Lévy-folyamatok

Néhány közismert állítás

Medvegyev Péter

2012

Lévy–Hincsin formula

A X folyamat Lévy-folyamat, ha

Definition

1. $X(0) = 0$,
2. az X független és stacionárius növekményű, és
3. a trajektóriák jobbról regulárisak, vagyis jobbról folytonosak, és minden időpontban van bal oldali határértékük.

Ha X Lévy-folyamat, akkor az $X(1)$ eloszlása korlátlanul osztható, ugyanis

$$X(1) = \sum_{k=1}^{n} \left(X\left(\frac{k}{n}\right) - X\left(\frac{k-1}{n}\right)\right)$$

és az $X(k/n) - X((k-1)/n)$ változók függetlenek és azonos eloszlásúak. És megfordítva minden korlátlanul osztható eloszláshoz van olyan Lévy-folyamat, ahol az $X(1)$ eloszlása éppen az adott eloszlás.

Lévy–Hincsin formula

Theorem

Az $\mathbb{R}$-en értelmezett F eloszlás pontosan akkor korlátlanul osztható, ha létezik az $\mathbb{R}$-en olyan ν nem negatív, σ-véges mérték, hogy az F φ karakterisztikus függvénye

$$\varphi(u) = \exp\left(i\gamma u - \frac{\sigma^2 u^2}{2} + \int_{\mathbb{R}\setminus\{0\}} \left[\exp(iux) - 1 - \frac{iux}{1+x^2}\right] d\nu(x)\right)$$

módon írható. A (γ, σ, ν) hármast az F, illetve a hozzá tartozó Lévy-folyamat karakterisztikáinak hívjuk. Az $x/\left(1+x^2\right)$ helyébe írható például az $x\chi(|x|<1)$ csonkoló függvény is. Ilyenkor a γ más, de a σ és a ν nem változik.

Lévy–Hincsin formula

A ν spektrál mértékről egyedül a

$$\int_{\mathbb{R}\setminus\{0\}} \min\left(x^2, 1\right) d\nu\left(x\right) < \infty$$

tulajdonságot tudjuk, így a kitevőben levő integrál mindig létezik. A $x\chi\left(|x| < 1\right)$ csonkoló függvénnyel az exponenciális függvény sorfejtése alapján jól látszik, hogy az origó körül az integrál mindig konvergens, ugyanis ilyenkor a magfüggvény az origó körül

$$\exp\left(iux\right) - 1 - iux = \frac{\left(iux\right)^2}{2!} + \frac{\left(iux\right)^3}{3!} + \ldots = \left(iux\right)^2 O\left(1\right)$$

A végtelenben az integrál konvergál, mert az integrandus korlátos. Általában a gondot az origó körüli tartomány jelenti. Az origó körüli tartomány a sok kis ugrást írja le. (Nagy ugrás alatt egy fix, általában $c = 1$ nél nagyobb abszolút értékű ugrásokat értünk.)

Example

Szimmetrikus stabil eloszláson azokat az eloszlásokat értjük, amelyek karakterisztikus függvénye valamely $c > 0$ konstanssal

$$\varphi(u) = \exp\left(-c\,|u|^{\alpha}\right).0 < \alpha \leq 2.$$

Ilyenkor ha $0 < \alpha < 2$, akkor

$$\nu((x,\infty)) = \frac{d_1}{x^{\alpha}}, x > 0. \quad \nu((-\infty,x)) = \frac{d_2}{(-x)^{\alpha}}, x > 0.$$

