \exp(-sx) F(x) dx = \\ &= s \int_0^\infty \exp(-sx) F(x) dx, \end{aligned}$$

vagyis ilyenkor is igaz az

$$\int_0^\infty \exp(-sx) F(x) dx = \frac{L(s)}{s}$$

szabály. Ha azonban az $F(x) = \sum_k f(x_k) \Delta x_k$ szabállyal akarunk számolni, akkor ügyelni kell, hogy az összegzést a $\mathbf{P}(D = 0)$ pontból kell elindítani.

2.2 Laplace-transzformáció a komplex számsíkon

A Laplace-transzformációt eredendően valós értékű s értékekre definiáltuk. A szokásos, gyakran hangoztatott észrevétel alapján a transzformáció fő előnye, hogy használatakor nem kell komplex függvényekkel foglalkozni. Ugyanakkor

azonban ha a transzformáció inverzét is ki akarjuk számolni, akkor mégis kénytelenek vagyunk a transzformációt a komplex síkban tekinteni.

A kiterjesztés teljesen kézenfekvő módon történik.

$$\mathcal{L}(z) = \mathbf{E}(\exp(-z\xi)) = \int_0^\infty \exp(-zx) dF(x) = \int_0^\infty \exp(-zx) f(x) dx,$$

ahol $z = s + it$ most komplex értékű változó. Értelemszerűen F az eloszlásfüggvény f pedig a megfelelő sűrűségfüggvény. A komplex síkra való kiterjesztés fő előnye, hogy érvényes a következő:

Theorem 5 (Bromwich integrál) *Tegyük fel, hogy az f valós függvény esetén az u pontban léteznek az $f(u \pm 0)$ határértékek, illetve az*

$$f'_\pm(u \pm 0) = \lim_{h \nearrow 0} \frac{f(u \pm h) - f(u \pm 0)}{h}$$

deriváltak. Ha az $z > a$ félsíkban létezik az f

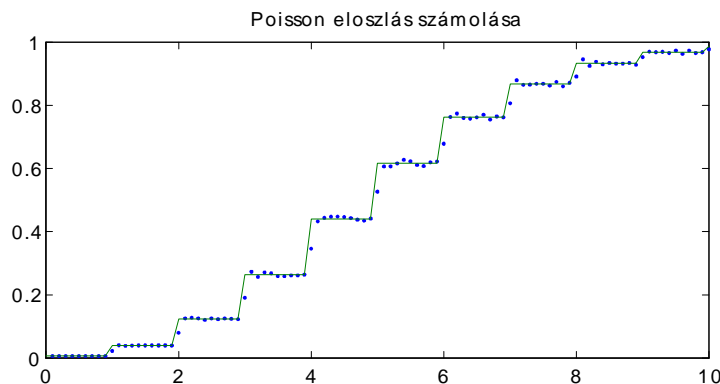
$$\mathcal{L}(z) = \int_{\mathbb{R}} \exp(-z \cdot x) f(x) dx$$

komplex Laplace-transzformáltja, akkor tetszőleges $s > a$ esetén érvényes az

$$\begin{aligned} \frac{f(u+0) + f(u-0)}{2} &= \frac{1}{2\pi i} v.p. \int_{s-i\infty}^{s+i\infty} \exp(u \cdot z) \mathcal{L}(z) dz = \\ &= \frac{1}{2\pi i} \lim_{T \nearrow \infty} \int_{s-iT}^{s+iT} \exp(u \cdot z) \mathcal{L}(z) dz. \end{aligned}$$

előállítás.

Vegyük észre, hogy eloszlásfüggvények esetén a tételben szereplő feltételek mindig teljesülnek. Érdekes ellenőrizni a Poisson-eloszlás esetén az inverziós formulát. Az eredmény az 1. ábrán látható. A Poisson eloszlás Laplace-transzformáltja $L(s) = \exp(\exp(-s) - 1)$. Mivel az eloszlásfüggvényt szeretnénk kiszámolni az $L(s)/s$ képletre kell az alább ismertetett invertáló algoritmust használni. Az ábrán jól látható, hogy a fenti képletnek megfelelő módon a szakadási pontokban a numerikus invertálás éppen a szakadás nagyságának felénél jelentkezik.



A Poisson eloszlás eloszlásfüggvénye $\lambda = 5$ paraméter esetén

A Bromwich-formula egyszerű következménye a következő összefüggésnek amely igazolását a teljesség kedvéért közöljük:

Proposition 6 (Fourier inverziós formula) *Ha az f integrálható valós függvény egy x pontban rendelkezik $f(x \pm 0)$ jobb valamint bal oldali határértékekkel és léteznek az $f'_+(x+0)$ és $f'_-(x-0)$ egyoldali deriváltak, akkor*

$$\begin{aligned} \frac{f(x+0) + f(x-0)}{2} &= \frac{1}{2\pi} v.p. \int_{\mathbb{R}} \varphi(t) \exp(-itx) dt \doteq \\ &\doteq \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2\pi} \int_{-T}^T \varphi(t) \exp(-itx) dt \doteq \\ &\doteq \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2\pi} \int_{-T}^T \int_{-\infty}^{\infty} f(y) \exp(iy) dy \exp(-itx) dt = \\ &= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2\pi} \int_{-T}^T \int_{-\infty}^{\infty} f(y) \exp(it(y-x)) dy dt \end{aligned}$$

ahol $\varphi(t)$ értelemszerűen az $f(x)$

$$\varphi(t) \doteq \int_{\mathbb{R}} f(x) \exp(itx) dx$$

transzformáltja.

