Zűrzavaros bevezetés a sztochasztikus analízisbe közgazdászok számára[1]

Medvegyev Péter

2010. február 23.

[1] A jelenlegi anyag viszonylag hosszú idő alatt született. Vagy tíz éve egy pár oldalas előadásjegyzetként látta meg a napvilágot, majd évről évre bővült. Ezt a verziót többé-kevésbé véglegesnek gondolom.

Tartalomjegyzék

A sztochasztikus analízis, más néven sztochasztikus kalkulus célja a klasszikus differenciálszámítás kiterjesztése sztochasztikus folyamatokra. Az elmélet alapgondolatai igen egyszerűek, de az egyszerű alapötletek technikai megvalósítása nagyon körülményes és nehézkes. A figyelmes olvasó alább több helyen is joggal nehezményezheti a matematikai pontosság teljes hiányát. Integrálokat véges összegekkel helyettesítünk, nem teszünk különbséget a konvergenciafogalmak között, az integrálok mögé bederiválunk, az integrálok sorrendjét minden megfontolás nélkül felcseréljük, általában nem teszünk különbséget lokális martingál és martingál között stb. Ezek súlyos matematikai hibák, és az alább bemutatott állítások jelentős része a megfogalmazás pontatlansága miatt matematikailag nem is igaz, de a probléma szabad szemmel remélhetőleg azért nem látható. Ugyanakkor úgy látjuk, hogy egy bevezető pénzügyi matematikai kurzus során a precizitás magasabb foka inkább káros, mint hasznos lenne. Minden „heurisztikus” megközelítés nagy hibája, hogy amennyiben az érdeklődő olvasó mégis meg akarja érteni a pontos gondolatmenetet bajba kerülhet, ugyanis a „heurisztikus” gondolatmenet durván hibás lehet. Miként ismert minden nehéz problémának van egy világos és egyszerű, de hibás magyarázata. Határozottan jelezni szeretnénk, hogy az alábbi „bizonyítások” egyikébe sem szabad túlságosan belegondolni. Az elmélet pontos bemutatása nagyon messze vezetne, és meg vagyunk győződve arról, hogy már a tényleges utazás előkészítése is meghaladná a rendelkezésre álló időkeretet. A tételek pontos alakja, illetve a bizonyítások megtalálhatóak az [2] és [1], illetve [3] könyvekben. Önkritikusan megjegyzzük, hogy reméljük, hogy a hozzáértő olvasó nem fogja a fejünkre olvasni az alább leírtakat, és elfogadja azt a véleményünket, hogy egy átlagos matematikai felkészültséggel rendelkező közgazdász hallgató számára a sztochasztikus analízis tárgyalásakor a matematikailag közelítőleg is precíz stílus teljesen lehetetlen. Ugyanakkor azt gondoljuk, hogy az itt leírtak megértése segítheti az érdeklődő olvasót a pontos matematikai elmélet megértésében és megemésztésében, ugyanis ha heurisztikusan is, de azért a helyes irányba orientálja az olvasót. Másképpen fogalmazva reméljük azért kárt nem teszünk avval, hogy a matematika tényeit némiképpen lazán interpretáljuk és idézzük.

A pénzügyi matematika kulcs eszköze az *Itô-formula*. A pénzügyi könyvekben legtöbbször idézett alakjában a formula meglepően, talán túlzottan is bonyolult, és a legtöbb ember számára legalábbis nagyon nehezen megjegyezhető. Valójában azonban, a tárgyalás során szándékosan mellőzött nem csekély apró technikai problémáktól eltekintve, a formula igen egyszerűen igazolható, de ami jóval fontosabb a tartalma könnyen megérthető és megjegyezhető. A formula megértésének kulcsa, mint általában a matematikában, a megfelelő nézőpont megválasztása. Ha hajlandók vagyunk az absztrakciós létrán egy kicsit feljebb mászni és hajlandók vagyunk a sztochasztikus analízis bizonyos általános kérdéseit megfontolni, akkor az egyébként homályos kép azonnal kitisztul. Vagy legalábbis reméljük, hogy kitisztul. Az Itô-formula számos olvasattal rendelkezik: Az alábbiakban a *Newton–Leibniz-szabály* általánosításaként tárgyaljuk. Az általánosítás oka, hogy a tiszta véletlen hatására kialakuló folyamatok által befutott pályák, matematikailag igen komplexek. A pénzügyi matematika kiindulópontja, hogy a kiélezett piaci verseny hatására a pénzügyi eszközök áralakulását leíró ábrák helyes matematikai absztrakcióját olyan folyamatok alkotják, amelyek a szokásos fizikai szemlélettel ellentétben nem rendelkeznek véges úthosszal, csak a folyamat úgynevezett ***kvadratikus variációja***, négyzetes megváltozása véges[1]. A négyzetes megváltozás pozitivitása két következménnyel bír: egyrészt a Newton–Leibniz-formulában megjelenik az Itô-formulában szereplő nevezetes másodrendű korrekciós tag, másrészt a folyamatokban nincsen arbitrázs. Az arbitrázs hiánya, mint alapvető pénzügyi feltétel a piaci folyamatok hatékonyságát jellemző, közgazdasági, pénzügyi észrevétel. A piacon azért nincsen arbitrázs, mert a piac az információt azonnal és tökéletesen feldolgozza. Ami a hatékony információfeldolgozás után megmarad az tökéletesen véletlen, fehér zaj, amiből, a tökéletes véletlen definíciója miatt, nem lehet pénzt csinálni. Matematikailag a tökéletes véletlen által indukált mozgás annyira bonyolult, hogy csak a folyamat kvadratikus variációja lesz véges. Másképpen fogalmazva, ha nincs kvadratikus variáció, akkor van arbitrázs, és akkor befektetéselemzés mint önálló tevékenység szükségtelen és értelmetlen. Némiképpen eltúlozva: a befektetéselemzők azért kapják a fizetésüket, hogy a pénzügyi életben kezeljék azokat a komplikációkat, amelyeket a kvadratikus variáció pozitivitása okoz.

[1] A kvadratikus variáció, illetve a négyzetes megváltozás azonos fogalmak. A kvadratikus variáció az angol terminológia közvetlen átvétele, a négyzetes megváltozás már az 1.0-ás magyarított verzió. V.ö.: fájl, állomány.

Nincs kvadratikus variáció, nincs állás, és lehet menni a híd alá aludni[2]. A befektetéselemzők kenyéradó gazdája a kvadratikus variáció! Bár alább közvetlenül nem jelenik meg, a háttérben egy nagyon jól megértett és tisztázott matematikai–pénzügyi állítás húzódik meg: az eszközárazás alaptétele. Az eszközárazás alaptétele szerint egyrészt ha valamely piacon nincsen lehetőség arbitrázsra, akkor az alapul vett folyamat úgynevezett *szemimartingál*, másrészt a piacon pontosan akkor nincsen arbitrázs, ha alkalmas valószínűség, az úgynevezett kockázatsemleges valószínűség mellett, az alapfolyamat lokális martingál[3]. Minden, nem azonosan konstans, lokális martingál kvadratikus variációja pozitív. A szemimartingálnak nevezett folyamatosztály tagjai definíció szerint két folyamat összegére bonthatóak: az egyik folyamat teljes megváltozása véges, a másik tag pedig lokális martingál, így a négyzetes megváltozása véges[4]. Az Itô-formula talán legjobb olvasata, hogy a szemimartingálok osztálya zárt a kétszer folytonosan deriválható függvényekkel való transzformációra nézve. Az Itô-formula megadja, hogy miként módosul az eredeti szemimartingál említett két komponense a formulában szereplő függvénytranszformáció hatására: Ha valamely lokális martingált beleteszünk egy kétszer folytonosan deriválható függvénybe, akkor a transzformált folyamat felbontását magadó Itô-formulában szereplő Itô-féle sztochasztikus integrál a transzformáció során kapott szemimartingál lokális martingál része, miközben a formulában szereplő másodrendű korrekciós tag teljes megváltozása véges.

[2]Vegyük észre, hogy bár Budapest sok szép híddal rendelkezik, a hidak alatt legfeljebb egy évfolyamnyi befektetéselemző férne el. Mivel a legtöbb befektetéselemzőnek van állása ezért az empirikus tapasztalat azt mutatja, hogy a kvadratikus variáció a gyakorlatban is pozitív. Vagy talán mégse? Lehet, hogy a matematika és a pénzügyi gyakorlat kölcsönhatása bonyolultabb? Annyi azonban igaznak tűnik, hogy a kvadratikus variáció megértése nem rontja az álláshoz jutás esélyeit. Azért ez is valami.

[3]Bizonyos szempontból a sztochasztikus analízis megértésének kulcsa a borzalmas terminológia elfogadása és tudomásulvétele. Sajnos szinte minden tudományra és áltudományra jellemző a nagyképű terminólógiai használata. Azért legyünk őszinték: a short call opcióra való hivatkozás legalább annyira pofátlan blabla mint a szemimartingál. Általános szabályként elmondható, hogy egy terület annál kevésbé tudományos minnél zavarosabb és nagyképűbb a terminológiája. A sztochasztikus analízis azonban ez alól kivétel. A borzalmas terminológia egyik oka, hogy a terület igencsak nem rég, és meglehetősen váratlanul, került ki a világ vezető matematikusainak egy szűk szektájának keze közül. Az alapító atyák nem igazán számítottak arra, hogy valaha ezekkel a fogalmakkal a szűk szektatagokon kívül bárki is foglalkozni fog.

[4]Hogy ez mit jelent az alábbiakból remélem világos lesz. Sajnos a terminológia történelmileg alakult ki, így nem tökéletes. Jobb lenne, ha a teljes megváltozás helyett elsőrendű megváltozást írhatnánk, vagyis azt mondhatnánk, hogy minden szemimartingál két folyamat összegére bontható: az elsőnek az elsőrendű, a másodiknak a másodrendű megváltozása véges. Vigyázni kell azonban, nem minden folyamat, amelynek a négyzetes megváltozása véges lesz lokális martingál. A szemimartingálok felbontásában a kvadratikus variációval rendelkező tagnak lokális martingálnak kell lenni.

1. fejezet

Sztochasztikus folyamatok

Ebben az első fejezetben röviden áttekintjük a sztochasztikus folyamatok elméletének néhány alapfogalmát. Bevezetjük a Wiener és Poisson-folyamatokat és a martingálokat.

Sztochasztikus folyamaton mindig kétváltozós függvényt értünk. Az egyik változó, amit általában t vagy s jelöl, az idő; a másik, amit általában ω jelöl, véletlen, ismeretlen paraméter, amely a lehetséges értékeit egy $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$ valószínűségi mezőből veszi fel. Bizonyos szempontból nagyon zavaró, de ugyanakkor igen indokolt konvenció, hogy az ω argumentumot általában elhagyjuk. Ha a képletet a szövegkörnyezetből kiragadjuk, nem világos, hogy egyszerű skalárról, vagy valószínűségi változóról van-e szó. A folyamatot úgy célszerű elképzelni, hogy a $t = 0$ időpontban kiválasztásra kerül az ω véletlen kimenetel értéke, és ami megfigyelhető, az az ω rögzítése mellett keletkező $t \mapsto \xi(t, \omega)$ úgynevezett *trajektória*, vagyis a folyamat *realizációja* az ω kimenetel megvalósulása esetén[1]. A sztochasztikus analízis nehézségei abból származnak, hogy az érdekes esetekben a $t \mapsto \xi(t, \omega)$ trajektóriák igen szélsőséges matematikai tulajdonságokkal rendelkeznek. Általában durván nem folytonosak, tele vannak szakadásokkal, kisebb nagyobb ugrásokkal.

A sztochasztikus folyamatok általános elmélete, vagyis amikor ugrásokat és szakadásokat is megengedünk igen nehéz, így az alábbiakban csak a *folytonos* sztochasztikus folyamatok elméletével foglalkozunk. Folytonosságon azt értjük, hogy feltételezzük, hogy a trajektóriák folytonos függvények. A folytonosság igen szigorú megkötés, a pénzügyi tapasztalat azt mutatja, hogy a legtöbb megfigyelt sztochasztikus folyamat nem folytonos. Pontosabban a folytonos folyamatok számos, a pénzügyi gyakorlatban megfigyelt jelenséget nem megfelelően modelleznek. Ennek ellenére a matematikai tárgyalás egyszerűsége céljából a folytonosság feltételét alább lényegében mindig meg fogjuk követelni[2].

1.1. Wiener-folyamatok

A leghíresebb[3] folytonos sztochasztikus folyamat a *Wiener-folyamat*, pontosabban a Wiener-folyamat típusú folyamatok családja.

1.1 Definíció.
Valamely $\{w(t, \omega)\}_{t \geq 0}$ sztochasztikus folyamat Wiener-folyamat, ha teljesíti az alábbi öt feltételt:

[1] Természetesen a megfigyelő nem tudja, hogy melyik ω kimenetel lett kiválasztva. A trajektória megfigyelése során az idő előrehaladtával egyre több „információhoz” jutunk és az ω kimenetelt egyre pontosabban meg tudjuk „becsülni”. Talán a legszerencsésebb példa a következő: Tegyük fel, hogy a $[0, 1]$ szakasz egy pontját a $t = 0$ időpontban kiválasztjuk. Tegyük fel, hogy a kapott számot bináris formában írjuk fel, és hogy az idő múlását diszkrét időpontokkal ábrázoljuk. Tegyük fel továbbá, hogy az idő előrehaladtával minden időpontban megtudjuk a a $t = 0$ időpontban kiválasztott szám egy újabb bináris számjegyét. Természetesen az idő múlásával egyre többet tudunk meg a számról, de minden időpontban az új számjegy „meglepetés” lesz számunkra. Ez a modell ekvivalens avval hogy minden időpontban egy fej vagy írás játékkal egy újabb számjegyet írunk a korábbi számjegyek mögé.

[2] Ettől azonban a matematikai tárgyalás nem lesz sokkal egyszerűbb, ugyanis a folytonos sztochasztikus folyamatok általában nem deriválhatóak, és alább némi túlzással nem deriválható függvényekre akarunk differenciálszámítást csinálni.

[3] A folyamat méltán híres. A Wiener-folyamat a matematikusok, és reméljük a pénzügyesek egyik kedvence.

1. *$w(0) \equiv 0$,*
2. *a w növekményei függetlenek*[4]*,*
3. *a w stacionárius növekményű, vagyis a $w(t+h) - w(t)$ növekmény eloszlása csak a h-tól függ és nem függ a t-től,*
4. *tetszőleges $0 \leq s < t$ értékekre*[5]
$$w(t) - w(s) \cong N\left(0, \sqrt{t-s}\right),$$
5. *a w folytonos abban az értelemben, hogy minden ω kimenetelre a $t \mapsto w(t, \omega)$ trajektória folytonos.*

Más szavakkal, a $[0, \infty)$ időintervallumon értelmezett w folytonos trajektóriájú, független és stacionárius növekményű folyamatot Wiener-folyamatnak mondjuk, ha minden t időpontban a $w(t)$ eloszlása $N\left(0, \sqrt{t}\right)$.