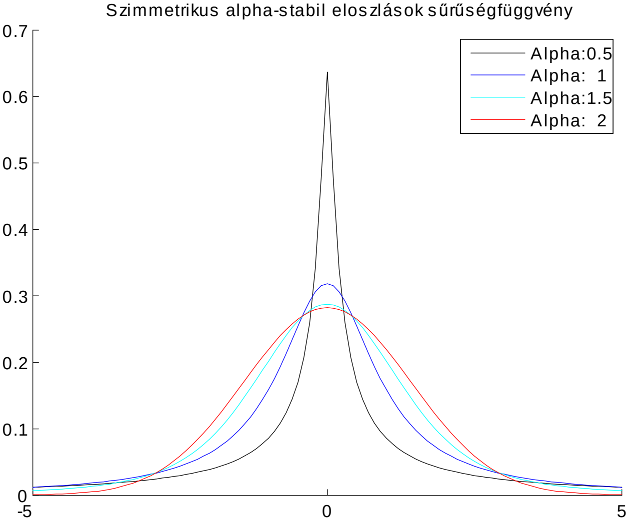
Mivel $\alpha < 2$, ezért

$$\int_0^1 x^2 d\nu(x) = \alpha \int_{0+}^1 x^2 \frac{1}{x^{\alpha+1}} dx = \alpha \int_{0+}^1 x^{1-\alpha} dx < \infty$$

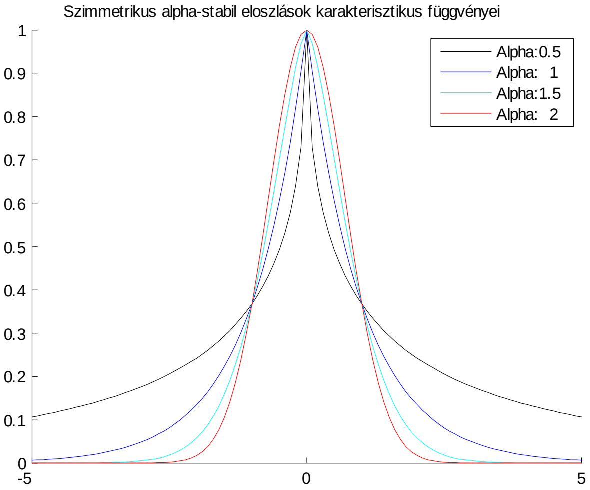
Mivel $\alpha > 0$

$$\int_1^{\infty} 1 d\nu(x) = \alpha \int_1^{\infty} x^{-(\alpha+1)} dx = \frac{\alpha}{\alpha+1}\left[x^{-\alpha}\right]_1^{\infty} < \infty.$$

Miért van a korrekciós tag?



Miért van a korrekciós tag?



Miért van a korrekciós tag?

Example

Variance gamma

$$N\left(\theta X, \sigma\sqrt{X}\right),$$

ahol

$$X = Gamma\left(\frac{1}{\nu}, \frac{1}{\nu}\right).$$

A spektrálmérték

$$\nu(dx) = \begin{cases} C\exp(M_1 x) \setminus (-x) & \text{ha} \quad x < 0 \\ C\exp(-M_2 x) \setminus x & \text{ha} \quad x > 0 \end{cases}.$$

Ilyenkor

$$\int_{0+}^{1} x d\nu(x) = \int_{0+}^{1} xC\exp(-M_2 x) \setminus x dx = \int_{0}^{1} C\exp(-M_2 x)\, dx < \infty.$$

Miért van a korrekciós tag?

Legyen Λ egy Borel-halmaz, $0 \notin \mathrm{cl}\,(\Lambda)$

$$\tau_1(\omega) \stackrel{\circ}{=} \inf\{t : \Delta X(t,\omega) \in \Lambda\}.$$

Mivel a trajektóriák jobbról regulárisak, és $0 \notin \mathrm{cl}\,(\Lambda)$, ezért $0 < \tau_1 \leq \infty$. Megmutatjuk, hogy a τ_1 eloszlásfüggvénye kielégíti a Cauchy-egyenletet. A Cauchy-egyenlet megoldásai, vagy az azonosan 0, vagy az azonosan 1, vagy egy alkalmas λ-val vett exponenciális függvény. Az azonosan 1 lehetelen, mert akkor $\tau_1 \equiv 0$. Az azonosan 0 a $\tau_1 \equiv \infty$ esetnek felel meg.