A Fourier-formula bizonyítása: Legyen

$$\varphi(t) \doteq \int_{\mathbb{R}} f(x) \exp(itx) dx$$

az f Fourier-transzformáltja¹³. Elemi számolással, felhasználva, hogy az f

¹³ A valószínűségszámítási irodalomban a $\varphi(t)$ szokásos elnevezése karakterisztikus függvény. Általában a matematikai irodalomban a Fourier transzformációban az exponenciális függvény kitévőjében szerepel még egy negatív előjel is. Az elnevezések tekintetében ettől azonban az egyszerűség kedvéért eltekintünk. Reméljük ez nem lesz zavaró.

integrálható, így a Fubini-tétel használható

$$\begin{aligned}
I_T(x) &\doteq \frac{1}{2\pi} \int_{-T}^T \varphi(t) \exp(-itx) dt \doteq \\
&\doteq \frac{1}{2\pi} \int_{-T}^T \int_{\mathbb{R}} f(u) \exp(itu) du \exp(-itx) dt = \\
&= \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} f(u) \int_{-T}^T \exp(itu) \exp(-itx) dt du = \\
&= \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} f(u) \int_{-T}^T \cos t(u-x) dt du = \\
&= \frac{1}{\pi} \int_{\mathbb{R}} f(u) \frac{\sin T(u-x)}{u-x} du = \\
&= \frac{1}{\pi} \int_{\mathbb{R}} f(v+x) \frac{\sin Tv}{v} dv = \\
&= \frac{1}{\pi} \int_0^\infty [f(x+v) + f(x-v)] \frac{\sin Tv}{v} dv.
\end{aligned}$$

A feltétel szerint léteznek az $f(x \pm 0)$ jobb, illetve bal oldali határértékek és léteznek a

$$\lim_{h \searrow 0} \frac{f(x \pm h) - f(x \pm 0)}{h}$$

egy oldali „deriváltak”. Vegyük észre, hogy ha $T \rightarrow \infty$, akkor a

$$\begin{aligned}
\Delta(T) &\doteq I_T(x) - \frac{f(x+0) + f(x-0)}{2} = \\
&= \frac{1}{\pi} \int_0^\infty \frac{f(x+v) - f(x+0)}{v} \sin Tvdv + \\
&\quad + \frac{1}{\pi} \int_0^\infty \frac{f(x-v) - f(x-0)}{v} \sin Tvdv
\end{aligned}$$

kifejezés nullához tart. A szimmetria miatt csak az elsővel foglalkozunk. Az $f'_+(x+0)$ létezése miatt az

$$\int_0^1 \frac{f(x+v) - f(x+0)}{v} \sin Tvdv$$

integrálban a

$$v \mapsto \frac{f(x+v) - f(x+0)}{v}$$

függvény a $[0, 1]$ -en szakaszonként folytonos, tehát integrálható, így ha $T \rightarrow \infty$, akkor a Riemann–Lebesgue-lemma miatt az integrál nullához tart. Szintén a Riemann–Lebesgue-lemma miatt, felhasználva, hogy az $[1, \infty)$ szakaszon az $f(x+v)/v$ integrálható

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \int_1^\infty \frac{f(x+v)}{v} \sin Tvdv = 0.$$

A Dirichlet-integrál mint improprius integrál konvergenciája miatt, ha $T \rightarrow \infty$, akkor

$$\begin{aligned} \int_1^\infty \frac{f(x+0)}{v} \sin Tv dv &= f(x+0) \int_1^\infty \frac{\sin Tv}{v} dv = \\ &= f(x+0) \int_T^\infty \frac{\sin w}{w} dw \rightarrow 0. \end{aligned}$$

□

A Bromwich-formula bizonyítása: Legyen

$$g(u) \doteq \exp(-su) f(u), \quad s > a$$

A feltétel szerint a g integrálható, így a g -re érvényes a Fourier-formula. Valós számok konjugáltja önmaga, így

$$\begin{aligned} \frac{g(x+0) + g(x-0)}{2} &= \\ &= \frac{1}{2\pi} v.p. \int_{-\infty}^\infty \int_{-\infty}^\infty g(y) \exp(it(y-x)) dy dt = \\ &= \frac{1}{2\pi} v.p. \int_{-\infty}^\infty \int_{-\infty}^\infty g(y) \exp(it(y-x)) dy dt = \\ &= \frac{1}{2\pi} v.p. \int_{-\infty}^\infty \int_{-\infty}^\infty g(y) \overline{\exp(it(y-x))} dy dt = \\ &= \frac{1}{2\pi} v.p. \int_{-\infty}^\infty \int_{-\infty}^\infty g(y) \exp(it(x-y)) dy dt \doteq \\ &\doteq \frac{1}{2\pi} v.p. \int_{-\infty}^\infty \int_{-\infty}^\infty f(y) \exp(-sy) \exp(it(x-y)) dy dt = \\ &= \frac{1}{2\pi} v.p. \int_{-\infty}^\infty \exp(itx) \int_{-\infty}^\infty f(y) \exp(-y(s+it)) dy dt \doteq \\ &\doteq \frac{1}{2\pi} v.p. \int_{-\infty}^\infty \exp(itx) \mathcal{L}(s+it) dt. \end{aligned}$$

Ebből

$$\begin{aligned} \frac{f(x+0) + f(x-0)}{2} &= \frac{1}{2\pi} v.p. \int_{-\infty}^\infty \exp((s+it)x) \mathcal{L}(s+it) dt = \\ &= \frac{1}{2\pi i} v.p. \int_{s-i\infty}^{s+i\infty} \exp(xz) \mathcal{L}(z) dz. \end{aligned}$$

□

Első ránézésre az integrálok a komplex síkban kell elvégezni, de valójában, némi számolással belátható, hogy valójában valós trigonometrikus integrálokról van szó:

Proposition 7 Ha az f függvények a nem negatív félegyenesre koncentrálódnak, akkor érvényesek a

$$\begin{aligned} \frac{f(u+0) + f(u-0)}{2} &= \frac{2 \exp(u \cdot s)}{\pi} \int_0^\infty \operatorname{Re} \mathcal{L}((s+it)) \cos(u \cdot t) dt = \\ &= \frac{-2 \exp(u \cdot s)}{\pi} \int_0^\infty \operatorname{Im} \mathcal{L}((s+it)) \sin(ut) dt \end{aligned}$$

egyenlőségek.