Mivel a Wiener-folyamatok összes véges dimenziós eloszlása normális, ezért a Wiener-folyamatok *Gauss-folyamatok*[6]. Érdemes hangsúlyozni, hogy a Wiener-folyamatokat definiáló feltételek szorosan összefüggnek, és nem azonos súlyúak. Például a negyedik feltétel szerint a növekmények eloszlása normális. Megmutatható[7], hogy ez következik a trajektóriák folytonosságából, illetve a növekmények függetlenségéből[8]. A szórásra tett feltétel, a normalizáló konstanstól[9] eltekintve, a stacionaritás feltételével azonos. Ugyancsak hangsúlyozni kell, hogy a Wiener-folyamat elnevezés pontatlan. Helyesebb lenne Wiener-típusú folyamatokról beszélni. A Wiener-folyamat fogalma emlékeztet az eloszlás, például a normális eloszlás fogalmára. Számos különböző valószínűségi változó létezik amely normális eloszlású. Ha ξ standard normális eloszlású, akkor az $\eta \stackrel{\circ}{=} -\xi$ is standard normális eloszlású és triviálisan a $\{\xi = \eta\}$ esemény valószínűsége nulla. Hasonlóan, ha w Wiener-folyamat, akkor az $u \stackrel{\circ}{=} -w$ folyamat is Wiener-folyamat, és annak a valószínűsége, hogy valamely t időpontban $w(t) = u(t)$ ismételten nulla. Két folyamat akkor különböző, ha a folyamatot megadó kétváltozós függvények különbözőek. Természetesen két függvény triviálisan különböző, ha az értelmezési tartományuk különböző. Számos olyan matematikai konstrukció létezik, amely segítségével Wiener-folyamat készíthető. A különböző konstrukciókban a folyamatot hordozó $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$ terek általában különbözőek, így természetszerüleg a folyamatok is különbözőek. A sztochasztikus analízis talán legszebb állításai azok, amelyek valamely bonyolult konstrukció eredményéről azt állítják, hogy a folyamat Wiener-folyamat, vagy folyamatok széles osztályára megadják azokat a további feltételeket, amelyek garantálják, hogy a folyamatosztály elemei Wiener-típusú folyamatok lesznek.

1.1.1. A Wiener-folyamatok nem korlátosak

Fontos, hogy viszonylagosan pontos képünk legyen a Wiener-folyamatok legalapvetőbb kvalitatív tulajdonságairól.

[4] Vagyis ha $t_1 < t_2 < \cdots < t_n$ tetszőleges időpont sorozat, akkor a $\Delta w(t_k) \stackrel{\circ}{=} w(t_k) - w(t_{k-1})$ növekmények függetlenek. Megjegyezzük, hogy a ξ és az η valószínűségi változókat függetlennek mondjuk, ha tetszőleges $A \subseteq \mathbb{R}$ és $B \subseteq \mathbb{R}$ esemény esetén az $\{\omega : \xi(\omega) \in A\}$ és az $\{\omega : \eta(\omega) \in B\}$ események függetlenek, vagyis $\mathbf{P}(\xi \in A, \eta \in B) = \mathbf{P}(\xi \in A)\,\mathbf{P}(\eta \in B)$. A feltétel úgy is fogalmazható, hogy az együttes eloszlásfüggvény a peremeloszlások szorzatára bontható.

[5] A $\cong$ egyenlőségen azt értjük, hogy a két oldal eloszlása azonos.

[6] Gauss-folyamaton olyan $\xi(t, \omega)$ sztochasztikus folyamatot értünk, amelyre tetszőleges (t_k) véges számú időpont esetén a $(\xi(t_k))$ véletlen vektor normális eloszlású.

[7] Viszonylagosan nehéz tételről van szó. Az irodalomban szokás jelezni, hogy az állítás a centrális határeloszlástételből következik. Ez igaz, de az összefüggés nem jön ki a centrális határeloszlás-tétel elemi alakjából.

[8] Ez is mutatja, hogy a trajektóriák folytonosságára tett feltétel igen szigorú. A pénzügyi adatsorok esetén széles körben megfigyelt vastag farok jelenség nehezen illeszthető össze a folytonossági feltétellel.

[9] Vagyis hogy a szórás éppen $\sqrt{t}$-vel és mondjuk nem $2\sqrt{t}$-vel nő.

Először vizsgáljuk meg a folyamat globális[10] tulajdonságait. A normális eloszlás legalapvetőbb tulajdonságai miatt tetszőleges t-re a folyamat nagy valószínűséggel a $\pm 3\sqrt{t}$ parabola által leírt tartományban ingadozik. A normális eloszlás jórészt „középen" ingadozik és bár előfordulhatnak nagyon nagy értékek is, annak a valószínűsége hogy egy adott t-re a $\pm 3\sqrt{t}$ parabolán kívül találjuk magunkat nagyon kicsi[11]. Ha úgy tetszik tetszőleges időpontban a parabolán kívüli megfigyelések előfordulása „gyakorlati" szempontból elhanyagolható. Másképpen fogalmazva nem követünk el nagy hibát, ha minden véges és fix időpontban az eloszlás „tartóját" korlátosnak képzeljük el.

A trajektóriák „globális" viselkedését leíró pontos állítást az úgynevezett *iterált logaritmusok*[12] tétele tartalmazza, amely szerint

$$\mathbf{P}\left(\liminf_{t\to\infty}\frac{w(t)}{\sqrt{2t\ln\ln t}}=-1\right)=\mathbf{P}\left(\limsup_{t\to\infty}\frac{w(t)}{\sqrt{2t\ln\ln t}}=1\right)=1.$$

Emlékeztetünk, hogy definíció szerint valamely függvény vagy sorozat *limesz inferiorja*, illetve *limesz szuperiorja* a torlódási pontok közül a legkisebbet, illetve a legnagyobbat jelenti. Például az

$$a_n \circeq (-1)^n\left(1+\frac{1}{n}\right)$$

sorozat limesz szuperiorja 1 a limesz inferiorja -1. Vegyük észre, hogy a sorozat, illetve a függvény értékei egy idő után a limesz szuperior és a limesz inferior által előírt szakasz tetszőlegesen kicsi, de azért pozitív sugarú, környezetében fog ingadozni. Az imént említett (a_n) sorozat esetén a sorozat tagjai elég nagy n indexre az $(-1-\varepsilon, 1+\varepsilon)$ szakaszon belül fognak elhelyezkedni. Vagyis a sorozat a „végtelenben" lényegében a limesz superior és a limesz inferior között ingadozik. A torlódási pont tulajdonság miatt tetszőlegesen kicsi $\varepsilon > 0$ megengedett hiba esetén a sorozat tagjai, vagy függvény esetén a függvény értékei egy idő után a limesz inferior, illetve a limesz szuperior köré írt ε széles környezetbe végtelen sokszor visszatérnek. Ugyanakkor mondjuk a limesz szuperiort definiáló maximalitási megkötés miatt a limesz szuperiornál nagyobb érték már nem rendelkezik evvel a tulajdonsággal. Vagyis egy idő után a sorozat minden értéke a limesz szuperiornál egy tetszőlegesen kicsivel nagyobb, de azért rögzített, érték alatt fog elhelyezkedni. Természetesen az ε csökkenésével esetlegesen egyre ritkábban fog a sorozat a limesz szuperior, illetve a limesz inferior közelébe visszatérni, illetve egyre későbbi időpontoktól kezdve fog a kifejezés a két érték által meghatározott sávban elhelyezkedni, de egy idő után a sorozat ingadozása ε pontossággal a limesz inferior és a limesz szuperior között lesz.

Az iterált logaritmusok tétele szerint tetszőleges $\varepsilon > 0$ esetén a trajektóriák a végtelenben egy valószínűséggel[13] a $-\sqrt{2t\ln\ln t}-\varepsilon$ és $\sqrt{2t\ln\ln t}+\varepsilon$ görbék által leírt tartományban tartózkodnak amely tartománynak a korábban említett $\pm 3\sqrt{t}$ parabola egy „durva" bár igen szemléletes és „praktikus" közelítése. Kicsi t értékekre a $\pm 3\sqrt{t}$ tartomány bővebb mint a $\pm\sqrt{2t\ln\ln t}$ pontok által megadott tartomány, de nagyon nagy t értékekre $\pm\sqrt{2t\ln\ln t}$ pontok által leírt tartomány bővebb mint a $\pm 3\sqrt{t}$ pontok által leírt parabola. A két görbe a

$$t=\exp\left(\exp\left(\frac{9}{2}\right)\right)\sim 1,2\times 10^{39}$$

pontban metszi egymást.

[10]Miként alább látni fogjuk a folyamat lokális és globális tulajdonságai szorosan összefüggnek.

[11]A 3 konstansnak nincsen jelentősége. Egyszerűen a statisztikában szokásos három szigma szabályra utalunk. De bárki gondolhat a négy vagy akár hét szigma szabályra is. Az alábbikban a lényeg az, hogy tetszőleges, elegendően nagy a-ra a $\pm a\sqrt{t}$ parabola nagy valószínűséggel tartalmazza a trajektórákat, ugyanakkor a trajektóriák ebből a parabolából elegendően hosszú idő alatt időnként egy valószínűséggel kilépnek.

[12]Az iterált logaritmusok elnevezés a képletben szereplő $\ln\ln$ kifejezés indokolja. Vagyis venni kell a t logaritmusának logaritmusát. Már maga a logaritmus függvény is elképesztően lassan nő. (Ugyanis az exponenciális függvény elképesztően gyorsan nő.) Az iterált logarimus függvény, elég nagy t értékekre "szabad szemmel nézve" nem nő, szinte állandó.

[13]Az egy valószínűséggel kitétel azt jelenti, hogy azok a trajektóriák, amelyekre a feltétel nem teljesül nulla valószínűséggel következnek be.

□

Miközben véges időhorizonton a trajektóriák „lényegében” egy fix korlát alatt maradnak[14] végtelen időhorizonton a trajektóriák korlátlanok. Ha a kimenetelek valamely A halmazán a w trajektóriái korlátosak lennének, akkor a $w(t)/\sqrt{t} \cong N(0,1)$ eloszlású változók sorozata az A halmazon nullához tartana[15], vagyis elég nagy t-re az A valószínűség közel nulla lenne, ami csak úgy lehetséges, ha az A valószínűsége már eredendően nulla. Némiképpen pontosabban érvelve vegyük észre, hogy $A = \cup_n A_n$, ahol az A_n halmaz azokból a kimenetelekből áll, amelyekre az n természetes szám a trajektória abszolút értékének egy felső korlátja, ugyanis az A halmaz a korlátos trajektóriák halmaza és minden korláthoz van olyan n természetes szám, amely nagyobb nála. Nyilván az összes n-re az A_n nem lehet nulla valószínűségű, ugyanis akkor az egész A halmaz valószínűsége is nulla lenne, mi pedig feltettük, hogy az A valószínűsége pozitív. Legyen δ tetszőleges. Ha a t elég nagy, akkor $n/\sqrt{t} \leq \delta$. Ilyenkor

$$0 < \mathbf{P}(A_n) \leq \mathbf{P}\left(\left|\frac{w(t)}{\sqrt{t}}\right| \leq \delta\right) = \mathbf{P}(|N(0,1)| \leq \delta).$$

A jobb oldalon álló valószínűség a δ alkalmas megválasztásával tetszőlegesen kicsi lehet, ami lehetetlen,ugyanis a bal oldalon egy fix pozitív szám van. Az így kapott ellentmondás miatt a $\mathbf{P}(A)$ valószínűség nulla[16]. Mivel egy igen fontos észrevételről van szó közvetlenül is kimondjuk:

1.2 Állítás.
Egy valószínűséggel a Wiener-folyamatok trajektóriái nem korlátosak.

Az, hogy a w trajektóriái nem korlátosak csak a nem korlátossággal kapcsolatos megfontolások egyik fele. Mivel minden Wiener-folyamat szimmetrikus, például a felülről való nem korlátosságból következik, hogy a trajektóriák sem alulról sem felülről nem korlátosak, vagyis az idő előrehaladtával egy valószínűséggel minden trajektória egyre nagyobb pozitív és egyre nagyobb abszolút értékű negatív számot is felvehet.

Összefoglalva: nem követünk el nagy hibát, ha „globálisan” úgy képzeljük el, hogy valamely w Wiener-folyamat $t \mapsto w(t)$ trajektóriái nagy valószínűséggel $\pm 3\sqrt{t}$ parabola által megadott tartományban bolyonganak miközben az idő előrehaladtával végtelen sokszor kilépnek a parabola által megadott tartományból[17] Alul is meg felül is. A trajektóriák az idő előrehaladtával „szétspricelnek”, egyre nagyobb „hullámokat” alkotva bolyonganak a plusz és a mínusz végtelen értékek között. Az idő előrehaladtával a $\pm 3\sqrt{t}$ parabolából való kilépések nagysága és ennek megfelelően időtartama egyre nagyobb lehet. A folyamat „küĺső burkolóját” a $\pm 3\sqrt{t}$ parabolától egyre távolodó $\pm\sqrt{2t \ln \ln t}$ görbék adják meg. Tetszőleges $\varepsilon > 0$ szám esetén bizonyos idő eltelte után[18] a trajektóriák az

$$\left(-\sqrt{2t \ln \ln t} - \varepsilon, +\sqrt{2t \ln \ln t} + \varepsilon\right)$$

intervallumon belül helyezkednek el.

[14]Természetesen a feltételezett folytonosság miatt minden trajektória minden véges szakaszon önmagában korlátos. Természetesen az egyes trajetóriák felső korlátjainak a halmaza nem korlátos. Vagyis egy adott szakaszon, persze esetlegesen igen kicsi valószínűséggel, akár mekkora nagy felső korlát előfordulhat. Az előző paragrafus szerint „nagy valószínűséggel", „gyakorlati szempontból" a trajektóriák véges időtartományon „egyenletesen" is korlátosak.

[15]Ugyanis az A halmazon a számláló korlátos, a nevező pedig végtelenbe tart.

[16]A pontos indoklást az iterált logarimusok tételével is elvégezhetjük. Vegyük észre, hogy az iterált logaritmusok tételében szereplő hányados limesz szuperiorja 1, vagyis a hányados egyik torlódási pontja, nevezetesen a legnagyobb, éppen az 1, vagyis a számláló végtelen sokszor „megegyezik" a nevezővel, miközben a nevező a plusz végtelenhez tart. A Wiener-folyamat szimmetrikus, így ugyanez igaz a mínusz végtelen oldalon is. Vagyis a trajektóriák alkalmas sorozaton a plusz végtelenbe és valamely másik alkalmasan választott sorozaton pedig a mínusz végtelenhez tartanak.

[17]A Wiener-folyamatok trajektóriái nagy valószínűséggel a parabolán belül haladnak. És minden rögzített t esetén „praktikusan" fel is tehetjük, hogy a parabolán belül van. Ugyanakkor végtelen sokszor megkisérelve egy kicsi, de azért pozitív valószínűségű eseményt végtelen számú bekövetkezést kapunk. Közgazdaságilag fogalmazva, egy forint nem túl nagy érték, de nagyon sok egy forintos nagyon nagy érték. Mindegy, hogy forint, dollár vagy euró. Csak sok legyen belőle! Másképpen, aki a kicsit nem becsüli, a nagyot nem érdemli.

[18]Az utolsó kilépési idő nagysága trajektória függő és nyilván függ az ε számtól.