Miért van a korrekciós tag?

$$\begin{gathered}\mathbf{P}\left(\tau_1 > t_1 + t_2\right) = \\ = \mathbf{P}\left(\Delta X\left(u\right) \notin \Lambda,\ \ u \in \left(0, t_1 + t_2\right]\right) = \\ = \mathbf{P}\left(\Delta X\left(u\right) \notin \Lambda,\ \ u \in \left(0, t_1\right]\right) \cdot \mathbf{P}\left(\Delta X\left(u\right) \notin \Lambda,\ \ u \in \left(t_1, t_1 + t_2\right]\right) = \\ = \mathbf{P}\left(\Delta X\left(u\right) \notin \Lambda,\ \ u \in \left(0, t_1\right]\right) \cdot \mathbf{P}\left(\Delta X\left(u\right) \notin \Lambda,\ \ u \in \left(0, t_2\right]\right) = \\ = \mathbf{P}\left(\tau_1 > t_1\right) \cdot \mathbf{P}\left(\tau_1 > t_2\right).\end{gathered}$$

Miért van a korrekciós tag?

Az erős Markov-tulajdonság miatt az

$$X^{*}(t) \circeq X(\tau_1 + t) - X(\tau_1)$$

újraindított folyamat valószínűségszámítási szempontból azonos az eredetivel, és független az $\mathcal{F}_k$-tól. így a

$$\tau_2 \circeq \inf\left\{t : \Delta X^{*}(t) \in \Lambda\right\}$$

eloszlása azonos a τ_1-e és független tőle. Így a $\tau_k \equiv \infty$ esettől eltekitve a τ_k mindegyike exponenciális, így a $\sigma_k \circeq \sum_{l=1}^{k} \tau_k$ Poisson-folyamatot alkot:

$$N^{\Lambda}(t) \circeq \sum_{0<s\leq t} \chi_{\Lambda}(\Delta X(s)) = \sum_{n=1}^{\infty} \chi\left\{\sigma_n \leq t\right\}$$

Miért van a korrekciós tag?

A Poisson-folyamat karakterisztikus függvénye

$$\begin{aligned}\varphi_t(u) &= \mathbf{E}\left(\exp\left(uiN\left(t\right)\right)\right) = \sum_{n=0}^{\infty} \exp\left(iku\right) \frac{\left(\lambda t\right)^k}{k!} \exp\left(-\lambda t\right) = \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\left(\lambda t \exp\left(iu\right)\right)^k}{k!} \exp\left(-\lambda t\right) = \exp\left(\lambda t\left(\exp\left(iu\right) - 1\right)\right)\end{aligned}$$

Miért van a korrekciós tag?

Legyen

$$J^{\Lambda}(t,\omega) \doteq \sum_{0<s\leq t} \Delta X(s,\omega)\,\chi_{\Lambda}(\Delta X(s,\omega)) = \\ = \sum_{n=1}^{N^{\Lambda}(t)} \Delta X(\sigma_n) = \sum_{n=1}^{\infty} \Delta X(\sigma_n)\,\chi\{\sigma_n \leq t\}.$$

A szűrt ugrásokból álló összetett Poisson-folyamat, ugyanis belátható, hogy a $\Delta X(\sigma_n) \doteq X(\sigma_n) - X(\sigma_n-)$ független a σ_n-től.

$$\varphi_t(u) \doteq \mathbf{E}\left(\exp\left(iu \cdot J^{\Lambda}(t)\right)\right) = \exp\left(\lambda t\left(\int_{\mathbb{R}} (\exp(iux) - 1)\, dF(x)\right)\right),$$

ahol $F(x)$ az ugrások közös eloszlásfüggvénye.

Miért van a korrekciós tag?

A függetlenség miatt

:

$$
\begin{aligned}
\varphi_t(u) &= \sum_{n=0}^{\infty} \mathbf{E}\left(\exp\left(iu\cdot\sum_{k=1}^{n}\Delta X(\sigma_k)\right)\right)\frac{(\lambda t)^n}{n!}\exp(-\lambda t) = \\
&= \sum_{n=0}^{\infty}\left(\int_{\mathbb{R}}\exp(iux)\,dF(x)\right)^n\frac{(\lambda t)^n}{n!}\exp(-\lambda t) = \\
&= \exp\left(\lambda t\left(\int_{\mathbb{R}}(\exp(iux)-1)\,dF(x)\right)\right).
\end{aligned}
$$

Miért van a korrekciós tag?

Lemma

Ha X Lévy-folyamat és $0 \notin \mathrm{cl}(\Lambda)$, akkor az $X - J^{\Lambda}$ és a J^{Λ} folyamatok függetlenek.