Bizonyítás: A Bromwich-formulában vonalmenti integrálok vannak, amit közönséges integrálokká kell alakítanunk. Definíció szerint

$$\int_\gamma f(z) dz = \int_a^b f(\gamma(t)) \gamma'(t) dt,$$

ahol γ az $[a, b]$ szakasszal van paraméterezve. Tehát

$$\begin{aligned} &\frac{1}{2\pi i} \lim_{T \nearrow \infty} \int_{s-iT}^{s+iT} \exp(u \cdot z) \mathcal{L}(z) dz = \\ &= \frac{1}{2\pi i} \lim_{T \nearrow \infty} \int_{-T}^T \exp(u \cdot (s+it)) \mathcal{L}((s+it)) i dt = \\ &= \frac{1}{2\pi} \lim_{T \nearrow \infty} \int_{-T}^T \exp(u \cdot (s+it)) \mathcal{L}((s+it)) dt = \\ &= \frac{\exp(us)}{2\pi} \lim_{T \nearrow \infty} \int_{-T}^T \exp(iut) \mathcal{L}((s+it)) dt. \end{aligned}$$

Az

$$\exp(iu) = \cos u + i \sin u.$$

definíciót felhasználva

$$\begin{aligned} \operatorname{Re} \mathcal{L}(s+it) &= \int_0^\infty \exp(-sv) \cos(tv) dF(v) \\ \operatorname{Im} \mathcal{L}(s+it) &= \int_0^\infty \exp(-sv) \sin(tv) dF(v). \end{aligned}$$

A trigonometrikus függvények páros és páratlan tulajdonságát felhasználva

$$\begin{aligned} \operatorname{Re} \mathcal{L}(s+it) &= \operatorname{Re} \mathcal{L}(s-it), \\ \operatorname{Im} \mathcal{L}(s+it) &= -\operatorname{Im} \mathcal{L}(s-it). \end{aligned}$$

Alább $t = -t$ „helyettesítést” végezve

$$\begin{aligned}
& \int_{-T}^T \exp(iut) \mathcal{L}((s+it)) dt = \\
&= \frac{1}{2} \left(\int_{-T}^T \exp(iut) \mathcal{L}((s+it)) dt + \int_{-T}^T \exp(iut) \mathcal{L}((s+it)) dt \right) = \\
&= \frac{1}{2} \left(\int_{-T}^T \exp(iut) \mathcal{L}((s+it)) dt + \int_{-T}^T \exp(-iut) \mathcal{L}((s-it)) dt \right) = \\
& \quad \frac{1}{2} \int_{-T}^T \exp(iut) \mathcal{L}((s+it)) dt + \\
& \quad + \frac{1}{2} \int_{-T}^T \exp(-iut) (\operatorname{Re} \mathcal{L}((s-it)) + i \operatorname{Im} \mathcal{L}((s-it))) dt = \\
& \quad = \frac{1}{2} \int_{-T}^T \exp(iut) \mathcal{L}((s+it)) dt + \\
& \quad + \frac{1}{2} \int_{-T}^T \exp(-iut) (\operatorname{Re} \mathcal{L}((s+it)) - i \operatorname{Im} \mathcal{L}((s+it))) dt = \\
& \quad = \int_{-T}^T \operatorname{Re} \mathcal{L}((s+it)) \frac{\exp(iut) + \exp(-iut)}{2} dt + \\
& \quad + i \int_{-T}^T \operatorname{Im} \mathcal{L}((s+it)) \frac{\exp(iut) - \exp(-iut)}{2} dt = \\
& \quad = \int_{-T}^T \operatorname{Re} \mathcal{L}((s+it)) \cos ut - \operatorname{Im} \mathcal{L}((s+it)) \sin ut dt.
\end{aligned}$$

A formulát beírva

$$\begin{aligned}
& \frac{f(u+0) + f(u-0)}{2} = \\
&= \frac{\exp(us)}{2\pi} \lim_{T \nearrow \infty} v.p. \int_{-T}^T \operatorname{Re} \mathcal{L}((s+it)) \cos ut - \operatorname{Im} \mathcal{L}((s+it)) \sin ut dt.
\end{aligned}$$

Vegyük észre, hogy

$$\begin{aligned}
\int_{-T}^0 \operatorname{Re} \mathcal{L}((s+it)) \cos(ut) dt &= \int_0^T \operatorname{Re} \mathcal{L}((s-it)) \cos(-ut) dt = \\
&= \int_0^T \operatorname{Re} \mathcal{L}((s+it)) \cos(ut) dt,
\end{aligned}$$

illetve

$$\begin{aligned}
\int_{-T}^0 \operatorname{Im} \mathcal{L}((s+it)) \sin(ut) dt &= \int_0^T \operatorname{Im} \mathcal{L}((s-it)) \sin(-ut) dt = \\
&= \int_0^T \operatorname{Re} \mathcal{L}((s+it)) \sin(ut) dt,
\end{aligned}$$

tehát az integrálok szimmetrikusak, így

$$\begin{aligned} & \frac{f(u+0) + f(u-0)}{2} = \\ & = \frac{\exp(us)}{\pi} \int_0^\infty \operatorname{Re} \mathcal{L}((s+it)) \cos(ut) - \operatorname{Im} \mathcal{L}((s+it)) \sin(ut) dt. \end{aligned}$$

Ha az u negatív, akkor az integrál értéke nulla, hiszen az f -ről feltettük, hogy nem negatív számokra koncentrálódik. Ha $u > 0$, akkor

$$\int_0^\infty \operatorname{Re} \mathcal{L}((s+it)) \cos(ut) dt + \int_0^\infty \operatorname{Im} \mathcal{L}((s+it)) \sin(ut) dt = 0,$$

ugyanis ha u helyébe $-u$ kerül, akkor az első kifejezés nem változik, a második pedig előjelet vált, vagyis

$$\begin{aligned} \int_0^\infty \operatorname{Re} \mathcal{L}((s+it)) \cos(ut) dt &= \int_0^\infty \operatorname{Re} \mathcal{L}((s+it)) \cos(-ut) dt \\ \int_0^\infty \operatorname{Im} \mathcal{L}((s+it)) \sin(ut) dt &= - \int_0^\infty \operatorname{Im} \mathcal{L}((s+it)) \sin(-ut) dt, \end{aligned}$$

amit összeadva és kihasználva, hogy negatív u értékek esetén az integrál értéke nulla kapjuk a kíván egyenlőséget. Ebből

$$\begin{aligned} \frac{f(u+0) + f(u-0)}{2} &= \frac{2 \exp(us)}{\pi} \int_0^\infty \operatorname{Re} \mathcal{L}((s+it)) \cos(ut) dt = \\ &= \frac{-2 \exp(us)}{\pi} \int_0^\infty \operatorname{Im} \mathcal{L}((s+it)) \sin(ut) dt. \end{aligned}$$