A Wiener-folyamat korlátlanságának egy gyakran használt és idézett következménye az úgynevezett duplázási stratégia véges idő alatt való befejeződése. Tegyük fel, hogy fej vagy írás játékot játszunk és a kumulált nyereményt vizsgáljuk. Ha duplázva tesszük meg a téteket, akkor az n-edik lépés után a megtett tétek összege

$$1+2+4+\ldots+2^{n}=2^{n+1}-1.$$

Ha az $(n+1)$-edik lépésben bejön a várva várt eredmény, akkor mivel az utolsó tét 2^n volt, a nyeremény a játék szabályai szerint ennek duplája 2^{n+1} lesz, és így a nettó nyereményünk

$$2^{n+1}-\left(2^{n+1}-1\right)=1$$

lesz. Annak a valószínűsége, hogy az n-edik lépésben bejön a kívánt érték éppen 2^{-n}. Így tehát annak a valószínűsége, hogy valamikor nyerünk

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\ldots=1,$$

vagyis egy valószínűséggel a duplázási stratégiához szükséges lépések száma véges. A fej vagy írás játék nettó eredményét megadó folyamat nagyon hasonlít egy Wiener-folyamatra. Valójában a Wiener-folyamat a fej vagy írás játék „folytonos változata”. Legyen $a>0$ egy előre megadott nyereségi szint. Vezessük be a következő értéket

$$\tau_{a}\stackrel{\circ}{=}\min\left\{t: w\left(t\right)\geq a\right\}. \tag{1.1}$$

Egy adott ω kimenetel esetén $\tau_a\left(\omega\right)$ az első olyan időpont, amikor az a nyeremény, az ω kimenetel megvalósulása esetén, már a zsebünkben van. Mivel a Wiener-folyamat trajektóriái nem korlátosak, ezért egy valószínűséggel előbb vagy utóbb mindig be tudjuk gyűjteni az a nyereményt. Vagyis a Wiener-folyamat korlátlansága miatt a τ_a egy valószínűséggel mindig véges. Másképpen fogalmazva, ha tetszőleges sokáig tudunk játszani, akkor mindig nyerhetünk. Ez a modern matematikai pénzügyek nyelvén kifejezve azt jelenti, hogy korlátlan erőforrással rendelkezve mindig van arbitrázs stratégia. Másképpen fogalmazva az arbitrázs lehetetlensége csak akkor értelmes, ha hozzátesszük, hogy véges erőforrás esetén nincsen arbitrázs. Az isteneket semmi sem korlátozza, így számukra van arbitrázs. Következésképpen számukra a pénz is érdektelen. Nem emlékszem rá, hogy valahol arról olvastam volna, hogy Zeusz a tőzsdei monitorokat figyelte volna. Az arbitrázs, vagyis a könnyen való meggazdagodás vágya az emberi erőforrások szűkös voltának bizonyítéka[19].

1.1.2. A Wiener-folyamatok trajektóriáinak megfordítása

Miként említettük, nem csak egy Wiener-folyamat van. Ezt a legegyszerűbben úgy láthatjuk be, ha meggondoljuk, hogy ha a w Wiener-folyamat, akkor az $u\stackrel{\circ}{=}-w$ is Wiener-folyamat. Ugyanis kielégíti a folyamatosztályt definiáló feltételeket. Sokkal érdekesebb a következő példa:

1.3 Példa.
Ha w Wiener-folyamat, akkor az $u\left(t\right)\stackrel{\circ}{=}tw\left(1/t\right)$ folyamat is Wiener-folyamat.

Ahhoz, hogy valami Wiener-folyamat legyen a folyamatnak teljesíteni kell a Wiener-folyamatot mint folyamatosztályt definiáló feltételeket. A példában gondot jelent, hogy a $t=0$ időpontban az u nincsen definiálva, így az u nem is lehet szigorú értelemben Wiener-folyamat. Ugyanakkor a példa értelemszerűen úgy értendő, hogy a $t=0$ időpontra az u folyamatot a határértékével terjesztjük ki[20]. Első lépésben tehát meg kell mutatni, hogy

$$\lim_{t\searrow 0}u\left(t\right)\stackrel{\circ}{=}\lim_{t\searrow 0}tw\left(\frac{1}{t}\right)=0.$$

[19] Az arbitrázs hiánya elv tehát a mikroökonómiában tárgyalt szűkösségi elv sajátos megjelenése a pénzügyi elméletben.

[20] Valahogy úgy, ahogy a $\frac{\sin x}{x}$ függvényt az $x=0$ pontban az 1 értékkel definiálva folytonos függvényhez jutunk.

Vegyük észre, hogy a határérték tulajdonképpen értelmetlen, ugyanis adott t mellett a $w(1/t)$ az Ω téren értelmezett függvény[21], és függvények körében a határérték az elemi analízisben lényegében nincsen definiálva. Másképpen fogalmazva, ha függvények határértékéről beszélünk, akkor mindig meg kell mondani, hogy hogyan értjük a határértéket, ugyanis szemben a számokkal, illetve a véges dimenziós vektorokkal, a határérték a függvények körében nem egyértelműen definiált fogalom. Ebben a konkrét esetben a határérték úgy értendő, hogy az Ω egy olyan részhalmazán, amely valószínűsége 1 a határérték létezik és értéke éppen 0. Ennek oka a következő: Ha $t \stackrel{\circ}{=} 1/n$, akkor

$$u(t) = u\left(\frac{1}{n}\right) \stackrel{\circ}{=} \frac{w(n)}{n}.$$

A $w(n)$ eloszlása $N(0, \sqrt{n})$, és a $w(n)$ tekinthető n darab független $N(0,1)$ eloszlású valószínűségi változó összegének. Másképpen

$$u\left(\frac{1}{n}\right) \stackrel{\circ}{=} \frac{w(n)}{n} \cong \frac{\sum_{k=1}^{n} N(0,1)}{n},$$

ahol az összegben szereplő tagok függetlenek. A nagy számok erős törvénye szerint[22] a kifejezés a közös $N(0,1)$ eloszlás várható értékéhez, vagyis nullához tart. Másképpen fogalmazva, ha $u(0) \stackrel{\circ}{=} 0$, akkor az u folyamat folytonos lesz, vagyis a $t = 0$ időpontban megadott definíció miatt az u minden $t \geq 0$ időpontban automatikusan folytonos. Tetszőleges t-re az $u(t)$ eloszlása

$$u(t) \cong tN\left(0, \sqrt{\frac{1}{t}}\right) \cong N\left(0, \sqrt{t}\right),$$

és az egyes időszakokban a növekmények a w megfelelő tulajdonsága miatt nyilván függetlenek maradnak, így az u-ra a Wiener-folyamatot definiáló tulajdonságok teljesülnek. Következésképpen az u Wiener-folyamat. Triviálisan az u és a w különböző folyamatok. Az $u(t,\omega) \stackrel{\circ}{=} tw(1/t,\omega)$ folyamat felfogható úgy mintha a w folyamatot időben visszafelé, a $t = \infty$ időpontból visszafelé haladva, figyelnénk meg. Ez alapján a Wiener-folyamat tulajdonság független az időtengely irányától[23].

□

1.1.3. A Wiener-folyamatok nem deriválhatóak

Az előző pontban szereplő példa szerint a Wiener-folyamatok a végtelenben „hasonlóan" viselkednek mint a $t = 0$ pontban. Mivel a folyamat a stacionárius növekmények feltétele miatt az idő tengely mentén eltolható, ezért bármely időpont után kvalitatíve ugyan úgy ingadozik mint a nulla időpont után. Mivel a végtelenben „össze-vissza" ingadozik, ezért a megfordított, visszafelé olvasott folyamat a nulla időpontot követő tetszőleges időszakaszon ingadozik vadul. Mindegy, hogy a folyamatot távolról és hosszú ideig nézzük, vagy egészen közelről és rövid ideig. Minkét esetben a zűrzavart látjuk. A zűrzavar egészében és részleteiben is zűrzavar. Ez a lényege a következő méltán ünnepelt észrevételnek.

1.4 Állítás. (Paley–Wiener–Zygmund)
A Wiener-folyamat trajektóriái nem deriválhatóak.

[21] Adott t-re a az $\omega \mapsto w(t,\omega)$ függvényről van szó.

[22] A nagy számok erős törvénye szerint független, azonos eloszlással rendelkező változók számtani átlaga egy nulla valószínűségű eseménytől eltekintve a közös eloszlás várható értékéhez tart. A véges határértékhez való konvergencia szükséges és elegendő feltétele annak, hogy a közös eloszlásnak legyen várható értéke.

[23] Egy véletlen jelsorozatot elölről olvasni pontosan annyira értelmes dolog mint visszafelé olvasni. A kígyó a fejétől a farkáig pontosan olyan véletlen mint a farkától a fejéig. Természetesen a megjegyzés egy kicsit sántit, ugyanis a ténylegesen visszafelé megfigyelt $t \mapsto w(1/t)$ folyamat nem Wiener-folyamat. A t normalizáló szorzó szerepe is fontos, vagyis ha a kígyót visszafelé figyeljük meg, akkor a megfigyelés során egy a $t = 0$ időpontban elhelyezett tölcséren át kell préselni.

A Wiener-folyamat matematikailag legizgalmasabb tulajdonsága, hogy a folyamat trajektóriái egyetlen időpontban sem deriválhatóak. Ennek indoklása céljából egy tetszőleges t_0 időpontban írjuk fel a differenciahányadost:

$$\frac{\Delta w}{\Delta t_0} \stackrel{\circ}{=} \frac{w(h+t_0) - w(t_0)}{h}.$$

A definíciók alapján evidens, hogy tetszőleges $t_0 \geq 0$ időpont esetén a $v(h) \stackrel{\circ}{=} w(h+t_0) - w(t_0)$ folyamat szintén Wiener-folyamat. Ezt úgy interpretálhatjuk, hogy a Wiener-folyamat tulajdonság független attól, hogy a folyamatot mikor és hol kezdjük el megfigyelni. A különbségi hányados

$$\frac{\Delta w}{\Delta t_0} \stackrel{\circ}{=} \frac{v(h)}{h} \stackrel{\circ}{=} sv\left(\frac{1}{s}\right) \stackrel{\circ}{=} u(s)$$

módon írható, ahol értelemszerűen $s \stackrel{\circ}{=} 1/h$. Mivel a v Wiener-folyamat, ezért az $u(s)$ az előző példa szerint szintén Wiener-folyamat. Ha $h \to 0$, akkor $s \to \infty$, így a differenciahányados határértéke az egyes kimenetelekre Wiener-folyamatként „szétspriccel”.

□

Az állítás fontos következménye, hogy az úgynevezett „fehér zaj” folytonos időhorizont esetén nem tekinthető valós értékű sztochasztikus folyamatnak. A „fehér zaj” intuitív szinten a folytonosan beérkező apró, nulla várható értékkel rendelkező független „lökésekből” álló folyamat. A fehér zajt leginkább a rosszul beállított rádió sistergéseként, vagy a rosszul beállított televizó képernyőjén megjelenő pontok kavalkádjaként képzelhetjük el. A zaj azért fehér, mert nincsen benne „információ” és ezért nincsen szine. Hangsúlyozzuk, hogy a „fehér zajnak” az egyes időpontokban felvett értékei és nem a folyamat növekményei függetlenek. Mivel a „fehér zaj” egyes értékei függetlenek, a „fehér zaj integrálja”, a független tagokból álló részösszegek folyamata, a lökések kumulált összege független növekményű kellene, hogy legyen. Ha ugyanis az I_1 és I_2 időintervallumok metszete üres, akkor az I_1-ben bekövetkező hatások összege független lesz az I_2-ben bekövetkező hatások összegétől. Mivel a lökések relatíve egyenlő és kicsi értékek, ezért az „integrálfolyamatnak” folytonosnak kellene lenni, vagyis az apró lökésekből álló „fehér zaj” integrálfolyamata Wiener-folyamat. De a Wiener-folyamatoknak nincsen deriváltja, így a folytonos időparaméterű „fehér zaj”, mint közönséges sztochasztikus folyamat értelmetlen. A sztochasztikus analízis célja éppen az, hogy az intuitíve világos „fehér zaj” fogalmát matematikailag precíz módon kezelje. Ezen az úton az első lépés az, hogy megértsük, hogy a vállakozás miért is nem olyan egyszerű.

Ezen a ponton érdemes egy „filozófiai” kérdést is felvetni. Miért mondják a matematikusok, hogy a fehér zaj fogalma értelmetlen, miközben a fehér zajt valóságként hallhatjuk és láthatjuk. Elment ezeknek az esze? Az ellentmondásra a válasz természetesen a modell és a valóság nyilvánvaló különbözőségében rejlik. A sztochasztikus analízis a valóságos folyamatok egy képe. Hasonlóan, ahogyan a fénykép nem azonos a fényképen szereplő személlyel, a sztochasztikus analízis is csak bizonyos szempontokból tükrözi a mögöttes megfigyeléseket, folyamatokat. Számtalan statisztikai vizsgálat létezik, amelyek azt igazolják, hogy a ténylegesesen megfigyelt árfolyammozgások nem írhatók le a matematikai pénzügyek egyenleteivel[24]. Nyilván nem! Miért olyan meglepő ez? A két dolog mindjárt az elején szétválik. Miközben a „fehér zaj” tapinthatóan, hallhatóan létezik, a fehér zaj matematikai modelljében a fehér zaj nem értelmezhető. Csak az integrálját tudjuk definiálni! Természetesen a modellt és a tényleges tapasztalatokat mindig össze kell mérni, a kettőt tapasztalati úton „kalibrálni kell”. A közgazdaságtan egyik alapvető problémája, hogy ezt nem végzi el rutinszerűen. Bár életünk párja nem azonos a róla készített esküvői fényképpel, ennek ellenére érdemes az esküvői fotókat eltenni és időnként elővenni. Miért? *Hogy tudjuk, hogy mikor és miért tévedtünk!*

[24] Az eloszlások farka vastag, a volatiltás klasztereződik, bla, bla, bla....

1.2. Poisson- és Lévy-folyamatok

Természetesen Wiener-folyamaton kívül számos más típusú sztochasztikus folyamat létezik. Általában mi csak folytonos trajektóriával rendelekző folyamatokat tárgyalunk, de röviden érdemes a nem folytonos folyamatokat is megvizsgálni. A nem folytonos sztochasztikus folyamatok közül a legfontosabbak a Poisson-folyamatok.