Ha most $\mathbb{R} \setminus \{0\} = \cup_n \Lambda_n$, akkor az X folyamat ugró része felbontható, J^{Λ_n} összetett Poisson-folyamatokra. Ugyanakkor ha ismerjük a J^{Λ_n} folyamatokat, miként lehet helyreállítani az X folyamat ugrásait? Kézenfekvő lenne, hogy $X^d = \sum_{n=1}^{\infty} J^{\Lambda_n}$, de nem világos, hogy az összeg milyen értelemben értendő, vagy egyáltalában értelmes-e, ugyanis folyamatok körében nincs topológia!!!

Miért van a korrekciós tag?

Ha a trajektóriák korlátos változásúak, akkor az összeg értelmes, hiszen mindegy, hogy milyen sorrendben adjuk össze az ugrásokat. Ilyenkor az ugró rész karakterisztikus függvénye

$$\varphi_t(u) = \prod_n \exp\left(\lambda_n t\left(\int_{\mathbb{R}} (\exp(iux) - 1)\, dF_n(x)\right)\right) =$$

$$= \exp\left(t \int_{\mathbb{R}} (\exp(iux) - 1)\, d\sum_n \lambda_n F_n(x)\right) =$$

$$= \exp\left(\int_{\mathbb{R}} (\exp(iux) - 1)\, d\nu_t(x)\right)$$

Miért van a korrekciós tag?

Ha azonban nem, akkor az összeadás értelmetlen. Itt jönnek be a martingálok, ugyanis ezek körében van topológia: Ha $M \in \mathcal{H}^2$ egy négyzetesen integrálható martingál, vagyis a második momentumok korlátosak, akkor a martingál egyenletesen integrálható és így azonosítható a $T = \infty$ határértékével ugyanis ilyenkor

$$M(t) = \mathbf{E}\left(M(\infty) \mid \mathcal{F}_s\right).$$

Következésképpen az alábbi normával a $\mathcal{H}^2$-martingálok Hilbert-teret alkotnak.

$$\|M\|_2 \overset{\circ}{=} \sqrt{\mathbf{E}\left(M^2(\infty)\right)}$$

Miért van a korrekciós tag?

Vezessük be a

$$\nu_t(\Lambda) \overset{\circ}{=} \mathbf{E}\left(N^{\Lambda}(t)\right)$$

mértéket. Ha $0 \notin \mathrm{cl}(\Lambda)$, akkor az $N^{\Lambda}(t)$ Poisson-eloszlású, így véges és a Poisson-folyamat elemi tulajdonságai miatt

$$\nu_t(\Lambda) = t\nu_1(\Lambda) \overset{\circ}{=} t\nu(\Lambda).$$

Ha a $0 \notin \mathrm{cl}(\Lambda)$ feltétel nem teljesül, akkor nem kapunk Poisson-folyamatot, de ekkor is definiálható a $\nu(\Lambda)$, ami persze lehet végtelen is.

Miért van a korrekciós tag?

Lemma

Ha $0 \notin \mathrm{cl}(\Lambda)$, *akkor az*

$$N^{\Lambda}(t) - \mathbf{E}\left(N^{\Lambda}(t)\right) = N^{\Lambda}(t) - t\nu(\Lambda)$$

kompenzált folyamat minden véges időhorizonton $\mathcal{H}^2$*-martingál, ugyanis a Poisson-eloszlás szórásnégyzete* $t\nu(\Lambda)$.

Miért van a korrekciós tag?

Lemma

Ha $0 \notin \mathrm{cl}(\Lambda)$ *és az ugrások nagyságának van várható értéke, akkor, mivel a* J^{Λ} *szintén Lévy-folyamat a*

$$J^{\Lambda}(t) - \mathbf{E}\left(J^{\Lambda}(t)\right)$$

martingál.

Lemma

A $J^{\Lambda}(t)$ *karakterisztikus függvénye*

$$\varphi_t(u) = \exp\left(t\left(\int_{\Lambda}(\exp(iux) - 1)\,d\nu(x)\right)\right),$$

vagyis $\nu(\Lambda \cap B) = \lambda F(B)$.