2.3 Az Euler-féle közelítő inverziós formula

Ez utóbbi valós improprius integrálok numerikus közelíthetőek. Mivel valós integrálokról van szó az integrálokat diszkrét összeggel közelítve kapjuk az úgynevezett Euler-féle közelítő inverziós formula levezetésének első lépését. [1], [2], [3]. Legyen h egy diszkrétizáló konstans, és osszuk fel a $[0, \infty)$ félegyenest kh , $k = 0, 1, 2, \dots$ osztópontokkal és a t szerinti integrált helyettesítsük a

$$\begin{aligned} & \frac{2 \exp(u \cdot s)}{\pi} \sum_{k=0}^{\infty} \operatorname{Re} \mathcal{L}((s+ikh)) \cos(u \cdot kh) h \doteq \\ & \doteq \sum_{k=0}^{\infty} f(kh) h \end{aligned}$$

összeggel. Valamivel jobb eredményt kapunk, ha az integrált nem a téglalapokkal, hanem a megfelelő trapézokkal közelítjük. Ilyenkor a

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{f(kh) + f((k+1)h)}{2} h$$

szabállyal élünk. Mivel az összegben az első tag kivételével minden tag kétszer szerepel, valójában a

$$\frac{f(0)}{2}h + \sum_{k=1}^{\infty} f(kh)h$$

közelítő összegről van szó. Vagyis valamivel jobb közelítést kapunk, ha inkább az

$$\frac{\exp(u \cdot s)}{2\pi} \operatorname{Re} \mathcal{L}((s))h + \frac{\exp(u \cdot s)}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \operatorname{Re} \mathcal{L}((s + ikh)) \cos(u \cdot kh)h$$

közelítést tekintjük. Vegyük észre, hogy az összeg első tagjában a valós rész vétele felesleges, de az összeg minden további tagjában a kiterjesztett, komplex Laplace-transzformált valós részét kell kiszámolni. Az összeg kiszámolásához vezessük be a

$$h = \frac{\pi}{u}, s = \frac{A}{2u}$$

paramétereket. Vegyük észre, hogy ezzel a h értékét rögzítettük és az s paraméter helyett az A paramétert vezettük be. Alább látni fogjuk, hogy a h lépésköz rögzítése nem befolyásolja a formula pontosságát amennyiben az A elég nagy. Érdeemes hangsúlyozni, hogy az idáig bemutatott gondolatmenetben az s értékét semmiképpen nem adtuk meg. A h alkalmas megválasztásának oka a következő: Ha beírjuk a fenti képletbe a h és az s értékét, akkor az

$$\frac{\exp\left(\frac{A}{2}\right)}{2u} \mathcal{L}\left(\frac{A}{2u}\right) + \frac{\exp\left(\frac{A}{2}\right)}{u} \sum_{k=1}^{\infty} \operatorname{Re} \mathcal{L}\left(\left(\frac{A}{2u} + i \frac{k\pi}{u}\right)\right) \cos(k\pi).$$

kifejezéshez jutunk. Vegyük észre, hogy trigonometrikus tag a h megfelelő megválasztása miatt $\cos(k\pi)$ lesz. A $\cos(k\pi)$ lehetséges értékei ± 1 , ezért a sor

$$\frac{\exp\left(\frac{A}{2}\right)}{2u} \mathcal{L}\left(\frac{A}{2u}\right) + \frac{\exp\left(\frac{A}{2}\right)}{u} \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \operatorname{Re} \mathcal{L}\left(\left(\frac{A}{2u} + i \frac{k\pi}{u}\right)\right).$$

alakba írható. Átrendezve

$$\frac{\exp\left(\frac{A}{2}\right)}{u} \left(\frac{1}{2} \operatorname{Re} \mathcal{L}\left(\frac{A}{2u}\right) + \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \operatorname{Re} \mathcal{L}\left(\left(\frac{A}{2u} + i \frac{2k\pi}{2u}\right)\right) \right)$$

Jelölje $s_n(u)$ a végtelen összeg közelítő összegét. Ha az összegben szereplő

$$a_k(u) \doteq \operatorname{Re} \mathcal{L}\left(\left(\frac{A}{2u} + i \frac{2k\pi}{2u}\right)\right)$$

kifejezés előjele, legalábbis nagy k esetén fix, akkor egy alternáló tagokból álló $s_n(u)$ összegről van szó. Alternáló összegek esetén a konvergencia gyorsítására célszerű valamilyen összegzési technikát használni. Az összegzési technika

lényege, hogy a sor lassú konvergenciáját biztosító alternáló tagoknak valamilyen középértékét vesszük, így biztosítjuk a kilengések csökkenését, vagyis a konvergencia felgyorsítását. Az inverziós módszer nevét adó Euler-féle összegzési technikát használva legyen a közelítő összeg gyorsítása

$$E_{mn}(u) = \frac{1}{2^m} \sum_{k=0}^m \binom{m}{k} s_{n+k}(u),$$

ahol $s_n(u)$ az fenti eredeti végtelen összeg legfeljebb n -ig vett részletösszege. Vagyis az Euler-féle összegzési eljárás során ki kell számolni az n és $n+m$ közötti $m+1$ elem „binomiális” közepét. Vegyük észre, hogy $\sum_{k=0}^m \binom{m}{k} = 2^m$, amiből könnyen látható, hogy ez

$$E_{mn}(u) = s_n + \frac{1}{2^m} \sum_{k=1}^m \binom{m}{k} a_{n+1} + \frac{1}{2^m} \sum_{k=2}^m \binom{m}{k} a_{n+2} \dots$$

Ha bevezetjük a w_k

$$\frac{1}{2}, 1, \dots, 1, \frac{1}{2^m} \sum_{k=1}^m \binom{m}{k}, \frac{1}{2^m} \sum_{k=2}^m \binom{m}{k}, \dots, \frac{1}{2^m} \sum_{k=m-1}^m \binom{m}{k}, \frac{1}{2^m}$$

súlyokat, akkor az inverz Laplace-transzformáltra az

$$E_{mn}(u) = \sum_{k=0}^{n+m} w_k a_k(u)$$

skaláris szorzatot kapjuk. Hangsúlyozni kell, hogy a w súlyokat csak egyszer kell kiszámolni és az értékük független az u -tól, ahol az inverziós képletet ki kell számolni. Így az inverziós képlet meghatározásához egyedül a komplex Laplace-transzformáció értékét kell $m+n$ helyen kiszámolni. Természetesen az így kapott összeget még be kell szorozni az $\exp\left(\frac{A}{2}\right)/2u$ értékkel, amely A esetén problémát jelenthet és a közelítő formula egyik lehetséges hibaforrását eredményezheti.

