Lévy-folyamatok

Medvegyev

2010

Lévy-folyamat

Definition

A X folyamat Lévy-folyamat, ha

1. $X(0) = 0$,
2. az X független és stacionárius növekményű, és
3. a trajektóriák jobbról regulárisak, vagyis jobbról folytonosak, és minden időpontban van bal oldali határértékük.

Ha X Lévy folyamat, akkor az $X(1)$ eloszlása korlátlanul osztható, ugyanis

$$X(1) = \sum_{k=1}^{n} \left(X\left(\frac{k}{n}\right) - X\left(\frac{k-1}{n}\right) \right)$$

és az $X(k/n) - X((k-1)/n)$ változók függetlenek és azonos eloszlásúak. És megfordítva minden korlátlanul osztható eloszláshoz van olyan Lévy-folyamat, ahol az $X(1)$ eloszlása éppen az adott eloszlás.

Lévy folyamatok ugrásai

Mivel a Lévy-folyamatok jobbról regulárisak tetszőleges $0 \notin K$ kompakt halmaz és $[0, t]$ időintervallum esetén a $\Delta X(t) \in K$ ugrások száma véges. Ennek oka, hogy mivel $0 \notin K$, ezért az ugrások nagysága egy $k > 0$ számnál mind nagyobbak és ha végtelen sok (t_n) ugrás lenne a $[0, t]$ szakaszon, akkor a (t_n) bármely torlódási pontjában a jobb vagy a bal oldali határérték nem létezhetne. Megmutatható, hogy két K-ba eső ugrás közötti idő exponenciális, és így ha a K-ba eső ugrások számát vesszük, akkor az így kapott folyamat Poisson-folyamat, vagyis van $\nu_t(K) = t\nu(K)$ várható értéke. Az így kapott ν mérték neve spektrál mérték.

Alapvető kérdés, hogy adott X Lévy-folyamat esetén mi lesz a spektrál mérték?

Lévy–Hincsin formula

Theorem

Az $\mathbb{R}$-en értelmezett F eloszlás pontosan akkor korlátlanul osztható, ha létezik az $\mathbb{R}$-en olyan ν nem negatív, σ-véges mérték, hogy az F φ karakterisztikus függvénye

$$\varphi(t) = \exp\left(i\gamma t - \frac{\sigma^2 t^2}{2} + \int_{\mathbb{R}\setminus\{0\}} \left[\exp(itx) - 1 - \frac{itx}{1+x^2}\right] d\nu(x)\right)$$

módon írható. A (γ, σ, ν) hármast az F, illetve a hozzá tartozó Lévy-folyamat karakterisztikáinak hívjuk. Az $x/\left(1+x^2\right)$ helyébe írható például az $x\chi(|x|<1)$ csonkoló függvény is. Ilyenkor a γ más, de a σ és a ν nem változik.

Lévy–Hincsin formula

A ν mértékről egyedül a

$$\int_{\mathbb{R}\setminus\{0\}} \min\left(x^2, 1\right) d\nu\left(x\right) < \infty$$

tulajdonságot tudjuk, így a kitevőben levő integrál mindig létezik. A $x\chi\left(|x| < 1\right)$ csonkoló függvénnyel az exponenciális függvény sorfejtése alapján jól látszik, hogy az origó körül az integrál mindig konvergens, ugyanis ilyenkor a magfüggvény

$$\exp\left(itx\right) - 1 - itx = \frac{\left(itx\right)^2}{2!} + \frac{\left(itx\right)^3}{3!} + \ldots$$

A végtelenben az integrál konvergál, mert az integrandus korlátos. Általában a gondot az origó körüli tartomány jelenti.

Theorem

Ha F az X Lévy-folyamathoz tartozó korlátlanul osztható eloszlás, akkor az X egyértelműen felbontható $X = X_1 + X_2 + X_3$ független folyamatokra úgy, hogy

$$X_1(t) = \gamma t$$

$$X_2(t) = \sigma w(t)\,,\ \text{ahol } w \text{ Wiener-folyamat}$$

$$X_3(t)\ \text{tiszta ugró folyamat amely spektrál mértéke } \nu.$$

A ν és a σ nem függ a csonkoló függvény választásától, de a γ igen.