1.2.1. Poisson-folyamat

A Wiener-folyamat mellett a sztochasztikus folyamatok másik „királya" a *Poisson-folyamat.* A Wiener-folyamat sok kis, önmagában jelentéktelen, gyakran, a matematikai absztrakció szerint folyamatosan, bekövetkező infinitezimális hatású esemény eredményeként, eredőjeként létrejövő viselkedési forma modellezésére szolgál[25]. Ezzel szemben a Poisson-folyamat az $\mathbb{R}_+$ félegyenes mint időtengely mentén ritkán, egymástól függetlenül bekövetkező események számát adja meg. A későbbiek szempontjából érdemes hangsúlyozni, hogy ha a $\pi(t,\omega)$ folyamat Poisson-folyamat, akkor a $t \mapsto \pi(t,\omega)$ trajektóriáik monoton nőnek és nem folytonosak. Az, hogy az események ritkán következnek be, a következőt jelenti: elegendően kicsi szakaszon már csak legfeljebb egy esemény következhet be, vagyis az események bekövetkezésének időpontjai nem torlódhatnak. Ennek következtében a különböző $\omega \in \Omega$ véletlen kimenetelekre megadható egy $(I_n(\omega))$, pozitív számokból álló, természetesen ω-tól függő, számsorozat, amely elemei a különböző események között eltelt, ***pozitív*** hosszúságú időtartamokat adják meg. Az ω kimenetel realizációja esetén az első esemény az $I_1(\omega) > 0$ időpontban következik be, a második esemény $I_2(\omega) > 0$ időpont múlva, vagyis az $I_1(\omega) + I_2(\omega)$ időpontban stb. A Poisson-folyamat fontos tulajdonsága, hogy a Wiener-folyamathoz hasonlóan független és stacionárius növekményű. A stacionaritás feltétele azt jelenti, hogy az időtengely bármely azonos hosszúságú részén a folyamat által számlált események azonos eséllyel következhetnek be, és mivel a folyamat független növekményű, ezért az egyes diszjunkt időszakaszokon a számlálandó események egymástól függetlenül következhetnek be. Hasonlóan a Wiener-folyamathoz a Poisson-folyamat mint valószínűségszámítási jelenség független attól, hogy az időtengely mely pontját tekintjük indulópontnak, vagyis mikor kezdjük el a folyamat mögötti események számolását. Ennek megfelelően a Poisson-folyamat egy olyan ritka jelenségsorozat eseményeit számlálja, amely eseményeket egy struktúráját nem változtató rendszer generál, nyilván ritkán és véletlenszerűen[26].

Ha dt egy elegendően kicsi időhossz, akkor a ritkasági feltétel miatt egy dt hosszú időszakaszon csak egyetlen esemény következhet be. Legyen λdt közelítőleg annak a valószínűsége, hogy a számlálandó események valamelyike egy dt hosszú szakaszon bekövetkezik. Ha λ nagy, akkor az adott rögzített dt hosszú szakaszon az esemény bekövetkezésének valószínűsége nagy, így a számlálandó események gyakran következnek be, ha λ kicsi akkor ritkán. Másképpen, ha a λ nagy, akkor átlagban két esemény között kevés idő van, ha kicsi, akkor az átlagos várakozási idő hosszú.

[25] Ez a feltétel nyilván nem mindig teljesül. A szokásos példa a következő: Ha egy stadionba összegyűjtünk 100 ezer embert majd hozzátesszük a világ legnehezebb emberét, az átlagos súly nem fog változni. Ha azonban ezt a jövedelmekkel tesszük, könnyen elképzelhető, hogy a világ leggazdagabb emberének nagyobb lesz a vagyona, vagy akár a jövedelme, mint a stadionban levő emberek összes vagyona, illetve jövedelme. Főleg, ha az afrikai éjben a stationban éppen Ghána és Kamerun csapata játszik. A példából világos, hogy vannak esetek, amikor az átlagtól való eltérést a rendszer bünteti. Ez például a testmagasság esetén így van. Ilyenkor a Wiener-folyamat jól használható. Vannak azonban esetek, amikor a győztes mindent visz. Ez a társadalmi különbségek esetén igen gyakori. Gondoljunk csak arra, hogy a „divat" milyen „igazságtalan" tud lenni. A divatos könyvet mindenki olvassa, az író dúsgazdag. A költők pedig gyakran nyomorognak. Valamely versenyszám győztese a győztes, a második helyezete a vesztes. Ha az átlagtól való eltérést a rendszer nem bünteti, ha az átlag körüli szórás nagyon nagy, akkor Wiener-folyamat valószínűleg használhatatlan modellje a vizsgált jelenségnek.

[26] Példaként szokás a balesetek, földrengések, csőd események számát hozni. De szokás valamely telefonközpontba beérkező hívások számát is említeni. Ez utóbbi példa esetlegesen sántíthat. Ha mindenkinek van telefonja és mindenki éjjel-nappal telefonál, nehéz a ritkasági feltételt komolyan venni. És valóban, számos statisztikai vizsgálat ismert, amely azt mutatja, hogy a Poisson-folyamatra jellemző exponenciális várakozási idő például a telefonhívások közötti időtartamokra nem jellemző. Meg vagyunk lepve? Nem igazán. A Poisson-eloszlás „ritka" események számáról szól, mi pedig éjjel nappal, a metróban, az utcán, tetszőleges percdíj esetén folyamatosan csevegünk. Még mondja valaki, hogy a marketing nem, komoly dolog.

A λ tehát az esemény bekövetkezésének intenzitását adja meg: a sűrűn bekövetkező, intenzíven jelentkező események λ paramétere nagy, a ritkán bekövetkezőké kicsi.

Ha egy $0 < T < \infty$ hosszú szakaszt dt hosszú kis szakaszokra bontjuk, akkor $N \triangleq T/dt$ darab kis részintervallumunk lesz. Mivel az egyes dt hosszú részintervallumokon az egyes események bekövetkezése egymástól független, a T hosszú időszak alatt

$$(1 - \lambda dt)^N = \left(1 - \frac{\lambda T}{N}\right)^N \approx \exp(-\lambda T)$$

annak a valószínűsége, hogy a T hosszú időtartam alatt nem következik be az esemény. A valószínűséget megadó szorzat felírásakor természetesen felhasználtuk, hogy az egyes dt hosszú részszakaszokon a bekövetkezés, pontosabban a be nem következés, valószínűsége minden részszakaszon azonos. Ez éppen a stacionaritás feltétele. A szorzat felírásakor felhasználtuk még, hogy a számlálandó esemény be nem következése az egyes részintervallumokon a többi részintervallumtól függetlenül nem történik meg. Másképpen, ha τ jelöli azt a valószínűségi változót, hogy mennyi idő múlva jön a következő esemény, akkor

$$\mathbf{P}(\tau > T) = \exp(-\lambda T).$$

Ebből következően az események bekövetkezése között eltelt időt megadó $\omega \mapsto I_n(\omega)$ valószínűségi változók eloszlása exponenciális, és az eloszlás paramétere[27] λ. Némiképpen általánosabban: annak a valószínűsége, hogy egy T hosszú szakaszon pontosan k esemény következik be

$$P_k(T) = \binom{N}{k} (\lambda dt)^k (1 - \lambda dt)^{N-k},$$

ahol $N \triangleq T/dt$ a dt hosszú szakaszok száma. Az $\binom{N}{k}$ binomiális együttható képletét beírva

$$P_k(T) = \frac{N!}{k!(N-k)!} \frac{(\lambda T)^k}{N^k} \left(1 - \frac{\lambda T}{N}\right)^{N-k}.$$

Ha N nagy és k kicsi[28], akkor

$$\begin{aligned} P_k(T) &= \frac{(\lambda T)^k}{k!} \left(1 - \frac{\lambda T}{N}\right)^{N-k} \frac{N!}{N^k (N-k)!} = \\ &= \frac{(\lambda T)^k}{k!} \left(1 - \frac{\lambda T}{N}\right)^{N-k} \frac{N(N-1)\cdots(N-k+1)}{N^k} \approx \\ &\approx \frac{(\lambda T)^k}{k!} \exp(-\lambda T), \end{aligned}$$

vagyis egy T hosszú időszak alatt bekövetkező események száma Poisson-eloszlást követ λT paraméterrel. Ez indokolja, hogy a folyamatot Poisson-folyamatnak hívjuk. A Poisson-eloszlás várható értékének képlete szerint egy T hosszú időszakasz alatt bekövetkező események számának várható értéke λT. Ez tulajdonképpen nem meglepő, ugyanis az exponenciális várakozási idő miatt két esemény között átlag $1/\lambda$ hosszú időintervallum figyelhető meg, vagyis egységnyi idő alatt átlag λ esemény következik be, így T idő hosszú alatt átlagosan λT darab esemény figyelhető meg.

Összefoglalva: A Poisson-folyamat a valószínűségszámítás két fontos eloszlását kapcsolja össze. Az események közötti idő hossza exponenciális eloszlású, valamely adott időszak alatt bekövetkező események száma viszont Poisson eloszlású. Az eloszlások paraméterei a következők: Ha λ az események bekövetkezésének intenzitása, akkor a két esemény közötti várható időtartam hossza $1/\lambda$,

[27] Emlékeztetünk arra, hogy a τ változó exponenciális eloszlású, ha $\mathbf{P}(\tau < x) = 1 - \exp(-\lambda x)$. Ebből $\mathbf{P}(\tau \geq x) = \exp(-\lambda x)$. Az exponenciális eloszlás várható értéke $1/\lambda$, vagyis ha a λ intenzitási paraméter nagy, akkor az egyes események között eltelt idő várható értéke, $1/\lambda$, kicsi.

[28] Vagyis ha rögzített k mellett $dt \to 0$.

ugyanis az exponenciális eloszlás várható értéke $1/\lambda$. Ennek megfelelően egy fix T időszak alatt λT esemény következik be átlagosan, így az események számát megadó Poisson-eloszlás várható értéke λT. Ha átlagban két percenként változik az ár legalább egy forinttal, akkor egy óra alatt átlagban 30 egy forintnál nagyobb árváltozást figyelhetünk meg. Ha átlagban két percenként változik az ár, akkor a két árváltozás közötti idő átlagos hossza 2 perc. Ilyenkor, mivel az exponenciális eloszlás várható értéke $1/\lambda$ a $\lambda = 1/2$. Ebből következően 60 perc alatti események várható száma $60 * 1/2 = 30$.

1.2.2. Lévy-folyamatok

A Poisson- és a Wiener-folyamatok egy bővebb folyamatosztály, a *Lévy-folyamatok* osztályának alapvető reprezentánsai. Valamely $\zeta(t, \omega)$ folyamatot Lévy-folyamatnak, pontosabban Lévy-típusú folyamatnak mondunk, ha

1. $\zeta(0) = 0$,
2. a $\zeta(t)$ stacionárius és független növekményű,
3. a $\zeta(t)$ trajektóriái regulárisak abban az értelemben, hogy jobbról folytonosak és rendelkeznek bal oldali véges határértékkel.

A korábbiakban nem szereplő, így magyarázatra szoruló megkötés a harmadik. A feltétel szerint valamely $t \mapsto \zeta(t, \omega)$ trajektória megfigyelése esetén egy t_0 időpontban két dolog lehetséges: vagy a trajektória a t_0 időpontban folytonos, vagy a trajektória ugrik. Az ugrás definíció szerint a szakadás egy igen speciális esete, amikor az adott pontban a két különböző oldalról vett határérték létezik és véges, de a két határérték nem egyezik meg[29]. A feltétel szerint a trajektória értéke minden időpontban megegyezik a trajektória jobb oldali határértékével. A Wiener-folyamat folytonos Lévy-folyamat. Nem egyszerű igazolni, de megmutatható a fordított implikáció is, vagyis minden folytonos Lévy-folyamat egy lineáris trendtől eltekintve Wiener-folyamat[30]. Az állítás igazolása abból áll, hogy meg kell mutatni, hogy ha a folyamat trajektóriái folytonosak, akkor a folyamat értéke minden időpontban normális eloszlású[31]. A trajektóriákra tett regularitási feltétel miatt a Lévy-folyamatok mindegyike három fajta folyamat lineáris kombinációjára bontható. A három „bázisfolyamat" a következő:

1. lineáris trend,
2. Wiener-folyamat, illetve egy
3. tiszta ugrófolyamat.

A lineáris trend oka, hogy a Lévy-folyamatokat definiáló feltételek között nem szerepel, hogy a növekmények várható értéke nulla legyen[32], következésképpen előfordulhat, hogy a növekmények várható értéke az idővel arányosan nő, illetve csökken. A folyamat folytonos részét a Wiener-folyamat reprezentálja. A folyamat ugrásainak szerkezete, a trajektóriákra tett feltételek miatt, igen speciális. Ha $a > 0$, akkor a folyamat α-nál nagyobb ugrásai nem torlódhatnak, ugyanis ha torlódnának, akkor a trajektóriákra tett regularitási feltételek az ugrások torlódási pontjában nem teljesülnének, ugyanis a torlódási pontban a folyamat valamelyik határértékének, vagyis vagy a jobb, vagy a bal oldali határértéknek, az a pozitivitása miatt, végtelennek kellene lenni. Ebből következően az $a > 0$ értéknél nagyobb abszolut értékű ugrások ritkák[33], így az a-nál nagyobb nagyságú ugrások száma Poisson-folyamatot alkot. Ebből következően az $(a - da, a + da)$ szakaszba eső ugrásokat megadó részfolyamat jól közelíthető egy alkalmas $\lambda(a)$ paraméterű $a \cdot \pi(t, \omega)$ Poisson-folyamattal, ahol a π természetesen az ugrásokat számláló Poisson-folyamat és $\lambda(a)$ pedig az a körüli ugrások időben való bekövetkezésénk intenzitásától függő, a Poisson-folyamat tárgyalásakor említett konstans. Ebből következően egy lineáris trendtől eltekintve minden Lévy-

[29] Másképpen fogalmazva az oszcilláló, illetve a végtelenbe tartó határértékeket definíció szerint kizárjuk.

[30] Egy konstans folyamat csak akkor Lévy-folyamat, ha a konstans értéke nulla. Minden $x(t) = at$ alakú lineáris függvény Lévy-folyamat és mint ilyen tulajdonképpen a legegyszerűbb Lévy-folyamat.

[31] Ez, miként korábban már említettük a centrális határeloszlás-tétel egy igen éles verziójából következik.

[32] Sőt, elképzelhető, hogy a várható érték végtelen, vagy esetlegesen nem is létezik!

[33] Miként írtuk a ritkaság azt jelenti, hogy az egyes bekövetkezési időpontok nem torlódhatnak.

folyamat egy Wiener-folyamat és esetlegesen végtelen sok különböző $\lambda(a)$ paraméterű Poisson-folyamat végtelen súlyozott összegeként képzelendő el[34]. A folyamat ugrásainak intenzitását megadó összefüggést vagyis az $a \mapsto \lambda(a)$ hozzárendelést a folyamat *spektumának* mondjuk. A spektrum elnevezést az indokolja, hogy miként a fény spektruma megadja a fénysugár felbontását különböző rezgésű „tiszta" fénysugarakra, egy Lévy-folyamat $a \mapsto \lambda(a)$ spektruma a folyamat felbontását adja meg $\lambda(a)$ intenzitású „tiszta" ugró folyamatokra. Természetesen konkrét Lévy-folyamat esetén a spektrum a folyamat közvetlen megfigyelése alapján kiszámolható, sőt kiszámolandó, ugyanis a folyamat ugrásaira vonatkozó legalapvetőbb információkat éppen a spektrum tartalmazza. A spektrum megfigyelése az egyes ugrásokhoz tartozó Poisson-típusú részfolyamatok megfigyelését jelenti. Ez indokolja azt, hogy a Wiener-folyamatok mellett a Poisson-folyamatokat tekintjük a sztochasztikus folyamatok másik alaptípusának. Valószínűségszámítási értelemben a Lévy-folyamatokat a lineáris komponens, a Wiener-komponens együtthatója, illetve a spektrálfüggvény jellemzi. A három objektumot együttesen a folyamat *karakterisztikájának* szokás nevezni. Lévy-folyamat esetén csak a karakterisztika bír valószínűségszámítási jelentőséggel. Ténylegesen maga a ζ Lévy-folyamat nem figyelhető meg, csak a folyamat valamely, véletlenszerűen választott realizációja. A megfigyelt realizáció alapján várhatóan[35] reprodukálható a karakterisztika. Valamely folyamattal kapcsolatban csak azok a matematikai formulák bírnak valószínűségszámítási jelentőséggel, tartalommal, amelyek statisztikailag megfigyelhető adatokra épülnek. Lévy-folyamatok esetén ez azt jelenti, hogy a valószínűségszámítási szempontból releváns formulák adatként egyedül a karakterisztikát tartalmazhatják.