2.4 Az Euler-féle közelítő formula hibája

A közelítő inverziós formula kiszámolásakor három fajta hibát követünk el. Egyrészt a végtelen integrál diszkrétizálásakor, másrészt a végtelen összegnek az Euler-formulával való véges közelítésekor. A harmadik hibát akkor követjük el, amikor a közelítő formulában kiszámoljuk az egyes függvények értékét, illetve evvel összefüggésben beszorzunk az $\exp(A/2)$ kifejezéssel. A numerikus inverziós formula használatakor ezt a hármat kell együtt tekinteni. Miként alább ismertetjük, reguláris¹⁴ esetekben a diszkrétizálásból származó e_h hiba értéke „zárt” alakban felírható.

$$e_h(u) = \sum_{k=1}^{\infty} f\left(u + \frac{2\pi k}{h}\right) \exp\left(-\frac{2\pi k s}{h}\right),$$

¹⁴Hogy mit értünk reguláris eset alatt az alábbi gondolatmenetből kiderül.

ahol s a Bromwich-formulában, h pedig a diszkretizálásnál használt konstans. Az alkalmazások legtöbbször feltehető, hogy az f korlátos. Vagy azért, mert az f sűrűségfüggvény korlátos, vagy a formulát közvetlenül az eloszlásfüggvényre alkalmazzuk. Ilyenkor

$$|e_h(u)| \leq C \sum_{k=1}^{\infty} \exp\left(-\frac{2\pi ks}{h}\right) = C \frac{\exp\left(-\frac{2\pi s}{h}\right)}{1 - \exp\left(-\frac{2\pi s}{h}\right)}$$

Világos, hogy a h csökkentésével, fix s esetén, a közelítés pontossága, az elvárásoknak megfelelően, nő és $h \searrow 0$ esetén nullához tart. Azonban nem ez az egyetlen módszer a pontosság javítására. A képlet alapján a közelítés hibája akkor is csökkenthető, ha az s nő. Ha $s \nearrow \infty$, akkor a hiba szintén nullához tart. Természetesen a Bromwich-formula minden $s > 0$ esetén érvényes. Vagyis miként láttuk lehetőségünk van a h értékét úgy megválasztani, hogy a közelítő összegben a $\cos(u \cdot kh)$ értéke egyszerű, ± 1 , legyen. Az így fixált $h = \frac{\pi}{u}$ esetén

$$\begin{aligned} \exp\left(-\frac{2\pi s}{h}\right) &= \exp\left(-\frac{2\pi s}{\pi/u}\right) = \exp(-2su) = \\ &= \exp(-A). \end{aligned}$$

Ebből következően az A konstans és ezen keresztül $s = \frac{A}{2u}$ értéket nagynak téve a közelítés hibája elvileg szintén tetszőlegesen kicsire csökkenthető. Ugyanakkor az A növelése növeli a képletben szereplő $\exp\left(\frac{A}{2}\right)$ kiszámolásának numerikus hibáját. Összességében az A értékét célszerű viszonylag közepesnek hagyni. Az irodalomban különböző $15 < A < 30$ közötti javaslatokkal lehet találkozni.

Végezetül térjünk rá a hibaképlet indoklására. Tekintsük az eredeti f függvényt és legyen $g(x) \doteq \exp(-sx) f(x)$. Ezt követően vezessük be a

$$g_p(x) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} g\left(x + \frac{2\pi k}{h}\right)$$

függvényt. Természetesen semmi sem garantálja, hogy a g_p létezik, de mivel az inverziót általában valamilyen eloszlásfüggvényre szokás használni feltehetjük, hogy az f korlátos. Mivel az $f(x) = 0$, ha $x < 0$, ezért ilyenkor a sor konvergens. A g_p függvény periódikus és a periódusa éppen $2\pi/h$. Írjuk fel a Fourier-sor reprezentációját

$$g_p(x) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k \exp\left(\frac{i2\pi kx}{P}\right) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k \exp\left(\frac{i2\pi kx}{2\pi/h}\right) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k \exp(ikhx),$$

ahol

$$\begin{aligned} c_k &= \frac{1}{P} \int_{-P/2}^{P/2} g_p(x) \exp\left(-i\frac{2\pi xk}{p}\right) dx = \\ &= \frac{h}{2\pi} \int_{-\pi/h}^{\pi/h} g_p(x) \exp(-ikhx) dx. \end{aligned}$$

Természetesen ismét semmi sem garantálja a Fourier-sor konvergenciáját, de feltesszük, hogy ilyen probléma nincs. A g_p definícióját behelyettesítve

$$\begin{aligned}
c_k &= \frac{h}{2\pi} \int_{-\pi/h}^{\pi/h} \sum_{k=-\infty}^{\infty} g\left(x + \frac{2\pi k}{h}\right) \exp(-ikhx) dx = \\
&= \frac{h}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} g(x) \exp(-ikhx) dx = \\
&= \frac{h}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \exp(-sx) f(x) \exp(-ikhx) dx = \\
&= \frac{h}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \exp(-(s+ikh)x) dx = \frac{h}{2\pi} \mathcal{L}(s+ikh).
\end{aligned}$$

Ebből tehát

$$\begin{aligned}
\sum_{k=-\infty}^{\infty} f\left(x + \frac{2\pi k}{h}\right) \exp\left(-s\left(x + \frac{2\pi k}{h}\right)\right) &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} g\left(x + \frac{2\pi k}{h}\right) = \\
&= g_p(x) = \frac{h}{2\pi} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \mathcal{L}(s+ikh) \exp(ikhx).
\end{aligned}$$

Ha most vesszük a $k=0$ tagot, akkor átrendezve

$$\begin{aligned}
f(x) \exp(-sx) &= \frac{h}{2\pi} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \mathcal{L}(s+ikh) \exp(ikhx) - \\
&\quad - \sum_{k \neq 0} f\left(x + \frac{2\pi k}{h}\right) \exp\left(-s\left(x + \frac{2\pi k}{h}\right)\right).
\end{aligned}$$

Átszorozva

$$\begin{aligned}
f(x) &= \frac{h}{2\pi} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \mathcal{L}(s+ikh) \exp((s+ikh)x) - \\
&\quad - \sum_{k \neq 0} f\left(x + \frac{2\pi k}{h}\right) \exp\left(-\frac{2s\pi k}{h}\right).
\end{aligned}$$