Cauchy-eloszlás

Legyenek ξ és η függetlenek és standard normális eloszlásúak. Ekkor ha φ a standard normális sűrűségfüggvénye

$$\begin{aligned}
\mathbf{P}\left(\frac{\xi}{\eta} < x\right) &= \int_{-\infty}^{\infty} \mathbf{P}\left(\frac{\xi}{\eta} < x \mid \eta = y\right) \varphi(y)\, dy = \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} \mathbf{P}\left(\frac{\xi}{y} < x\right) \varphi(y)\, dy = \\
&= \int_{-\infty}^{0} \mathbf{P}(\xi > yx)\, \varphi(y)\, dy + \int_{0}^{\infty} \mathbf{P}(\xi < yx)\, \varphi(y)\, dy,
\end{aligned}$$

ahol a második sorban kihasználtuk a függetlenséget. Deriválva x szerint a hányados sűrűségfüggvénye

$$\begin{aligned}
\int_{-\infty}^{\infty} \varphi(yx)\, |y|\, \varphi(y)\, dy &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |y| \exp\left(-\frac{(yx)^2 + y^2}{2}\right) dy = \\
&= \frac{1}{\pi\left(1 + x^2\right)}.
\end{aligned}$$

Cauchy-eloszlás karakterisztikus függvénye

A Cauchy-eloszlás karakterisztikus függvényét az inverziós formula segítségével fogjuk meghatározni. A φ integrálható, ugyanis

$$\int_{\mathbb{R}} |\varphi(t)|\, dt = \int_{\mathbb{R}} \exp(-|t|)\, dt = 2.$$

Integrálható karakterisztikus függvény esetén a sűrűségfüggvény kifejezhető az inverz Fourier-transzformációval. Az inverziós formula alapján a karakterisztikus függvényt egyértelműen meghatározza az esetlegesen teljesülő

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{1}{\pi(1+x^2)} = \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}} \exp(-itx)\exp(-|t|)\, dt = \\ &= \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}} \cos(tx)\exp(-|t|)\, dt = \frac{1}{\pi}\int_0^\infty \cos tx \exp(-t)\, dt \end{aligned}$$

összefüggés, amely közvetlen számolással, kétszer parciálisan integrálva, ellenőrizhető. Vagyis

$$\varphi(t) = \exp(-|t|).$$

Cauchy-eloszlás korlátlanul osztható

Ha (ξ_k) Cauchy-eloszlásúak és függetlenek, akkor a

$$\frac{\xi_1 + \xi_2 + \cdots \xi_n}{n}$$

is Cauchy eloszlású, ugyanis a $\zeta = \xi_1 + \xi_2 + \cdots \xi_n$ összeg karakterisztikus függvénye

$$(\exp(-|t|))^n = \exp(-n|t|)$$

az átlagé pedig

$$\mathbf{E}(\exp(it\zeta/n)) = \mathbf{E}(\exp(i(t/n)\zeta)) = \exp(-n|t/n|) = \exp(-|t|).$$

Cauchy-eloszlás spektrálmértéke

Az alábbi integrálok kétszer impropriusok. A végtelenben való konvergencia teljesül. ugyanis a H magfüggvényre $|H| \leq 3$, az $\int_1^\infty 1/x^2 dx$ pedig konvergens. A gond a $\int x^{-2} \sin x dx$ nullában való divergenciájával van. A $x\chi\left(|x| < 1\right)$ csonkoló függvényt használva

$$\int_{\mathbb{R}\setminus\{0\}} H\left(t, x\right) \frac{1}{\pi x^2} dx = \int_{\mathbb{R}\setminus\{0\}} \left(\exp\left(itx\right) - 1 - itx\chi\left(|x| < 1\right)\right) \frac{1}{\pi x^2} dx =$$

$$= \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos tx - 1}{x^2} dx + \frac{i}{\pi} \int_{-1}^{1} \frac{\sin tx - tx}{x^2} dx =$$

$$= \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos tx - 1}{x^2} dx = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos u - 1}{u^2} \frac{t^2}{t} du = \frac{|t|}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos u - 1}{u^2} du.$$

Ugyanis az integrálokat az $|x| \leq 1$ és $|x| > 1$ halmazon számolva többi integrál létezik és az integrátor páratlan.