A figyelmes olvasónak feltünhetett, hogy a Lévy-folyamatok értékét a trajektória jobb oldali határértékével definiáltuk. Miért a jobb és miért nem a bal oldali határértéket vettük? A kérdés pontos tisztázása igen messze vezetne, de a két féle folytonosság közötti eltérés heurisztikusan megérthető. Az időtengely nem szimmetrikus! Az idő, a számegyenes szokásos ábrázolásában, balról jobbra halad. Az ugrások időpontjában a jobb oldali határérték, balról jobbra haladva soha sem látható előre, a bal oldali, legalábbis infinitezimálisan, azonban előrelátható. Ennek megfelelően a balról folytonos folyamatokat, így a folytonosakat is, előrejelezhetőnek mondjuk, a jobbról folytonosakat pedig kockázatosnak. Az ugrásokat is tartalmazó Lévy-folyamatok kockázatosak. A kockázatosságuk abból ered, hogy a folyamat nagysága tetszőleges időpontban még infinitezimálisan sem jelezhető előre. A két folyamatosztály közötti eltérésre a sztochasztikus integrálás tárgyalásakor hallgatólagosan később vissza fogunk térni[36].

1.2.3. Bolyongások, kompenzált Lévy-folyamatok

A Lévy-folyamatok esetén a növekmények várható értékére nem tettünk megkötést. Többek között az is előfordulhat, hogy a növekmények eloszlásának nincsen várható értéke. Tegyük fel, hogy az egységnyi időtartományhoz tartozó növekmény várható értéke létezik, és az egységnyi idő alatti növekmény várható értékét jelölje M. Ha $\xi(t,\omega)$ jelöli a Lévy-folyamatot, akkor az $\eta(t,\omega) \doteq \xi(t,\omega) - tM$ folyamat szintén Lévy-folyamat, de az η növekményeinek várható értéke már nulla. A $t \mapsto tM$ lineáris függvényt a ξ folyamat trendjének, vagy *kompenzátorának* mondjuk. A nulla

[34] Az állítás csak heurisztikusan igaz, elképzelhető, hogy a folyamat ugrásaiból álló sorozat az időben való bekövetkezés sorrendjében konvergens, de nem abszolút konvergens, így ha az ugrásokat a bekövetkezésüktől eltérően átcsoportosítjuk, vagyis előbb nagyság szerint, aztán idő szerint rendezzük őket, akkor nem kapunk konvergens konstrukciót. A felmerülő probléma heurisztikusan igen nehezen áttekinthető és érzékelhető, így csak mint érdekességet jelezzük. A kérdés összefügg a később tárgyalt kvadratikus variációval. Minden Lévy-folyamat négyzetes megváltozása véges, de a teljes megváltozása nem feltétlenül. A heurisztikusan vázolt felbontás csak akkor működik, ha a kvadratikus variáció mellett a teljes megváltozás is véges. Ha csak a négyzetes megváltozás véges, akkor a lineáris trend egy részével az ugrásokat kompenzálni kell. Az ugró rész és a lineáris trend viszonya igen szövevényes, következésképpen matematikailag varázslatosan szép, az alkalmazások szempontjából azonban másodlagos.

[35] Mint általában a statisztikában, most is csak remélhetjük, hogy a realizáció elég reprezentatív. Az meg már filozófiai kérdés, hogy mit kezdünk azokkal a tulajdonságokkal, ami a konkrét megfigyelt realizációban nem figyelhető meg, ugyanis az adott tulajdonságot a véletlen trajektória nem reprezentálja. Például ha a spektrum egy része a konkrétan megfigyelt trajektóriában nem jelentkezik, akkor a nem jelentkező ugrások most léteznek vagy sem?

[36] A sztochasztikus integrálás során az integrátor kockázatos, az integrandus előrejelezhető.

várható értékkel rendelkező Lévy-folyamatokat ***bolyongásnak***[37] mondjuk. Ha a ξ Lévy-folyamat és a folyamatnak létezik kompenzátora, akkor az η kompenzált folyamat bolyongás. A kompenzáció elnevezés oka a következő: Ha a ξ Lévy-folyamat valamilyen „játék” nyereményét írja le, akkor a nyereményfolyamatot két felé bonthatjuk: A $t \mapsto tM$ trend biztos nyereménynek tekinthető, a $\xi(t,\omega) - tM$ bolyongás rész pedig a játék véletlen része. Az η bolyongás nyilván fair játék, az η várható értéke minden időpontban nulla, a kompenzált η esetén valódi, korrekt szerencsejátékról van szó. A ξ játék azonban csak akkor fair, ha a játékban való részvételért kompenzáció jár. Ésszerű feltételek mellett csak akkor vehetünk részt a játékban egy t hosszú időszakon keresztül, ha kifizetjük, vagy megkapjuk a tM részvételi díjat. Ha $\xi(t,\omega)$ valamilyen biztositási esemény során keletkező kár folyamata, akkor a tM tekinthető a $\xi(t,\omega)$ véletlenszerűen jelentkező kár elleni biztosításért járó biztosítási díjnak.

1.2.4. Markov-láncok

Az olvasónak talán feltűnt a Poisson és az exponenciális eloszlás kitüntetett szerepe. Valóban, folytonos időhorizonton három ismert eloszlásé a főszerep: normális, exponenciális és Poisson. Igazándiból azonban a Poisson eloszlás pusztán egy másik arca az exponenciális eloszlásnak. Valójában a valószínűségszámításban két központi jelentőségű eloszlás létezik: A normális és az exponenciális. Némi egyszerűsítéssel és erős túlzással a normális eloszlás a pozitív és negatív értékeket egyaránt felvevő változók eloszlása, az exponenciális a pusztán pozitív értékeket felvevő változók standard modellje[38]. A leginkább kézenfekvően pozitív értékeket felvevő változó az eltelt idő hossza. A várakozási idők standard modellje az exponenciális eloszlás, a Poisson-eloszlás pedig úgy kerül a képbe, hogy ha bizonyos egymást követő események közötti időtartamokat azonos paraméterű és független exponenciális eloszlású változók sorozata írja le, akkor egy fix időtartam alatt bekövetkező események száma Poisson-eloszlású. Vagyis ha valamilyen események bekövetkezését számolom, akkor a természetes eloszlás a Poisson, ha idő hosszakat mérek, akkor a természetes keret az exponenciális eloszlás. De miért éppen az exponenciális eloszlás? Van-e erre valami hasonló, általános elv mint a centrális határeloszlás tétele, amelyre hivatkozva indokolni szokás a normális eloszlást. Az exponenciális eloszlás fontosságát az adja, hogy homogén Markov-folyamatok esetén az egyes állapotokban való várakozás időtartama mindig exponenciális eloszlású[39].

Bár a későbbi tárgyalás szempontjából nem bír jelentős szereppel röviden, néhány sor erejéig mégis foglalkozzunk a *Markov-folyamatokkal.* A Lévy-folyamatok bár széles körben használhatóak nem minden sztochasztikus jelenség leírására alkalmasak. Tulajdonképpen a különböző alkalmazásokban a legtermészetesebben jelentkező osztály nem a matematikai pénzügyekben kézenfekvően jelentkező Wiener-folyamatok és az alább bevezetett martingálok, illetve szemimartingálok. Ezek az osztályok viszonylag későn kerültek a matematika vizsgálatok homlokterébe. A leginkább kézenfekvő, leginkább természetes osztály a *Markov-láncok* osztálya.[40]

Hogy konkrét példáról beszéljünk induljunk ki abból, hogy adott kötvények egy halmaza. A kötvények nem feltétlenül kereskedettek, de mindegyik valamilyen rating kategóriába tartozik. Az egyszerűség kedvéért a rating osztályok száma legyen N. Mivel a rating kategória a kötvény fizetőképességének valószínűségét reprezentálja, ha valamely kötvény egy alacsonyabb kategóriába kerül, akkor az ára csökken. A kötvényekből álló portfolió értékének dinamikáját nyilvánvalóan az összetételének megváltozása adja meg. Ha nagyon sok kötvény kerül alacsonyabb kategóriába,

[37] A bolyongás fogalma az irodalomban csak részben jól definiált. Szokás bolyongásról csak diszkrét időhorizonton beszélni.

[38] Természetesen minden ilyen általános kijelentés triviálisan hamis és ostobán leegyszerűsítő. Gondoljunk arra, hogy a részvények árát általában lognormális eloszlással modellezzük. Ugyanakkor a hozamok eloszlása a matematikai pénzügyek standard feltételei szerint normális. Az exponenciális és a normális eloszlás kitüntetett szerepéről szóló állítás csak egy durva és gyakran hibás, de azért időnként jól használható iránytűnek tekinthető. Mégis merre van észak? Hát ott ahol a fák mohásak.

[39] A várakozási időt leíró eloszlás paramétere függhez az állapottól, amelyben a rendszer várakozik és az exponenciális eloszlás lehet elfajuló is, vagyis a paramétere lehet nulla vagy végtelen is.

[40] A Markov-láncok elmélete számtalan alkalmazással rendelkezik.

akkor a portfolió értéke csökken, ha a kötvények besorolása átlagban nő, akkor a portfolió értéke feltehetően növekszik. Tegyük fel, hogy a rating besorolás tökéletesen fedi a kötvény tényleges helyzetét. Ebből következően csak új információ hatására változik a besorolás. Feltételezzük, hogy valaminek történni kell, valamilyen új információ kell ahhoz, hogy egy kötvényt átsoroljuk az egyik kategóriából a másikba. Idáig a dolog igen emlékeztet a bolyongásra, illetve a Lévy-folyamatokra. Van azonban egy további feltétel: Az új információ beérkezésének módja és hatása egyedül az aktuális rating kategória függvénye. Más paraméterű folyamatok lökik ki az egyes osztályokban szereplő kötvényeket az aktuális állapotukból. Ugyanakkor az azonos kategóriában levő kötvényekre azonos erők hatnak. Továbbá a változás hatása is más és más lesz az egyes kategóriákban. Ennek megfelelően a múlt nem igazán hat a jövőre[41], de a jelen igen. Valamely folyamatot *Markov-folyamatnak* mondunk, ha a jövő előrejelzése független a múlttól, de azért a jövő függhet a jelentől. Másképpen a jövő csak a jelenen keresztül függ a múlttól. Ennek megfelelően a Lévy-folyamatok nyilván Markov folyamatok. A jövő állapot függ a növekménytől és a jelen állapottól. Ha $t > s$, akkor

$$X(t) = X(s) + X(t) - X(s).$$

Az $X(t) - X(s)$ növekmény a Lévy-folyamatot definiáló függetlenségi feltétel miatt a múlt alapján nem becsülhető meg. De az $X(t)$ értéke szempontjából az $X(s)$ értéke fontos. Egy fej-vagy írás játékban egy adott időszak alatti becsődölés valószínűsége függ attól, hogy mennyi pénzünk volt a játék kezdete előtt!

A rating osztályokra visszatérve vegyük észre, hogy a Markov-folyamatok korábban idézett tulajdonsága alapján az egyes kategóriákban való tartózkodás ideje exponenciális eloszlású, vagyis minden rating osztályban a kötvények egy exponenciális eloszlású várakozási idő szerint „pihennek”. Az egyes osztályokhoz tartozó λ_i intenzitási paraméterek nem feltétlenül azonosak. Az egyes osztályokból való „kilökődést” generáló folyamat hasonló a Poisson-folyamatoknál tárgyalt folyamatokhoz. Ha azonban az ugrást kiváltó ok bekövetkezik, akkor szemben a Poisson-folyamattal nem pusztán húzunk egy vonalat, na még egy ugrást láttunk. Ha ezt tennénk, akkor N darab Poisson-folyamatunk lenne. A rating osztályok közötti mozgást megadó Markov-lánc az N darab „kilökődési” folyamat „összekapcsolásából” áll. Megnézzük, hogy az ugrást követően hova lépett a kötvény, mi lett az új rating osztály. Vagyis minden állapot esetén a λ_i paraméter mellett azt is megfigyeljük, hogy mi az új állapot eloszlása, hova lépett az egyed. A folyamat működése tehát a következő: Várakozás, majd egy új állapotba való ugrás, majd megint várakozás, majd megint ugrás stb. A lényeges feltétel, hogy mint a várakozás időtartamának eloszlása, mind a lehetséges új állapotok eloszlása csak az éppen aktuális állapottól függ és független attól, hogy milyen úton jutott el az adott kötvény a megfelelő rating osztályba.

Látható, hogy a modell paraméterei általában könnyen megfigyelhetőek és ez a Markov-láncokat a gyakorlati alkalmazások szempontjából kiemelkedően fontossá teszik. Mi azonban csak azért tárgyaltuk röviden a Markov-láncokat, hogy jelezzük, hogy az alább tárgyalt martingálelméleten kívül más fejezetei is vannak a sztochasztkus folyamatok elméletének[42].

1.3. A tökéletes véletlen: martingálok

A bolyongások a fair véletlen folyamatok egy speciális osztályát alkotják. A martingál fogalma a bolyongás fogalmának „leheletfinom” általánosítása. Heurisztikusan a martingálokat a fair szerencsejátékokkal szokás azonosítani, de a két fogalom azonosítása csak azért nem megfelelő, mert nem tudjuk, hogy mit jelent a „fair szerencsejáték” kifejezés. Egy szerencsejáték pontosan akkor fair, ha a játék kumulált nyereménye martingált alkot! Egy másik definíció, hogy egy játék fair,

[41] Ez az a feltétel, miszerint a rating osztály mindent tartalmaz, amit érdemes a kötvényről tudni.

[42] Valójában miként jeleztük többről van szó. Az alkalmazások többsége a Markov-láncokra és nem a martingálelméletre épül. A sztochasztikus analízis és a pénzügyi matematika a sztochasztikus folyamatok alkalmazásának csak egy igen divatos töredéke.

ha a játékban való részvételért nem jár kompenzáció. OK, de mi a kompenzáció definíciója, milyen folyamatokat tekinthetünk kompenzációnak? Egy további definíció szerint egy játék fair, ha az eredménye tökéletesen véletlen. De mikor lesz egy sorozat eredménye teljesen, vagy tökéletesen véletlen? A martingál definíciója a sztochasztikus folyamatok elméletének egyik nagy eredménye. Igen, a matematika tételekről és fogalmakról szól! A tételek mellett igen fontosak, ha nem fontosabbak, a megfelelő jó definíciók, fogalmak meghatározása. A valószínűségszámítás, illetve a sztochasztikus folyamatok egyik célja a „tökéletes véletlen”, a tovább nem bontható „atomisztikusan strukturálatlan véletlen”, a „fehér zaj” definiálása. Mikor tekintsünk egy (ξ_k) sorozatot teljesen véletlennek, „fehér zajnak”? Egyrészről nyilván olyan definíciót akarunk, amely közel áll a fogalom köznapi értelmezéséhez, másrészt olyan fogalmat szeretnénk, amellyel azért „könnyű számolni”. Ha a (ξ_k) sorozat tagjai csak *korrelálatlanok*, akkor a matematikai tapasztalat azt mutatja, hogy a (ξ_k) sorozat matematikailag túl általános[43]. A korrelálatlanság túl enyhe megkötés. A matematikai tapasztalat, igen a matematikai tapasztalat, azt mutatja, hogy a korrelálatlan sorozatokkal nehéz dolgozni, így a korrelálatlan sorozatok praktikus[44] okokból nem tekinthetőek a véletlen sorozat megfelelő modelljének. Kolmogorov egyik alapvető hozzájárulása a valószínűségszámításhoz az volt, hogy megmutatta, hogy ha a (ξ_k) sorozat tagjai *függetlenek*, akkor a (ξ_k) sorozattal „könnyű” dolgozni, vagyis elegáns módon beláthatóak olyan tételek, amelyeket a „tökéletesen véletlen” sorozatoktól heurisztikusan elvárunk.