Vegyük most észre, hogy az első tag éppen az

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \mathcal{L}(s+it) \exp((s+it)x) dt$$

közelítő összege, így a közelítés hibája éppen, miként állítottuk

$$\sum_{k \neq 0} f\left(x + \frac{2\pi k}{h}\right) \exp\left(-\frac{2s\pi k}{h}\right)$$

3 Az inverziós formula tesztelése Matlabban

Az így kapott Euler-algoritmus¹⁵ könnyen programozható és szinte az összes programozási környezetben egyszerűen megvalósítható. Mi az egyszerűség kedvéért a Matlabban való tesztelést választottuk. A Matlab hivatalos oldalán megtalálható az Euler-algoritmus egy megvalósítása, és a tesztelések során ebből a verzióból indultunk ki. A tesztelés első lépésében néhány elemi függvény zárt alakban ismert Laplace-transzformáltja alapján visszaszámoltuk a függvényeket¹⁶. Csak azokat az eseteket használtuk, ahol mind a Laplace-transzformált, mind a függvény explicite módon ismert és könnyen számolható. Nyilvánvaló módon a számolás hatékonysága elsősorban az A paraméter értékétől függ. Minnél nagyobbra vesszük az A értékét, annál kisebb lesz az integrál diszkretizációs hibája, de annál nagyobb lesz a képletben szereplő exponenciális függvények kiszámolási hibája. Nyilvánvalóan célszerű ellenőrizni, hogy miként kell az A paraméter értékét beállítani. Az irodalomban [1], [2], [3] található néhány A érték esetében a következőket találtuk:

1. Ha az A értékét 25,3-nek vettük, akkor a közelítés hibája 10^{-11} nagyságrendű volt.
2. Ha az A értékét 18,3-nek vettük, akkor a közelítés hibája 10^{-9} nagyságrendű volt.
3. Ha az A értékét 50-nek vettük, akkor a közelítés hibája 10^{-6} nagyságrendűre eset vissza.
4. Ha az A értékét 100-nak vettük, akkor a közelítések megszűntek megfelelőnek lenni.
5. Ha az A közvetlen kontrolálása helyett a Matlab által adott eredeti függvényt futtattuk, akkor a közelítés hibája 10^{-6} nagyságrendben alakult.

Az alábbi számolások során az $A = 25,3$ értéket vettük.

Következő lépésben az algoritmus általános tesztelését próbáltuk elvégezni. Az inverz Laplace-transzformációra épülő módszer akkor használható egyszerűen, ha zárt alakban könnyen felírható az eloszlás Laplace-transzformáltja. A legtöbb ismert eloszlás Laplace-transzformáltja nem egyszerűen írható fel, ami nyilvánvalóan korlátozza a módszer használatát. A következőkben néhány számolási eredmény ismertetünk.

1. A valószínűségszámítás egyik legkedveltebb eloszlása a gamma eloszlás, amely momentumgeneráló függvénye egyszerű zárt képlettel felírható. Emlékeztetünk, hogy egy $\xi \geq 0$ valószínűségi változót gamma eloszlásúnak mondunk, ha a sűrűségfüggvénye

$$f(x) = \frac{x^{\alpha-1} \lambda^\alpha}{\Gamma(\alpha)} \exp(-\lambda x)$$

¹⁵Érdemes hangsúlyozni, hogy Eulernek természetesen semmi köze az algoritmushoz. Az algoritmus az Euler által használt az összegzési eljárás miatt kapta ezt az igen klasszikus és stílusos nevet.

¹⁶Trigonometrikus és exponenciális függvények esetén.

alakú. Ebből elemi számolással a Laplace-transzformált

$$L(s) = \frac{1}{(1 + s/\lambda)^\alpha}.$$

A Matlab `gamcdf` függvénye és az inverz Laplace-transzformációs algoritmus segítségével, 32 osztópontot használva 3000 pontban kiszámolva az eloszlásfüggvényt a két kiszámolt függvény eltérése $1,1 \cdot 10^{-11}$ nagyságrendben alakult, ami nyilvánvalóan nagyon jó közelítés. Ugyanakkor a 3000 pont kiszámoláshoz szükséges idő szempontjából a Matlab saját algoritmusát körülbelül 800-szor gyorsabbnak bizonyult. A Laplace-transzformációs eljárás előnye azonban elsősorban akkor érvényesül, ha több különböző paraméterű gamma eloszlás összegének eloszlásfüggvényét akarjuk kiszámolni. A Laplace-transzformált képletéből és abból, hogy független változók összegének a Laplace-transzformáltja összeszorozódik világos, hogy ha két eloszlás λ paramétere azonos, de az α paramétere különböző, akkor az összeg $\Gamma(\alpha_1 + \alpha_2, \lambda)$ paraméterű lesz, ugyanis ilyenkor

$$L_1(s) L_2(s) = \frac{1}{(1 + s/\lambda)^{\alpha_1 + \alpha_2}}.$$

Ugyanakkor különböző a paraméterű gamma eloszlások összege nem lesz gamma eloszlású, de az inverz Laplace-transzformált segítségével könnyen kiszámolható. Példaképpen három különböző paraméterű gamma eloszlás összegének eloszlásfüggvényét 4000 pontban körülbelül 1 másodperc alatt lehet kiszámolni. Természetesen ez a Matlab általános sebességét figyelembe véve nem túl jó eredmény¹⁷, de mivel a Matlab semmilyen alternatívát nem kínál, úgymond a lehetőségekhez képest elfogadható. Hasonlóan könnyen kezelhető, a kevert gamma eloszlások esete. Akár a Poisson-eloszlással, akár a negatív binomiállissal kevert eloszlások esetén az együttes eloszlásfüggvény könnyen előállítható. Például a Poisson eloszlással kevert gamma eloszlások Laplace-transzformáltja

$$L(s) = \exp\left(\frac{\lambda}{(1 + s/\mu)} 1/(1 + s/\mu)^\alpha - 1\right)/s$$

Ismételten az eloszlásfüggvény 3000 pontban való kiszámolása kevesebb mint egy másodpercbe került. Általában, nem túl meglepő módon a számolási igény a kiszámolandó pontok darabszámának lineáris függvénye. Hasonló igaz az osztópontok számának növelésére, vagyis ha a diszkrétizált összegben megduplázzuk a tagokat, akkor a számolás is kétszer olyan lassú lesz.