Miért van a korrekciós tag?

Emlékeztetünk, hogy $\nu(\Lambda \cap B)$ a $\Lambda \cap B$-be eső ugrások számának átlaga. Az egyenlőség alapján, ha $0 \notin \mathrm{cl}(\Lambda)$, akkor

$$\nu(\Lambda) = \lambda F(\Omega) = \lambda = \mathbf{E}\left(N^{\Lambda}(1)\right).$$

Az alábbi számításban kihasználjuk, hogy az ugrások és az ugrások helye független és az ugrások eloszlása azonos. (Ezek a tulajdonságok az erős Markov-tulajdonság következményei.)

Miért van a korrekciós tag?

$$\nu_t(\Lambda \cap B) \doteq \mathbf{E}\left(\sum_{s \le t} \chi_{B\cap\Lambda}(\Delta X(s))\right) =$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \mathbf{E}\left(\sum_{k=1}^{\infty} \chi_{B\cap\Lambda}(\Delta X(\sigma_k)) \mid n \text{ ugrás van}\right) \frac{(\lambda t)^n}{n!} \exp(-\lambda t) =$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \mathbf{E}\left(\sum_{k=1}^{n} \chi_{B\cap\Lambda}(\Delta X(\sigma_k))\right) \frac{(\lambda t)^n}{n!} \exp(-\lambda t) =$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{n} \mathbf{E}(\chi_{B\cap\Lambda}(\Delta X(\sigma_k))) \frac{(\lambda t)^n}{n!} \exp(-\lambda t) =$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} n\mathbf{P}(\Delta X(\tau_1) \in B \cap \Lambda) \frac{(\lambda t)^n}{n!} \exp(-\lambda t) =$$

$$= \mathbf{P}(\Delta X(\tau_1) \in B \cap \Lambda) \sum_{n=0}^{\infty} n \frac{(\lambda t)^n}{n!} \exp(-\lambda t) = \frac{F(B)\lambda t}{t} = F(B)\lambda.$$

A Terv

1. A nagy $\Lambda_0 \mathrel{\hat{=}} \{|x| > 1\}$ ugrásokat leválaszthatjuk.
2. A kis ugrásokat felbontjuk

$$\cup_{n=1}^{\infty} \Lambda_n = \cup_n \left\{ \frac{1}{n+1} < |x| \leq 1 \right\}$$

   Mivel az ugrás nagysága korlátos az J^{Λ_n} összetett Poisson-folyamatnak van szórása, ami korlátos, így a kompenzált folyamatok $\mathcal{H}^2$-ben vannak.
3. A maradék folytonos részről be kell látni, hogy Wiener-folyamat plusz egy lineáris trend.

Miért van a korrekciós tag?

Számoljuk ki a J^{Λ} kompenzátorát

$$\begin{aligned}\mathbf{E}\left(J^{\Lambda}(t)\right) &= \frac{1}{i}\frac{d}{du}\varphi_t(0) = \\ &= \frac{1}{i}\frac{d}{du}\exp\left(t\left(\int_{\Lambda}(\exp(iux)-1)\,d\nu(x)\right)\right)|_{u=0} = \\ &= \frac{1}{i}t\left(\int_{\Lambda} ixd\nu(x)\right) = t\int_{A} xd\nu(x)\end{aligned}$$

A kompenzált ugrás karakterisztikus függvénye

$$\varphi_t(u) = \exp\left(t\left(\int_{\Lambda}\exp(iux) - 1 - iuxd\nu(x)\right)\right).$$

Miért van a korrekciós tag?