A függetlenség fogalmát a bevezető valószínűségszámítási kurzusokon természeti törvényként, a priori kategóriaként szokás bevezetni. Úgy szokás tenni, mintha a függetlenség a tér és idő kategóriájával azonos szinten levő alapkategóriája lenne a szemléletünknek. Az események szintjén ez talán így is van, de a változók esetén a definíció nagyon szép és elegáns, de nem feltétlenül és megkérdőjelezhetetlenül azonos a függetlenség intuitív fogalmával[45]. Emlékeztetünk, hogy valószínűségi változók egy (ξ_k) sorozatának tagjait függetlennek mondunk, ha bárhogyan is választunk $k_1, k_2, \ldots, k_n$ indexeket és $A_1, \ldots, A_n \subseteq \mathbb{R}$ halmazokat, akkor

$$\mathbf{P}\left(\xi_{k_1} \in A_1, \ldots, \xi_{k_n} \in A_n\right) = \mathbf{P}\left(\xi_{k_1} \in A_1\right) \cdots \mathbf{P}\left(\xi_{k_n} \in A_n\right).$$

Vagyis valószínűségi változók akkor függetlenek, ha az együttes eloszlásuk a peremeloszlások szorzataként írható fel. A függetlenség definíciója szerint az összes valószínűségi változó segítségével megfogalmazható események valószínűsége azonos a különálló valószínűségek szorzatával! A változók függetlenségének definícióját visszavezettük az általuk megfogalmazható események függetlenségére. A definíció egyszerű, szemléletes és elegáns. A függetlenség legelőnyősebb tulajdonsága, hogy ha a ξ és az η változók függetlenek és f és g tetszőleges[46] függvények akkor az $f(\xi)$ és a $g(\eta)$ változók függetlenek lesznek. Miként közismert a függetlenségből következik a korrelálatlanság, így

$$\mathbf{M}\left(f(\xi)\, g(\eta)\right) = \mathbf{M}\left(f(\xi)\right) \mathbf{M}\left(g(\eta)\right).$$

Speciálisan tetszőleges s és t számok esetén

$$\mathbf{M}\left(\exp\left(it\xi + is\eta\right)\right) = \mathbf{M}\left(\exp\left(it\xi\right)\exp\left(is\eta\right)\right) = \mathbf{M}\left(\exp\left(it\xi\right)\right)\mathbf{M}\left(\exp\left(is\eta\right)\right),$$

[43]A statisztika a véletlen sorozatot a korrelálatlan sorozattal azonosítja. A függetlenség statisztikailag nem „verifikálható", az adatok alapján nem ellenőrizhető fogalom. A valószínűségszámítás a korrelálatlan sorozatokat csak akkor tekinti „tökéletesen véletlennek", ha a sorozat tagjainak eloszlása normális. Ilyenkor azonban a korrelálatlanságból következik a függetlenség.

[44]A paraktikus szó tartalma most a belső matematikai építkezés praktikus aspektusaira vonatkozik.

[45]Hangsúlyozni kell, hogy a matematika egyik célja, hogy pontosítsa és rögzítse az intuitív fogalmak tartalmát. Evvel felbecsülhetetlen szolgálatot tesz az emberi gondolkodásnak, de azt azonban látni kell, hogy a fogalomalkotás is történelmi folyamat és nem mindig sikerül elsőre a legjobb matematikai modellt megtalálni a köznyelvben szereplő valamilyen intuitív tartalomra. Egy matematikai modell, fogalom jóságát a mikroökonómiában ismert elv írja le: A modellnek egyszerre kell egyszerűnek és az intutívnek lenni. A két szempont gyakran egyszerre csak egymás rovására érvényesíthető. A matematikai által használt fogalmak megalkotása hasonló a számítógépes „metaforák" készítéhez. Egy jó számítógépes „metafora" elegáns, egyszerű és intuitív. És a mögöttes kód általában igen bonyolult.

[46]Valójában a függvények csak Borel-mérhetőek lehetnek, de ez a Borel-blabla az, amit az olvasó nyugodtan figyelmen kívül hagyhat. Egy átlagos közgazdász feltehetőleg nem képes egy nem Borel-mérhető függvényt elképzelni. Ha az olvasó az egyetem befejezése helyett még mindig vágyik a matematikai pontosságra, akkor legyenek az f és g folytonosak. Evvel az állítás precíz lesz.

ahol

$$\exp(ix) \triangleq \cos x + i \sin x.$$

Ezt úgy szokás kifejezni, hogy az együttes eloszlás *karakterisztikus függvénye* a különálló peremeloszlások karakterisztikus függvényeinek szorzataként írható fel. Ez a tulajdonság ráadásul jellemzi is a független változókat, vagyis két változó pontosan akkor független, ha az együttes eloszlás karakterisztikus függvénye szorzat alakba írható. A függetlenséggel kapcsolatos tételek zöme nem túl meglepő módon a karakterisztikus függvény segítségével indokolható a legegyszerűbben. A klasszikus valószínűségszámítás tételei a matematikai gondolkodás remekművei. Sajnos ebből még nem következik, hogy megtaláltuk a „tökéletes véletlen” definícióját. A független valószínűségi változókból álló sorozatok sajnos bizonyos dolgokat nem tudnak[47]. Az egyik legnagyobb és leginkább kézenfekvő gond, hogy a független tagokból álló sorozatok nem alkotnak lineáris teret. Az lineáris kombináció a legtermészetesebb matematikai művelet, amely minden korlátozás nélkül való végrehajthatósága minden lényeges matematikai fogalom esetén alapkövetelmény. Bármilyen ésszerű matematikai fogalmat is definiálunk, nagyon jó oka kell lenni annak, ha nem akarjuk a területen a lineáris algebra eszközeit használni. A sztochasztikus folyamatok elméletét megalapító Doob érdeme, hogy a független, nulla várható értékű sorozat fogalmát felcserélte a martingál fogalmával[48]. A martingál a bolyongás fogalmának „továbbfejlesztése”. Ha a bolyongás a Windows 2000, akkor a martingál a Windows XP[49]. Két változó függetlensége szimmetrikus fogalom. Egyik sem magyarázható a másikkal. Az időben alakuló folyamatok esetén a függetlenség némiképpen túl erős megkötés. Ha valamely sztochasztikus folyamat független növekményű, akkor a növekmény független a múlttól, vagyis a múltból nem tudunk a jövőben bekövetkező megváltozásra következtetni. De ez fordítva is igaz. A változás ismerete nem hordoz információt a múltról. De a múlt és a jövő nem teljesen szimmetrikus!

1.3.1. Filtráció és martingálok

A *martingál* definíciója a következő: Legyen adva egy $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$ valószínűségi mező. Legyen $\mathbb{T}$ a lehetséges időpontok halmaza. Az $\mathcal{A}$ eseménytér mellett legyenek még adva az $\mathcal{F}_t$, $t \in \mathbb{T}$ eseményterek, amelyek a t időpontig bekövetkezett eseményeket tartalmazzák. Az $\mathcal{F}_t$ interpretációja miatt, ha $s < t$ a $\mathbb{T}$ két lehetséges időpontja, akkor $\mathcal{F}_s \subseteq \mathcal{F}_t$, vagyis ha $s < t$, akkor minden az s időpontig megfigyelhető esemény megfigyelhető a t időpontig is. Az $(\mathcal{F}_t)_{t\in\mathbb{T}}$ matematikai struktúrát *filtrációnak* mondjuk.

Az $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$ mező mellett az $(\mathcal{F}_t)$ filtrációt is a modell alapadatának tekintjük. A $\mathbb{T}$ időhalmazon értelmezett $\xi(t)$ folyamatot az $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P}, (\mathcal{F}_t))$ alapadatok mellett martingálnak mondjuk, ha az alábbi tulajdonságok teljesülnek:

1. A $\xi(t)$ trajektóriái jobbról folytonosak és rendelkeznek bal oldali határértékkel.
2. Minden $t \in \mathbb{T}$ esetén létezik az $\mathbf{M}(\xi(t))$ várható érték és ha $s < t$, akkor $\mathbf{M}(\xi(t) \mid \mathcal{F}_s) = \xi(s)$.

Az első tulajdonság diszkrét időpontokból álló $\mathbb{T}$ esetén természetesen semmitmondó, folytonos időhorizont esetén a korábban elmondottaknak megfelelően azt jelenti, hogy a martingálok rendelkezhetnek ugrásokkal, de az ugrásokat infinitezimálisan nem lehet előrelátni, ugyanakkor a folyamatnak az ugrásokon kívül más típusú szakadásai nem lehetnek. A második tulajdonság

[47] A tökéletesen véletlen sorozatoktól elvárjuk, hogy az ellenük folytatot stratégiai játék eredménye is tökéletesen véletlen legyen. Bolyongás ellen végrehajtott stratégiai játék nyereménye csak martingál, folytonos esetben csak lokális martingál, és nem bolyongás.

[48] Némi zavart okozhat, hogy a bolyongást most azonosítjuk a független, nulla várható értékű sorozattal. A bolyongás tulajdonképpen független, nulla várható értékkel rendelkező sorozatból, a fehér zajból, képzett sor részletösszeg sorozata. A martingál a bolyongásnak felel meg, a véletlen sorozatnak, a fehér zajnak a martingáldifferencia sorozat felel meg. Diszkrét időábrázolás esetén a martingál és a martingáldifferencia ekvivalens ábrázolási formák. Folytonos időparaméter esetén azonban a martingál, illetve a bolyongás értelmes fogalmak, a fehér zaj, vagyis a folytonosan képzett növekményekből álló folyamat, vagyis a deriváltakból álló folyamat matematikailag nehezen értelmezhető.

[49] Ha tetszik a lokális martingál pedig a Windows 7.

szerint a folyamat statisztikailag előrejelezhetetlen, vagyis a $\xi(t)$ érték legjobb becslését[50] az $\mathcal{F}_s$ alapján a $\xi(s)$ adja. A folyamat martingál, ha a múltja alapján a jövőjét nem lehet előrejelezni.

Egy folyamat tökéletesen véletlen, ha a múltja nem szolgáltat információt a jövőjére nézve. A legtöbb amit a múltból a jövőre nézve kiolvashatunk az a jelen állapot.

Nem rossz definíciója a „tökéletes véletlennek”, jobb, és valljuk meg heurisztikusan is jobb és világosabb, mint a korábbi bolyongásra épített megközelítés![51]

Ezen a ponton érdemes egy további fontos filozófiai megjegyzést tenni. A Kolmogorov-féle valószínűségszámítási modellnek van egy alapvető „hibája”. A hiba a teljes valószinűségszámítás problémája, mondhatnánk az általunk is használt teljes matematikai modell gyenge pontja. Mikor is tekintünk egy sorozatot véletlennek? Ha adott valószínűségi változók egy meghatározott tulajdonságokkal rendelkező diszkrét vagy folytonos idejű folyamata. OK, de mit is jelent ez? Hát diszkrét időábrázolás esetén ez azt jelenti, hogy minden ω esetén adott egy $(\xi_k(\omega))$ számsorozat. Minden ω esetén! Valójában azonban ilyen nincsen! Egy részvény árának alakulása csak egyszer figyelhető meg. Mi van a többi ω esetén való realizációval? Reméljük, hogy azok is olyanok mint a megfigyelt. De mit jelent az, hogy olyanok mint a megfigyelt sorozat? A Lévy-folyamatok esetén bevezetett stacionárius és független növekmény feltétele éppen azt szolgálja, hogy biztosítsa, hogy a különböző ω kimenetelek esetén megfigyelt konkrét sorozatok, realizációk nagyon hasonlóak legyenek, vagy legalábbis a különböző lehetséges sorozatok hosszútávú átlagos tulajdonságai stabilan viselkedjenek[52]. Na de *egy* sorozat, hangsúlyozzuk *egyetlen* sorozat mikor tekinthető véletlennek? Az általunk vizsgált egy darab részvény, egyetlen realizációja mikor tekinthető véletlen sorozatnak? A kérdés többek között Kolmogorovot is izgatta. Nem véletlenül. Az általa és számos más matematikus[53] által talált válasz a következő: Tegyük fel, hogy adott (a_n) számok egy sorozata. Ha tetszik az (a_n) sorozat lehet 0 és 1 jelek egy végtelen sorozata. Ha a sorozat nem véletlen, akkor van benne valami szabályszerűség. De mikor mondjuk, hogy egy sorozatban van valamilyen szabály? Akkor mondjuk, hogy egy sorozatban van szabály, ha megadható egy olyan eljárás, amely rövidebb, egyszerűbb mint az eredeti és amelyet alkalmazva reprodukálni tudjuk a sorozatot. Egy sorozat véletlen, ha nincsen benne szabály. Némiképpen pontosabban fogalmazva, ha egy sorozatban van szabály, akkor írható egy olyan számítógépes[54] program, amely előrejelzi a sorozat tagjait[55]. A program hossza tekinthető a sorozat komplexitásának mértékének. Ha a lehetséges legrövidebb program n sorból áll, akkor a sorozat komplexitása n. Ha a legrövidebb program, hossza, amely a sorozat első n tagjából előrejelzi a sorozat $(n+1)$-edik tagját az n növekedésével arányosan nő, akkor a sorozat véletlen. Vegyük észre, hogy éppen erről van szó a részvények áralakulásának előrejelzése esetén is. Nincs olyan fix hosszú, előre rögzített számítógépes program, amely a már ismert adatokból az adatsor következő tagját megadja. A martingál definíciója a véletlen sorozatok éppen ezen tulajdonságát ragadja meg. Nincs olyan statisztikai módszer, amely alapján a múltból a jövő előrejelezhető lenne. Másképpen fogalmazva a sorozat komplexitása a sorozatban levő információ nagyságának mértéke, bármit is jelentsen az információ szó. Ha a sorozat véletlen, akkor a sorozat minden tagja meglepetés, vagyis a sorozat információtartalma nem tömöríthető. A martingál olyan sztochasztikus folyamat, amely megfigyeléséből származó információtartalom nem tömöríthető.

[50] Természetesen még most is körbeforog a definíció, ugyanis a becslés szót a feltételes várható értékkel definiáljuk. A feltételes várható érték legegyszerűbb tulajdonságait a függelékben röviden össze fogjuk foglalni.

[51] Persze hátra van a feketeleves, az $\mathbf{M}(\xi(t) \mid \mathcal{F}_s)$ feltételes várható érték. A filozófiai duma igen fontos, de a végén, a függelékben egy kis matematika is lesz azért.