2. A nem negatív számokra koncentrálódó eloszlások másik csoportja, amikor a Laplace-transzformált könnyen számolható a stabil eloszlások halmaza. Miként ismert ha $0 < \alpha < 1$, akkor az $L(s) = \exp(-s^\alpha)$ egy a nem negatív számokra koncentrálódó α -stabil eloszláshoz tartozó Laplace-transzformált. Az eloszláscsalád legismertebb tagja az $\alpha = 0,5$ -hez tartozó úgynevezett Lévy-eloszlás. A

¹⁷Ez alatt az idő alatt a Matlab le tud invertálni egy 2500x2500 mátrixot. Ugyanakkor persze az összehasonlítás nem teljesen fair, ugyanis a mátrix invertálás feladata a Matlabban kitüntetett probléma és a gamma eloszlások összegének eloszlásfüggvényére a Matlab semmilyen javaslatot sem tesz.

Lévy-eloszlás a valószínűségszámítás egyik alapeloszlása és egyike¹⁸ azon három stabil eloszlásnak amely eloszlásfüggvénye zárt képlettel megadható.

$$F(x) = 1 - \operatorname{erf}\left(\sqrt{\frac{1}{4t}}\right),$$

ahol

$$\operatorname{erf}(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x \exp(-t^2) dt.$$

A Lévy-eloszlás eloszlásfüggvényét közvetlenül kiszámolva, illetve az $L(s) = \exp(-\sqrt{s})$ Laplace-transzformált inverzét számolva a két eloszlásfüggvény maximális eltérése $3 \cdot 10^{-11}$ lesz, vagyis a két módszer eredménye igen közeli. Ha a két számítást nagy x értékekre számoltuk, akkor a közelítés minimális módon romlott $3,8 \cdot 10^{-11}$ nagyságrendre. Ugyanakkor az inverz Laplace-transzformációs módszer körülbelül 7000-szer lassabb és az eloszlásfüggvény 4000 pontban való kiszámolása 1,2 másodpercig tart. Természetesen mivel a többi α esetén az eloszlásfüggvény zárt alakban nem ismert a számolás egyéb α paraméterek esetén nem ellenőrizhető közvetlenül. Ami persze azt is jelenti, hogy ilyenkor kénytelenek vagyunk az inverz Laplace-transzformációra hagyatkozni. Nem beszélve természetesen arról, hogy sem az eloszlások keverése sem összege esetén a Matlab függvénykészlete nem ad semmilyen lehetőséget sem.

3. Az invertálási módszer további teszteléseként tekintjük az általánosított inverz normális eloszlást. A valószínűségszámítási és a pénzügyi irodalomban az eloszlás szokásos jele $GIG(\gamma, \beta, \alpha)$. Az eloszlás népszerűségének oka, hogy bizonyos speciális paraméterek esetén a gamma elosztást adja vissza, illetve részben tartalmazza az inverz normális eloszlást, amely speciális esete az előző pontban tárgyalt stabil eloszlásoknak. Mivel szemben a gammával, ahol csak két paraméter van három paraméterrel rendelkező eloszláscsaládról van szó, nem túl meglepő módon sokszor használható valós adatok közelítésre. Az eloszlás sűrűségfüggvénye ismert

$$f(x) = \frac{(\alpha/\beta)^{\gamma/2}}{2K_\gamma(\sqrt{2\alpha\beta})} x^{\gamma-1} \exp\left(-\frac{\alpha x + \beta x^{-1}}{2}\right).$$

A képletben szereplő K_γ függvény a másodfajú módosított Bessel-függvény. A mi szempontunkból az eloszlás igen kedvező tulajdonsága, hogy a Laplace-transzformáltja viszonylag egyszerű alakba írható:

$$L(s) = \frac{K_\gamma(\sqrt{(\alpha+2s)\beta})}{K_\gamma(\sqrt{\alpha\beta})} \left(\frac{\alpha}{\alpha+2s}\right)^{\gamma/2}$$

¹⁸A másik kettő, a normális eloszlás, illetve a Cauchy-eloszlás esetén az eloszlás tartója a teljes számegyenes így ezekre az Euler-algoritmus nem használható, következésképpen a Lévy-eloszlás az egyetlen olyan stabil eloszlás, amelyre az algoritmus hatékonysága könnyen tesztelhető.

A képletekben szereplő $K_\gamma(z)$ függvény neve a Matlabban `besselk`(γ, z). Az első argumentum értelemszerűen a paraméter a második a komplex argumentum. A függvény igen gyorsan számolható. Komplex argumentummal rendelkező pontokban a kiszámolása körülbelül megegyezik a valós trigonometrikus függvények kiszámolásához szükséges idő kétszeresével. A sűrűségfüggvény közvetlen kiszámolása és az inverz Laplace-transzformálton keresztül való meghatározása ismételtelen igen közeli értéket eredményez. A két érték eltérése $2 \cdot 10^{-12}$ nagyságrendben alakult, miközben a számoláshoz szükséges idők a korábban látottakhoz képest is igen rosszak, körülbelül 20000-szer lassabb az inverz Laplace-transzformáció mint a közvetlen kiszámolás. Ugyanakkor persze az inverz Laplace-transzformációval az eloszlásfüggvény közvetlenül is számolható, az eloszlásfüggvény azonban csak a sűrűségfüggvények numerikus integrálásával számolható ki.

4. További példaként tekintsük az inverz gamma eloszlást, amely a gamma eloszlású valószínűségi változók reciprokanak eloszlása. Az inverz gamma eloszlás sűrűségfüggvénye

$$f(x) = \frac{\lambda^a}{\Gamma(a)} x^{-a-1} \exp\left(-\frac{\lambda}{x}\right).$$

Az eloszlás Laplace transzformáltja

$$L(s) = \frac{2(\lambda s)^{a/2}}{\Gamma(a)} K_a\left(\sqrt{4\lambda s}\right).$$

Az $F(x) = \mathbf{P}(\xi < x) = \mathbf{P}(1/\xi > 1/x) = 1 - G(1/x)$ segítségével az inverz gamma eloszlás eloszlásfüggvénye egyszerűen számolható a gamma eloszlás eloszlásfüggvényéből. A sűrűségfüggvények szintjén két féle kiszámolási mód eltérése $6 \cdot 10^{-12}$ nagyságrendben alakult, a számolás sebessége ismételtelen körülbelül 8000-szer lassabb az inverz Laplace-transzformált esetén mint a közvetlen kiszámolással. Az eloszlásfüggvények szintjén az eltérés 10^{-11} nagyságrendben alakult, a sebességek pedig körülbelül 600-szor lassabb az inverz Laplace-transzformált mint a közvetlen a `gamcdf` függvényre épülő számolás.