Lemma

Legyen $\mu_t(\Lambda,\omega)$ a $[0,t]$ szakaszon a Λ-ba eső ugrások számát megadó véletlen mérték. Tetszőleges $f(x)$ Borel-mérhető függvény esetén

$$\mathbf{E}\left(\int_{\mathbb{R}} f(x)\,d\mu_t(x)\right) = \int_{\mathbb{R}} f(x)\,d\nu_t(x) = t\int_{\mathbb{R}} f(x)\,d\nu(x).$$

A szokásosok módon elég az állítást $f(x)=\chi_B(x)$ karakterisztikus függvényekre belátni.

$$\begin{aligned}\mathbf{E}\left(\int_{\mathbb{R}} f(x)\,d\mu_t(x)\right) &= \mathbf{E}\left(\int_B d\mu_t(x)\right) = \mathbf{E}(\mu_t(B)) = \\ &= \mathbf{E}\left(N^B(t)\right) \overset{\circ}{=} \nu_t(B) = \int_{\mathbb{R}} f(x)\,d\nu_t(x).\end{aligned}$$

Miért négyzetesen integrálhatóak a kis ugrások

Meg kell mutatni, hogy a kis ugrások esetén a négyzetek spektrál mértéke véges. A kis ugrások M összege $\mathcal{H}^2$-martingál, hiszen ilyen értelemben adtuk az ugrásokat össze. Martingálok trajektóriái nem korlátos változásuak, de a kvadratikus variáció véges. A $\mathcal{H}^2$ martingálok esetén a kvadratikus varáció szintén integrálható, ugyanis az $M^2 - [M]$ egyrészt nem csak lokális martingál, hanem martingál is és másrészt mivel az $M^2(t)$ integrálható az $[M](t)$-nek is annak kell lenni. Mivel

$$
\begin{aligned}
t\int_\Lambda x^2 d\nu(x) &= \mathbf{E}\left(\int_\Lambda x^2 d\mu_t(x)\right) = \\
&= \mathbf{E}\left(\sum_{s\leq t}(\Delta X(s))^2 \chi(\Delta X(s)\in\Lambda)\right) = \\
&= \mathbf{E}\left(\sum_{s\leq t}(\Delta M(s))^2\right) \leq \mathbf{E}([M](t)) = \\
&= \mathbf{E}\left(M^2(t)\right) < \infty.
\end{aligned}
$$

Miért négyzetesen integrálhatóak a kis ugrások

Az azonosság egy másik következménye, hogy ha az

$$\int_{\Lambda} |x| \, d\nu(x) < \infty$$

akkor

$$\begin{aligned} t \int_{\Lambda} |x| \, d\nu(x) &= \mathbf{E}\left(\int_{\Lambda} |x| \, d\mu_t(x) \right) = \\ &= \mathbf{E}\left(\sum_{s \leq t} |\Delta X(s)| \, \chi(\Delta X(s) \in \Lambda) \right) < \infty \end{aligned}$$

véges, így pontosan akkor nincs korrekciós tag, ha a trajektóriák korlátos változásúak.

Példa

Example

Ha (X_n) $\lambda = 1$ paraméterű független kompenzált Poisson-folyamatok, akkor a

$$X = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} X_n$$

létezik és a kvadratikus variációja

$$X = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} X_n.$$

Poisson-folyamatok pontosan akkor függetlenek, ha nincsenek közös ugrásaik. Egy Poisson-folyamat kvadratikus variációja éppen önmaga. A kompenzált folyamat kvadratikus variációja az eredeti folyamat. Az ugrások diszjunktsága miatt

$$\left[\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} X_k\right] = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2} [X_k] = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2} X_k \to \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} X_n.$$

Példa

Ugyanakkor

$$\mathbf{E}\left(\left|X\right|(t)\right) \geq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \lambda t = \infty$$

$$\int_0^1 x d\nu(x) = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{i} = \infty$$

és

$$\int_0^1 x^2 d\nu(x) = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{i^2} < \infty.$$

Lévy-folyamatok momentumai

Az erős Markov-tulajdonság további fontos következménye:

Theorem

Ha valamely X Lévy-folyamat ugrásai kisebbek egy fix $c > 0$ konstansnál, vagyis $|\Delta X| \leq c$, akkor tetszőleges $[0, t]$ véges szakaszon az X momentumainak halmaza egyenletesen korlátos. Vagyis minden m kitevőhöz és $[0, t]$ szakaszhoz létezik olyan $k(m, t)$ korlát, hogy

$$\mathbf{E}\left(\left|X^{m}(s)\right|\right) \leq k(m, t), \quad s \in [0, t].$$