[52] Véletlengenerátorokkal való egyszerű játszadozással könnyű belátni, hogy az egyes ω kimenetelek melletti trajektóriák igencsak különbözőek lehetnek. Egyik alapvetően nő, a másik alapvetően csökken stb.

[53] A kérdés nyilván visszamegy a tudományos gondolkodás kezdetéig. A komplexitás fogalmát Kolmogorovtól függetlenül definiáló Chaintin szerint a kérdéssel már Leibniz is foglalkozott. A Leibniz által adott válasz éppen a Kolmogorov–Chaitin-féle komplexitás definíciója: akkor mondjuk, hogy rendelkezésünkre áll egy természeti törvény, ha van olyan szabálygyűjteményünk, amellyel le tudunk írni egy adott jelenséget és a szabálygyűjtemény egyszerűbb mint a leírandó jelenség.

[54] A számítógépet rögzítjük.

[55] n elemből álló sorozat esetén mindig létezik n sorból álló program, amely a sorozatot visszaadja: print a_1, print $a_2, \ldots$, print a_n. A kérdés csak az, hogy létezik-e olyan program, amely ennél jóval rövidebb.

Már jeleztük, de nyomatékosan hangsúlyozni kell, hogy a martingál a bolyongáshoz hasonlóan „kumulált” fogalom, vagyis véletlen „lökések” összege. A „fehér zaj” intuitív fogalma a folyamatosan megjelenő lökések folyamata; a bolyongás, illetve a martingál ezek „integrálja”. A gond csak az, hogy folytonos időábrázolás esetén az integrálfolyamat létezik, de nem létezik a deriváltfolyamat[56]. Folytonos időábrázolás esetén a „fehér zaj” értelmetlen fogalom. Ha azonban a ξ martingál és az időábrázolás diszkrét, akkor értelmezhető a „fehér zajnak” megfelelő $d_k \overset{\circ}{=} \xi_k - \xi_{k-1}$ *martingáldifferencia* sorozat. A martingál definíciója miatt

$$\begin{aligned} \mathbf{M}(d_k \mid \mathcal{F}_{k-1}) &= \mathbf{M}\left(\xi_k - \xi_{k-1} \mid \mathcal{F}_{k-1}\right) = \\ &= \mathbf{M}(\xi_k \mid \mathcal{F}_{k-1}) - \mathbf{M}\left(\xi_{k-1} \mid \mathcal{F}_{k-1}\right) = \\ &= \xi_{k-1} - \xi_{k-1} = 0, \end{aligned}$$

vagyis a növekmények feltételes várható értéke nulla[57]. A feltételes várható értékre vonatkozó toronyszabály miatt

$$\mathbf{M}(\mathbf{M}(d_k \mid \mathcal{F}_{k-1})) = \mathbf{M}(0) = 0.$$

Ha a ξ_k független, nulla várható értékkel rendelkező változók összege[58], vagyis $\xi_k \overset{\circ}{=} \sum_{i=1}^{k} d_i$, akkor

$$\begin{aligned} \mathbf{M}(\xi_k \mid \mathcal{F}_{k-1}) &= \mathbf{M}\left(\sum_{i=1}^{k} d_i \mid \mathcal{F}_{k-1}\right) = \\ &= \sum_{i=1}^{k} \mathbf{M}(d_i \mid \mathcal{F}_{k-1}) = \\ &= \mathbf{M}(d_k \mid \mathcal{F}_{k-1}) + \sum_{i=1}^{k-1} d_i = \\ &= 0 + \sum_{i=1}^{k-1} d_i = \xi_{k-1}, \end{aligned}$$

ahol kihasználtuk, hogy függetlenség esetén a feltételes várható érték megegyezik a tényleges várható értékkel, illetve az $(\mathcal{F}_t)$ filtráció azon implicite mindig feltételezett tulajdonságát, hogy ha adott valamilyen sorozat, vagy folyamat akkor mindig feltesszük, hogy minden t időpontra az $\xi(t)$ mérhető az $\mathcal{F}_t$ eseménytérre[59]. Másképpen fogalmazva minden bolyongás martingál.

1.3.2. Exponenciális martingálok

A martingálok osztálya azonban jóval bővebb mint a bolyongások. A legjobb példa olyan martingálra, amely nem bolyongás a „szorzatbolyongás”. Ha adott egy (d_k) véletlen sorozat, akkor nem világos, hogy a folyamat „aggregálását” miért additív módon, vagyis miért összeadással kell elvégezni. A pénzügyi folyamatok esetén az egyes elemi lépéseket szorzással kell „aggregálni”. Ez éppen a közismert kamatos kamat elv. A pénzügyekben a természetes átlagolás a geometriai átlag, a pénzügyi folyamatok természetes módon multiplikatívak. Ha a (d_k) sorozat tagjai függetlenek és

[56] Mindig az integrállal dolgozunk, de heurisztikusan mindig a nem létező deriváltra gondolunk. Ez a sajátos probléma indokolja a sztochasztikus analízis jelölési rendszerét a $(dw)^2 = dt$ és hasonló szabályok általánosan elterjedt alkalmazását.

[57] Miként említettük a filtráció mindig előre rögzített, implicite vagy explicite adott.

[58] Vagyis, ha a (ξ_k) sorozat bolyongás.

[59] Ezt a tulajdonságot szokás adaptáltságnak nevezni. Másképpen fogalmazva, ha nincsen megadva explicite a filtráció, akkor az $\mathcal{F}_t$ definíció szerint a t időpontig megfigyelt változók által definiált eseménytér. Független növekményű folyamatok esetén a filtráció általában explicite nincsen adva, de az említett módon implicite mindig értelmezve van.

a várható értékük egy, akkor a $\xi_k \mathrel{\hat{=}} \prod_{i=1}^{k} d_i$ sorozat martingál, ugyanis a kiemelési szabály miatt

$$\begin{aligned}
\mathbf{M}(\xi_k \mid \mathcal{F}_{k-1}) &= \mathbf{M}\left(d_k \left(\prod_{i=1}^{k-1} d_i\right) \mid \mathcal{F}_{k-1}\right) = \\
&= \left(\prod_{i=1}^{k-1} d_i\right) \mathbf{M}(d_k \mid \mathcal{F}_{k-1}) = \\
&= \prod_{i=1}^{k-1} d_i \cdot 1 \mathrel{\hat{=}} \xi_{k-1},
\end{aligned}$$

ahol ismét felhasználtuk, hogy független változók esetén a feltételes várható érték megegyezik a közönséges várható értékkel. A „multiplikatív martingálokra” vonatkozó legfontosabb példa a Wiener-folyamathoz tartozó úgynevezett *exponenciális martingál*. Ha w Wiener-folyamat, akkor az $\exp(w(t))$ változó lognormális eloszlású. A lognormális eloszlás várható értékére vonatkozó nevezetes

$$\mathbf{M}(\exp(N(\mu,\sigma))) = \exp\left(\mu + \frac{\sigma^2}{2}\right)$$

képlet alapján

$$\mathbf{M}(\exp(w(t))) = \mathbf{M}\left(\exp\left(N\left(0,\sqrt{t}\right)\right)\right) = \exp\left(\frac{t}{2}\right).$$

Ebből következően az

$$\exp\left(w(t) - \frac{t}{2}\right) = \frac{\exp(w(t))}{\mathbf{M}(\exp(w(t)))}$$

valószínűségi változó várható értéke 1. Így a

$$\xi(t) \mathrel{\hat{=}} \exp\left(w(t) - \frac{t}{2}\right)$$

folyamat folytonos időparaméterű „szorzatbolyongás”:

$$\begin{aligned}
\mathbf{M}(\xi(t) \mid \mathcal{F}_s) &\mathrel{\hat{=}} \mathbf{M}\left(\exp\left(w(t) - \frac{t}{2}\right) \mid \mathcal{F}_s\right) = \\
&= \exp\left(-\frac{t}{2}\right) \mathbf{M}(\exp(w(t)) \mid \mathcal{F}_s) = \\
&= \exp\left(-\frac{t}{2}\right) \mathbf{M}(\exp(w(t) - w(s)) \exp(w(s)) \mid \mathcal{F}_s) = \\
&= \exp\left(-\frac{t}{2}\right) \exp(w(s))\, \mathbf{M}(\exp(w(t) - w(s)) \mid \mathcal{F}_s) = \\
&= \exp\left(-\frac{t}{2}\right) \exp(w(s))\, \mathbf{M}(\exp(w(t) - w(s))) = \\
&= \exp\left(-\frac{t}{2}\right) \exp(w(s))\, \mathbf{M}\left(\exp\left(N\left(0,\sqrt{t-s}\right)\right)\right) = \\
&= \exp\left(-\frac{t}{2}\right) \exp(w(s)) \exp\left(\frac{t-s}{2}\right) = \\
&= \exp\left(w(s) - \frac{s}{2}\right) \mathrel{\hat{=}} \xi(s).
\end{aligned}$$

A $\xi(t)$ folyamatot szokás a w *exponenciális martingáljának* mondani.

1.3.3. Függetlenség, korrelálatlanság, martingálok

Egy (d_k) sorozat definíció szerint *martingáldifferencia sorozat*, ha minden $i < j$ esetén $\mathbf{M}(d_j \mid \mathcal{F}_i) \mathrel{\hat{=}} 0$. Az elnevezést triviálisan az indokolja, hogy egy (d_k) sorozat pontosan akkor martingáldifferencia sorozat, ha van egy martintingál, amelynek növekményei éppen a (d_k) sorozat elemei. A martingáldifferencia sorozatra a legegyszerűbb példa a független és nulla várható értékkel rendelkező valószínűségi változókból álló sorozat. Megjegyezzük, hogy ha a (d_k) sorozat martingáldifferencia sorozat, akkor a sorozat tagjai korrelálatlanok. Mivel a martingálok tartják a várható értéket[60], a martingáldifferencia sorozat tagjainak várható értéke nulla, így ha $i < j$, akkor a kiemelési és a torony szabály miatt

$$\begin{aligned}\operatorname{cov}(d_i, d_j) &\overset{\circ}{=} \mathbf{M}(d_i d_j) = \mathbf{M}(\mathbf{M}(d_i d_j \mid \mathcal{F}_i)) = \\ &= \mathbf{M}(d_i \mathbf{M}(d_j \mid \mathcal{F}_i)) = \mathbf{M}(d_i 0) = 0.\end{aligned}$$

Ebből látható, hogy a martingálok a független növekményű és a korrelálatlan növekményű folyamatok „között” helyezkednek el. Ezért mondtuk a martingálok bevezetésekor, hogy a martingál a bolyongás „leheletfinom” általánosítása.

Természetesen a Lévy-folyamatok és a martingálok nem meritik ki a sztochasztikus folyamatok családját. Fontos példa olyan folyamatra, amely sem nem Lévy-folyamat[61] sem nem martingál a korábban tárgyalt Markov-lánc, vagy a később tárgyalt frakcionális Wiener-folyamat.

1.3.4. Lokális martingálok

Van azonban egy rossz hír. Valójában a sztochasztikus analízisben nem a martingálok adják az „atomisztikus véletlen fogalmát”. A pontos osztály az úgynevezett *lokális martingálok* osztálya, amely némiképpen bővebb osztály a martingáloknál. A lokális martingálokra még többször vissza fogunk térni, most csak néhány érintőleges megjegyzést teszünk.

A martingálok kapcsán a leggyakrabban használt állítás az úgynevezett *megállási opciókról szóló tétel*. A lokális martingálok bevezetéséhez is célszerű ebből a tételből kiindulni. Vegyük észre, hogy a martingálok legfontosabb tulajdonsága, hogy tartják a várható értéket. Ez éppen a toronyszabály következménye: Ha ξ martingál és $t > s$, akkor

$$\mathbf{M}(\xi(t)) = \mathbf{M}(\mathbf{M}(\xi(t) \mid \mathcal{F}_s)) = \mathbf{M}(\xi(s)). \tag{1.2}$$

A fordított állítás persze nem igaz. Természetesen nem minden olyan folyamat, amely tartja a várható értéket lesz martingál. A megállási opciókról szóló tétel a várható érték megmaradási tulajdonságot terjeszti ki fix időpontokról úgynevezett *megállási időkre*, megállási szabályokra.

A megállási idő fogalmát legegyszerűbben példákon keresztül világíthatjuk meg. Mindenki tudja, hogy a lehető legolcsóbban venni és a lehető legdrágábban eladni lehetetlen. Ennek oka, hogy az az időpont, amikor mondjuk egy részvény a lehető legdrágább az esemény bekövetkeztekor nem ismert. Majd később, a „történelem” eldönti, hogy a múltban az adott esemény bekövetkezett-e és ha igen, akkor mikor. Másképpen fogalmazva, az az időpont, amikor a részvény ára egy adott időszak alatt a legnagyobb nem megállási idő. Ez egy véletlen időpont, ugyanis a trajektória maximuma és annak időpontja függ a trajektóriától és így véletlenszerűen alakul. A megállási idők olyan véletlen időpontok, amelyek bekövetkeztével a bekövetkezés időpontjában tisztában vagyunk és nem csak visszatekintve vagyunk „okosak”. Megállási időre tipikus példa a halmazok találati ideje. Például az első olyan időpont, amikor a részvény ára mondjuk 100 dollár fölé emelkedik, vagy először lesz egy dollár három euró stb. Világos, hogy amikor ez bekövetkezik, akkor erről az esemény bekövetkezéssének időpontjában mindenki tud[62]. Ugyanakkor az az időpont, amikor utoljára volt a részvény ára száz dollár nem megállási idő. Az, hogy valami először következik be a bekövetkezés pillanatában eldönthető. Valamely esemény utoljára való bekövetkezése általában csak visszatekitve értelmezhető[63]. Világos, hogy ténylegesen cselekedni, csak megállási idők mentén lehet.

[60] V.ö.: (1.2) sor, 23. oldal.

[61] A folyamat növekményei stacionáriusak, de nem függetlenek. Vegyük észre, hogy a frakcionális Brown-folyamat folytonos.

[62] Persze csak olyanok, akiket a kérdés érdekel.

[63] A probléma mögött, „filozófiai szinten" triviálisan az idő megfordíthatatlansága van. A sztochasztikus analízisben az idő mindig egy irányban változik, ugyanis a filtráció mindig nő, így az időtengely egy egyértelmű irányítással bír.

1.5 Tétel. (A megállási opciókról szóló tétel)
Egy $\xi(t)$ jobbról reguláris, adaptált folyamat pontosan akkor martingál, ha minden korlátos τ megállási idő esetén[64]

$$\mathbf{M}(\xi(0)) = \mathbf{M}(\xi(\tau)),$$

és a két oldal mindig véges.

Másképpen egy adaptált és jobbról reguláris folyamat pontosan akkor martingál, ha korlátos megállási idők mentén a várható értéke véges és a megállított változó várható értéke független a megállítási szabálytól. A tétel elnevezését az indokolja, hogy a tétel szerint várható értékben a tetszőleges időpontban való kilépés opciója, lehetősége, joga értéktelen, feltéve, hogy a tétel állításának megfelelően egy fix idővel korlátozzuk a kilépési opció lehetséges élettartamát[65]. Ha a kilépés lehetőségével nem várhatunk addig, amig csak akarunk, akkor a megállási jog, legalábbis a várható érték szempontjából, értéktelen.