Cauchy-eloszlás spektrálmértéke

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1-\cos u}{u^2} du = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{2\sin^2 u/2}{u^2} du = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{2} \frac{2\sin^2 v^2}{v^2} dv =$$
$$= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin v}{v} dv = \pi$$

ugyanis

$$\int_{-2\tau}^{2\tau} \frac{\sin x}{x} dx = \int_{-\tau}^{\tau} \frac{\sin 2x}{2x} 2dx =$$
$$= \int_{-\tau}^{\tau} \frac{2\sin\cos x}{x} dx =$$
$$= \left[\frac{\sin^2 u}{u}\right]_{-\tau}^{\tau} + \int_{-\tau}^{\tau} \frac{\sin^2 u}{u^2} du.$$

Miként közismert

$$\lim_{\tau\to\infty} \int_{-2\tau}^{2\tau} \frac{\sin x}{x} dx = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin x}{x} = \pi.$$

Cauchy-eloszlás spektrálmértéke

A Lévy-tulajdonság miatt ha $X(1)$ Cauchy-eloszlású, akkor

$$X(1) = \sum_{k=1}^{n} \left(X\left(\frac{k}{n}\right) - X\left(\frac{k-1}{n}\right) \right),$$

ahol $X\left(\frac{k}{n}\right) - X\left(\frac{k-1}{n}\right)$ Cauchy eloszlású $1/n$-nel megszorozva. Ha

$$f_n(x) = nf(nx) = \frac{1}{\pi} \frac{n}{1 + (nx)^2}$$

a közös "ugrás" sűrűségfüggvény, akkor az $[x, x + dx]$-be eső ugrások száma közelítőleg

$$\begin{aligned} n \int_x^{x+dx} f_n(t)\, dt &\simeq nf_n(x)\, dx = n \frac{1}{\pi} \frac{n}{1 + n^2 x^2} dx = \\ &= \frac{1}{\pi} \frac{n^2}{1 + n^2 x^2} dx \simeq \frac{1}{\pi x^2} dx \end{aligned}$$

Cauchy-eloszlás spektrálmértéke

Az elv a következő: Ha a $[0,1]$ szakaszt n részre osztjuk, akkor minden Cauchy-eloszlású $X\left(\frac{k}{n}\right)-X\left(\frac{k-1}{n}\right)$ változó egy-egy ΔX_k ugrásnak tekinthető. Annak a valószínűsége, hogy az ugrás nagysága a K halmazba esik éppen

$$\mathbf{P}\left(\Delta X_k \in K\right)=\int_K f_n(x)\,dx.$$

Mivel n kisérletet teszünk, a K-ba eső ugrások átlagos száma

$$\boldsymbol{\nu}(K) \approx n \cdot \mathbf{P}\left(\Delta X_k \in K\right).$$

Gamma-eloszlás spektrálmértéke

Az exponenciális eloszlás spektrál mértéke

$$\nu(A) = \int_A \frac{\exp(-\lambda x)}{x} dx, \quad A \subseteq \mathbb{R} \setminus \{0\}$$

Mivel az

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{itx}{1+x^2} \frac{\exp(-\lambda x)}{x} dx$$

integrál véges, ezért az értéke a γ konstansba beolvasztható, elég ellenőrizni a

$$\varphi(t) = \exp\left(\int_{-\infty}^{\infty} (\exp(itx) - 1) \frac{\exp(-\lambda x)}{x} dx\right) = \frac{1}{1 - it/\lambda}$$

egyenlőséget.