5. Végezetül érdemes megvizsgálni a lognormális eloszlás esetét. A lognormális eloszlás annak ellenére, hogy az egyik alapeloszlása a valószínűség számításnak és a pénzügyi matematikai irodalomnak némiképpen kilóg az itt bemutatott sémából, ugyanis a Laplace-transzformáltja nem írható fel egyszerű alakban. Ugyanakkor számos közelítő formula ismert. Ezek közül is a leggyakrabban használt az úgynevezett Lambert-féle W függvényre épül, amely Matlab verziója a `lambertw`(x). A Lambert W segítségével a lognormális eloszlás Laplace-transzformáltja a

$$L(s) \approx \frac{\exp\left(-\frac{W^2(s\sigma^2 \exp(\mu)) + 2W(s\sigma^2 \exp(\mu))}{2\sigma^2}\right)}{\sqrt{1 + W(s\sigma^2 \exp(\mu))}}$$

formulával közelíthető. Az egyszerűbb jelölés céljából csak a $\mu = 0, \sigma = 1$ esetre koncentrálna

$$L(s) = \frac{\exp\left(-\frac{(W(s)+1)^2-1}{2}\right)}{\sqrt{1+W(s)}}.$$

A futási idők szintén drámailag alakulnak. Most az inverziós módszer 80000-szer lassabb, ugyanakkor a számítások hibája sajnálatosan 10^{-3} körül alakul. Vagyis a lognormális esetben a korábbiakhoz képest a módszer jelentősen rosszabbul teljesít.

4 Összefoglalás

A kockázatkezelés, így speciálisan az optimális likviditási szint meghatározása matematikailag összetett eloszlások inverzeloszfüggvényeinek kiszámolására vezethető vissza. A valószínűségszámítási irodalomban gyakran találkozhatunk avval, hogy egy eloszlás csak indirect módon az eloszlásfüggvénye helyett a Laplace-transzformáltjával adott. A Laplace-transzformáció invertálása kapcsán gyakran szokás hangsúlyozni, hogy a transzformáció rosszul kondicionált, vagyis kvalitatíve nagyon különböző függvények Laplace-transzformáltja nagyon közeli lehet, így a numerikus számítások során fellépő hibák összegződhetnek és igen hibás eredményre vezethetnek. A dolgozat legfőbb üzenete az, hogy amennyiben a valószínűségi változók eloszlása a nem negatív számokra koncentrálódik, és az Euler-algoritmust használjuk, akkor az instabilitás jelensége mintha nem lenne tapasztalható. Az idevágó irodalomban szokás hivatkozni arra, hogy a számításokat nagy pontossággal kell elvégezni és ezért például a Matlab esetén érdemes a szimbolikus programcsomagot használni, amely a lebegőpontos aritmetika helyett a fix tizedes pontosságot garantáló számolási módszereket használ. A nagyobb pontosság ára természetesen a nagyobb futási idő, és nyilván a drágább szoftver. A dolgozat kapcsán végzett számítások ezt nem erősítik meg. Az alapesetnek tekinthető lebegőpontos számítások általában a több mint elegendő 10^{-10} pontosak. Ami igaz, hogy az eljárás a lebegőpontos aritmetika ellenére, még így is relatíve igen lassú. Ugyanakkor a jelenlegi számítógépes számítási sebességek mellett a számítások ideje néhány másodperc nagyságrendűek, ami gyakorlati szempontból semmilyen megszorítást nem jelent. A lognormális esettől eltekintve, ahol néhány percig tart a számolás a többi eloszlás esetén a számolási idők teljesen elfogadhatóak. A számolások hatékony és végletekig optimalizált programozás esetén csökkenthetőek, ugyanis a Matlabban végzett számolás időigénye jórészt abból származik, hogy a valós függvények komplex tartományban való kiszámolása a vártnál jóval időigényesebb. Maga az inverz Laplace-transzformáció kiszámítása egy fix együtthatóvektorral való skaláris szorzat kiszámolását jelenti, és a tényleges számolási idő a Laplace-transzformált komplex tengellyel párhuzamos egyenes mentén való kiértékeléséből származik. A módszer kétségtelen korlátozása abból ered, hogy csak akkor használható hatékonyan, amikor a Laplace-transzformált a komplex számsíkban pontosan és gyorsan számolható. További korlátot jelent, hogy a

módszer csak nem negatív tartójú változók esetében működik. Így aztán például kevert normális eloszlások esetében nem használható. Ezen megszorítások mellett azonban az inverz Laplace-transzformációs módszer egy igen hatékony, egyszerű és könnyen használható eljárás.

References

- [1] Abate J., White W. „Numerical Inversion of Laplace Transforms of Probability Distributions”, *ORSA Journal of Computing*, vol 1, No 1. (1995).36-43.
- [2] Abate, Joseph, and Ward Whitt. „A Unified Framework for Numerically Inverting Laplace Transforms" *INFORMS Journal of Computing*, vol. 18.4 (2006): 408-421
- [3] Abate J., Valkó., P.P. „Multi-precision Laplace transform inversion", *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, vol 60, No. 5, (2004) 979-993.
- [4] Bensoussan, A. „Dynamic Programming and Inventory Control”, *Studies in Probability, Optimization and Statistics*, vol 3. IOS Press BV, 2011
- [5] Cohan, A, M, „Numerical Methods for Laplace Transform Inversion”, *Numerical Methods and Algorithms*, vol 5, Springer, 2007
- [6] Durbin J. „Numerical Inversion of Laplace Transforms: An Efficient Improvement to Dubner and Abate’s Method”, *The Computer Journal* vol 17, No. 4. (1974) 371-376
- [7] McNeil A.J., Frey, R. Embrecht P. „Quantitative Risk Management", *Princeton Series in Finance*, Princeton University Press, 2005
- [8] Yor M, „On Exponential Functionals of Brownian Motion and Related Processes.", *Springer Finance Lecture Notes*, Springer, 2001