Folytonos Lévy-folyamatok karakterizációja

Legyen X egy folytonos Lévy-folyamat. Mivel az X folytonos, ezért az X összes momentuma véges. Ebből következően az $X(t)$ változónak minden t időpontban van várható értéke. Következésképpen ha m jelöli az $X(1)$ várható értékét, akkor az $X(t) - t \cdot m$ martingál. Érdemes hangsúlyozni, hogy annak igazolásához, hogy az $X(t)$ várható értéke éppen $t \cdot m$ vagy fel kell használni hogy a filtráció teljesíti a szokásos feltételeket, így az $X(t) - \mathbf{E}(X(t))$ logikai martingálnak van várható értéke, vagy fel kell használni, hogy véges időszakon a második momentumok halmaza korlátos, így az $(X(t))_t$ család minden véges időtartományon egyenletesen integrálható. Az $X(t) - t \cdot m$ martingál voltából következik, hogy az X folytonos szemimartingál.

Folytonos Lévy-folyamatok karakterizációja

A jelölés egyszerűsítése céljából tegyük fel, hogy $m = 0$. A kvadratikus variáció definíciója miatt az $[X]$ szintén folytonos Lévy-folyamat. A független és stacionárius növekedés feltétele következik abból, hogy a kvadratikus variáció a közelítő négyzetösszegek határértéke és a Lévy-tulajdonság miatt a diszjunkt szakaszokhoz tartozó közelítő négyzetösszegek függetlenek és az eloszlásuk csak az időszak hosszától függ. A kvadratikus variáció folytonossága pedig a parciális integrálás formulája miatt a sztochasztikus integrálok folytonos integrátor szerinti folytonosságának következménye. Ez másképpen azt jelenti, hogy az

$$Y(t) \stackrel{\circ}{=} [X](t) - \mathbf{E}([X](t)) = [X](t) - t \cdot \mathbf{E}([X](1))$$

kifejezés ismételten folytonos martingál. Az Y mint két monoton növekedő függvény különbsége véges variációjú.

Folytonos Lévy-folyamatok karakterizációja

A véges variációjú folytonos martingálok konstansak, így

$$[X](t) = \mathbf{E}([X](t)) = a \cdot t.$$

Az Itô-formula szerint

$$\begin{aligned} \exp(iuX(t)) - 1 &= iu \int_0^t \exp(iuX(s))dX(s) - \\ &\quad -\frac{1}{2}u^2 \int_0^t \exp(iuX(s))d[X](s). \end{aligned}$$

Az $\exp(iuX)$ korlátos és az X négyzetesen integrálható, következésképpen a sztochasztikus integrál valódi martingál. A két oldalon várható értéket véve és felhasználva, hogy most a sztochasztikus integrál várható értéke a martingál tulajdonság miatt nulla

Folytonos Lévy-folyamatok karakterizációja

$$
\begin{aligned}
\mathbf{E}\left(\exp(iuX(t))\right)-1 &= -\frac{1}{2}u^2\mathbf{E}\left(\int_0^t \exp(iuX(s))d\left[X\right](s)\right)= \\
&= -\frac{1}{2}u^2\mathbf{E}\left(\int_0^t \exp(iuX(s))d\left(as\right)\right)= \\
&= -\frac{1}{2}u^2 a\int_0^t \mathbf{E}\left(\exp(iuX(s))\right)ds.
\end{aligned}
$$

Ha bevezetjük a $\varphi\left(u,t\right)\overset{\circ}{=}\mathbf{E}\left(\exp(iuX(t))\right)$ jelölést, akkor ez

$$
\varphi\left(u,t\right)-1=-\frac{1}{2}u^2 a\int_0^t \varphi\left(u,s\right)ds.
$$

t szerint deriválva

$$
\frac{d\varphi\left(u,t\right)}{dt}=-\frac{1}{2}u^2 a\varphi\left(u,t\right).
$$

Folytonos Lévy-folyamatok karakterizációja

A differenciálegyenletet megoldva tetszőleges u-ra

$$\varphi(u,t) = \exp\left(-\frac{1}{2}u^2 at\right).$$

A normális eloszlás Fourier-transzformáltjának képletét felhasználva

$$X(t) \cong N\left(0, \sqrt{at}\right).$$