A két oldalt deriválva

$$\frac{d\varphi(t)}{dt} = \varphi(t)\frac{d}{dt}\int_{-\infty}^{\infty}(\exp(itx)-1)\frac{\exp(-\lambda x)}{x}dx =$$

$$= \varphi(t)\int_{-\infty}^{\infty}\frac{d}{dt}(\exp(itx)-1)\frac{\exp(-\lambda x)}{x}dx =$$

$$= \varphi(t)\int_{-\infty}^{\infty} ix\exp(itx)\frac{\exp(-\lambda x)}{x}dx =$$

$$\varphi(t)\frac{i}{\lambda}\int_{-\infty}^{\infty}\lambda\exp(itx)\exp(-\lambda x)\,dx = \frac{i}{\lambda}\varphi(t)^2$$

amely teljesül a másik oldal esetén

$$\frac{d}{dt}\frac{1}{1-it/\lambda} = -\frac{-i/\lambda}{(1-it/\lambda)^2} = \frac{i}{\lambda}\frac{1}{(1-it/\lambda)^2}$$

Gamma-eloszlás spektrálmértéke

A $\Gamma(a, \lambda)$ eloszlás sűrűségfüggvénye

$$f(x) = \frac{x^{a-1}\lambda^{a}}{\Gamma(a)} \exp(-\lambda x).$$

Speciálisan az exponenciális eloszlás éppen $\Gamma(1, \lambda)$.
A gamma eloszlás ismert tulajdonsága, hogy ha ξ eloszlás $\Gamma(a, \lambda)$ az η eloszlása $\Gamma(b, \lambda)$, és ha a ξ és az η függetlenek, akkor a $\xi + \eta$ eloszlása $\Gamma(a + b, \lambda)$. Ezért ha az $X(1)$ eloszlása $\Gamma(a, \lambda)$ akkor az $X\left(\frac{k}{n}\right) - X\left(\frac{k-1}{n}\right)$ eloszlása $\Gamma(a/n, \lambda)$.

Gamma-eloszlás spektrálmértéke

A gamma eloszlás additív tulajdonsága alapján az exponenciális eloszlás n-ed részének sűrűségfüggvényét felhasználva

$$
\begin{aligned}
n\int_{x}^{x+\Delta x} f_n(t)\,dt &\approx nf_n(x)\,dx = n\frac{x^{1/n-1}\lambda^{1/n}}{\Gamma(1/n)}\exp(-\lambda x)\,dx = \\
&= \frac{x^{1/n-1}\lambda^{1/n}}{(1/n)\,\Gamma(1/n)}\exp(-\lambda x)\,dc = \\
&= \frac{x^{1/n-1}\lambda^{1/n}}{\Gamma(1/n+1)}\exp(-\lambda x)\,dx \to \frac{\exp(-\lambda x)}{x}dx,
\end{aligned}
$$

ahol kihasználtuk az $x\Gamma(x) = \Gamma(x+1)$ és a $\Gamma(1) = 1$ összefüggéseket.

Gamma-eloszlás spektrálmértéke

Az általános esetben

$$\begin{aligned} nf_n(x)\,dx &= n\frac{x^{a/n-1}\lambda^{a/n}}{\Gamma(a/n)}\exp(-\lambda x)\,dx = \\ &= a\frac{x^{a/n-1}\lambda^{a/n}}{(a/n)\Gamma(a/n)}\exp(-\lambda x)\,dx = \\ &= a\frac{x^{a/n-1}\lambda^{a/n}}{\Gamma(a/n+1)}\exp(-\lambda x)\,dx \to a\frac{\exp(-\lambda x)}{x}dx. \end{aligned}$$

Ez ellenőrizhető közvetlenül is felhasználva, hogy a karakterisztikus függvény

$$\varphi(t) = \frac{1}{(1-it/\lambda)^a}.$$