A megállási idő korlátosságának feltétele igen fontos! Minden Wiener-folyamat független növekményű és a növekmények várható értéke nulla, így minden Wiener-folyamat martingál. Ugyanakkor az (1.1) sorban definiált τ_a megállási időre

$$\mathbf{M}(w(\tau_a)) = \mathbf{M}(1) = 1,$$

miközben $w(0) = 0$. Nem minden martingál tartja minden megállási időre a várható értéket. Ha valamely adaptált és jobbról reguláris folyamatra tetszőleges τ megállási idő esetén teljesül a megállási opciókról szóló tétel, akkor a folyamatot nevezhetnénk „erős martingálnak”. Az igazán kijátszhatatlan véletlen folyamatok nem a martingálok, hanem az „erős” martingálok. Sajnos a matematika, mint minden emberi tudomány, időben fejlődött és nem minden elnevezése tökéletes. A sztochasztikus analízisben számos esetben a viszonylag egyszerű koncepcióknak nagyon „tudományos” neve van[66]. Az „erős” martingálok „hivatalos” neve *egyenletesen integrálható martingál*[67]. Minden martingálból lehet egyenletesen integrálható martingálokat „csinálni”. Legyen ξ egy sztochasztikus folyamat és legyen τ egy véletlen időpont. Tekintsük a

$$\xi^{\tau}(t,\omega) \mathrel{\hat{=}} \xi(t \wedge \tau(\omega), \omega)$$

módon definiált folyamatot. Emlékeztetünk, hogy az $a \wedge b$ jel az a és a b számok közül a kisebbre utal. A ξ^{τ} folyamatot a ξ folyamat τ időpontban való megállításának mondjuk. Ha a t időpont valamilyen kimenetelre a $\tau(\omega)$ előtt van, akkor a ξ^{τ} értéke ebben az időpontban azonos a ξ értékével. De ha $t \geq \tau(\omega)$, vagyis t a τ bekövetkezése után van, akkor a ξ^{τ} értéke éppen a ξ értéke a τ bekövetkezésének pillanatában. Vagyis a ξ^{τ} a τ előtt azonos a ξ-vel, de a τ időpontban az értéke „kimerevedik”. A megállási opciókról szóló tétel segítségével belátható, hogy a martingálok halmaza invariáns a megállási idők szerint megállításra nézve. Vagyis ha a ξ martingál és a τ tetszőleges megállási idő, akkor a ξ^{τ} megállított folyamat ismét martingál lesz[68]. Ugyanakkor ha ξ martingál és a t tetszőleges időpont, akkor a $\tau \equiv t$ egy megállási idő, és ilyenkor a ξ^{τ} folyamat

[64] A $\xi(\tau)$ változó az a valószínűségi változó, amely értéke minden ω kimenetel esetén éppen a ξ folyamat értéke a $\tau(\omega)$ időpontban. Vagyis $(\xi(\tau))(\omega) \mathrel{\hat{=}} \xi(\tau(\omega), \omega)$. A $\xi(\tau)$ valószínűségi változó elnevezése *megállított változó*.

[65] A korlát függhet a szabálytól. A pénzügyi matematikában mindig megköveteljük, hogy az opcióknak legyen egy fix, véges lejárati ideje. Ez nagyban egyszerűsíti a matematikai kezelést, mert ilyenkor az összes számbajöhető megállási szabálynak van egy fix felső korlátja, így a megállási opciókról szóló tételben szereplő korlátozó megkötés, sőt annál több is, teljesül.

[66] Maga a martingál is ezek közé tartozik. A martingál elnevezés nagyban nehezíti a koncepció megértést és elfogadását, ugyanis a martingál szó önmagában nem igazán jelent semmit és ezért a kezdőknél a szükséges intuitív motivációk autómatikusan nem érzékelhetőek. Ebből a szempontból a valójában sokkal bonyolultabb és bizonyos szempontból jóval keresettebb függetlenség elnevezés telitalálat. Másképpen a függetlenség marketing kommunikációja jó, a martingál rossz kommunikációval rendelkező igen hasznos fogalom.

[67] Hogy az elnevezést miért használjuk, annak jó oka van és ennek megtárgyalása nagyon messze vezetne. Az olvasónak elegendő annyit megjegyezni, hogy az egyenletesen integrálható martingálokat átlagban nem lehet megállási stratégiával „manipulálni”.

[68] Érdemes hangsúlyozni, hogy hasonló tulajdonság a Lévy-folyamatok és a bolyongások esetén nem teljesül. Ez is azok közé az észrevételek közé tartoznak, amelyek a martingálok szerepét nyomatékosítják.

egyenletesen integrálható martingál. Ennek oka igen egyszerű: Ha most σ tetszőleges megállási idő, akkor

$$\mathbf{M}\left(\xi^{\tau}\left(\sigma\right)\right)=\mathbf{M}\left(\xi\left(\sigma\wedge\tau\right)\right)=\mathbf{M}\left(\xi\left(\sigma\wedge t\right)\right)=\mathbf{M}\left(\xi\left(0\right)\right),$$

ugyanis a $\rho \stackrel{\circ}{=} \sigma\wedge t$ megállási idő korlátos, és korlátos megállási idők esetén a megállási opciókról szóló tétel igaz. Tekintsük most a $\tau_n \equiv n$ sorozatot. Világos, hogy ha a ξ martingál, akkor minden n-re ξ^{τ_n} egy egyenletesen integrálható martingál. Mivel a $\tau_n \nearrow \infty$, ezért azt szokás mondani, hogy a (τ_n) sorozat *lokalizálja* a ξ martingált.

1.6 Definíció.
Ha valamely folyamatra van olyan megállási időkből álló (τ_n) sorozat, amelyre $\tau_n \nearrow \infty$, és amelyre minden n-re a ξ^{τ_n} megállított folyamat egyenletesen integrálható martingál, akkor a ξ folyamatot lokális martingálnak mondjuk[69].

Az olvasó joggal vetheti fel, hogy mi értelme van ennek a definíciónak. Jogos az igény, hogy némi magyarázattal szolgáljunk.

A magyarázat, vagy inkább indokolgatás előtt célszerű azonban egy általános jellegű megjegyzést tenni. Minden matematikai elméletnek megvan a maga „gyenge pontja". Nullával nem lehet osztani, negatív szám nem lehet a gyök alatt, a mátrixok szorzásakor a sorrend fontos stb. Ezek a „technikai részletek" ügyes kerülgetése adja a matematikai elmélet sava-borsát. A tényleges „gyakorlati" alkalmazásokban azonban ezek a kérdések nem bírnak akkora jelentőséggel, mint azt az elméleti fejtegetések kapcsán esetlegesen gondolnánk. Magunktól, ritkán akarunk nullával osztani[70], és ha egyáltalában valaha gyököt akarnánk vonni, nyilván nem fogunk negatív számot tenni a gyök alá. Hasonlóan, nem is olyan könnyű lokális martingált csinálni. Viszonylag komoly felkészültség kell, ahhoz, hogy valaki martingált akarjon csinálni és mégis valódi lokális martingált kapjon[71]. Erre később vissza fogunk térni. Mivel a lokális martingál kontra martingál a sztochasztikus analízis „technikai alapproblémája" a kérdést nem szabad alábecsülni, de nem is kell túlbecsülni sem. A sztochasztikus analízissel nagyrészt feltehetően felületesen ismerkedő olvasónak[72] a két fogalom eltéréséből nem kell „nagy ügyet csinálni".

Lássuk, tehát, hogy miért természetes fogalom a lokális martingál, vagyis miért nem elegendő fix időpontok mentén lokalizálni a martingálokat? A kérdés inkább fordítva érdekes. Miért is akarnánk mi a sztochasztikus folyamatokat fix időpontokkal lokalizálni? A legtöbb, természetesen jelentkező, tényleges időpontmeghatározás nem fix időpontokra épül. Az időtengely rögzítése meglehetősen önkényes. Az ebéd után időpont egy véletlen időpont, egy megállási idő. Két ember előre megbeszélt találkozásának időpontja a legritkább esetben írható le egy pontos időponttal. Az „idő" nem feltétlenül az időtengely által előírt „egyenletes sebesség" mentén változik. Igen gyakran megállási idők sorozata jelöli ki az időtengelyt. Úgy érezzük, hogy a véletlen fogalma nem változik, ha az időtengelyt rendezéstartó módon esetlegesen „átskálázzuk". Vagyis természetes igény, hogy mindenhová, ahová fix időpont írható, megállási idő is írható legyen. Lényegében ezt biztosítja martingálok esetén a megállási opciókról szóló tétel, de számos más hasonló karakterű tétel ismert az irodalomban. A lokális martingál csak annyit mond, hogy fixen választott lokalizációs időpontsorozat helyett a folyamatot egy természetesen jelentkező eseménysorozat időpontjaival is lokalizálhatjuk. Ami intuitíve nem világos[73], hogy miért kapunk így egy bővebb osztályt mint a

[69] A lokalizáló τ_n megállási időkről feltehető, hogy mindegyikük külön-külön korlátos, például feltehetjük, hogy $\tau_n \leq n$ minden n-re.

[70] Mindig a matektanárok jönnek evvel. Egy normális diák még osztani sem akar változót tartalmazó kifejezéssel. Nem beszélve arról, hogy az átlagember csak a gépkocsi fogyasztás kiszámolásakor találkozik az osztással.

[71] Számos igen elegáns példa ismert, de mindegyik elég „technikás".

[72] Mi mint egyszerű átlagemberek, csak pénzt akarunk keresni. Ehhez pedig a martingál is csak azért kell, hogy átmenjünk a vizsgán. A lokális martingállal meg törődjenek a francia és az orosz matematikusok.

[73] Újra és újra hangsúlyozni kell, egy nagyon trükkös és árnyaltan kezelendő technikai fogalomról van szó, amit csak egy küldetéstudattal rendelkező, indokolatlanul lenézett törpe kisebbség ért. Mi közgazdászok mindig a többséggel tartunk. Naná, majd pazaroljuk az időnket apróságokra.

martingálok, ugyanis valahol a két fogalom intuitíve nagyon hasonló[74].

Hogy a fejtegetést némiképpen jobban motiváljuk, megjegyezzük, hogy egy martingál esetén nem csak a megállási stratégia időtartamának korlátozásával érhetjük el a várható érték változatlanságát. A duplázási és a hozzá hasonló stratégiák[75] megszüntetése céljából kiköthetjük azt is, hogy a lehetséges nyeremények és a veszteségek halmaza korlátos legyen[76]. Vagyis nem csak azt írhatjuk elő, hogy egy fix idő után a játékot be kell fejezni, hanem azt is mondhatjuk, hogy egy bizonyos értékhatár átlépésekor lesz a játéknak vége. Az, hogy időben mikor lépjük át először az előírt szintet nyilván megállási idő, függ a játék alakulásától. Ennek megfelelően az egyenletes integrálhatóságot biztosító lokalizációs idősorozat esetlegesen[77] nem lesz fix időpontok sorozata. Semmi okunk nincsen arra, hogy egy játékban az időtartamot és nem a nyeremény és veszteség értékét, vagyis ne az értékfolyamat nagyságát korlátozzuk. Valljuk be, az értékfolyamat nagyságának korlátozása sokkal természetesebb, mint a játék tényleges lefolyásától függetlenül a játék időtartamának korlátozása. Ha viszont az értékfolyamat nagyságát korlátozzuk, nem feltétlenül tudunk különbséget tenni a martingálok és a lokális martingálok között. Ha az értékfolyamat korlátozására koncentrálunk, akkor derékig belesülyedtünk a sztochasztikus analízis mocsarába: Szabad akaratunkból megteremtettük a sztochasztikus analízis szörnyét a lokális martingált!

[74] A lokális martingál versus valódi martingál probléma lényegében a végtelennel kapcsolatos matematikai paradoxonok egyike. A dolog lényeg, hogy korlátlan erősforrásokkal sok mindent meg lehet csinálni. Például egy tökéletesen véletlen folyamatból várható érték szintjén nyereséget lehet „kicsiholni”. Trükkös kereskedési stratégiával egy valódi martingálból lehet lokális martingált „csinálni”. Ugyanakkor az erőforrások természetes módon korlátosak, és korlátos erőforrások esetében nem lépnek fel lokális martingálok csak valódi martingálok.

[75] Nyilván a duplázási stratégia korlátlan erőforrást, hátteret igényel. A duplázási stratégia lényege, hogy semmilyen körülményke között sem szabad befejezni, végtelen nagy zseb, rendelkezésre álló hitel, kell a finanszírozásához.

[76] Hangsúlyozni kell, hogy az általunk tárgyalt matematikai modellben a fő nehézséget a duplázási típusú stratégiák lehetősége hozza be. A duplázási stratégia pedig tipikusan csak matematikailag lehetséges. A kaszinókban a duplázás nem azért tiltott, mert kaszinó fél tőle. Nem, á dehogy. A kaszinó hírnevének a duplázási stratégiát folytató, nyilvánosan öngyilkosságot elkövető ostobák tömege ártana.

[77] Ez például abban a kiemelkedően fontos esetben, amikor a trajektóriák folytonosak mindig megtehető.

2. fejezet

Sztochasztikus integrálás

Ebben a fejezetben a sztochasztikus integrál fogalmát definiáljuk. A gondolatmenet lényege, hogy minden integrál súlyozott összegek határértéke. A sztochasztikus integrálok esetén a konvergenciát a sztochasztikus konvergencia definiálja. A sztochasztikus integrálás másik sajátos tulajdonsága, hogy a közelítő összegek megválasztásakor csak az intervallum kezdőpontja megengedett.

A sztochasztikus analízis legfontosabb fogalma a sztochasztikus integrál. A sztochasztikus integrál, mint minden integrál valamilyen közelítő összegek határértéke. Az integrál közelítő összegek súlyozott számtani közepek, vagyis az integrál mindig súlyozott számtani közepek határértéke. Ennek megfelelően minden integrál esetén meg kell különböztetni a súlyt, amit *integrátornak* szokás nevezni, illetve az összegzendő értékeket, amit *integrandusna*k szokás mondani. A különböző integrálfogalmak lényegében csak abban térnek el, hogy miként képezzük az integrál értékét közelítő összegeket, illetve hogyan képezzük a határértékeket. Az integrál heurisztikus tartalma mindig a közelítő összegekből olvasandó ki, a határérték képzése mindig matematikai bűvészkedés tárgya[1]. Az integrál definíció szerint a közelítő összegek által hordozott intuitív fogalmat, tartalmat terjeszti ki a határértékre. A sztochasztikus integrál képzésekor a súlyt valamilyen véletlen, kockázatos folyamat időben való értéknövekedése adja. A pénzügyi matematikában a súly, vagyis az integrátor valamilyen pénzügyi termék adott időszakban való ármegváltozása, az integrandus pedig a kockázatos termékből az integrálási időperiódus alatt tartott portfolió nagysága. Ennek megfelelően a pénzügyi matematikában a sztochasztikus integrálok a kockázatos termékekből álló portfoliók értékének alakulását megadó sztochasztikus folyamatként interpretálhatóak.

2.1. Korlátos változású folyamatok szerinti integrálás

Az integrálás heurisztikus megértésének egyetlen kulcsa van: a klaszikus, az elemi analízisben tárgyalt, úgynevezett Riemann-féle integrálfogalom, illetve konstrukció megértése. Ennek megfelelően először röviden áttekintjük az elemi analízisben tanult Riemann-integrált, majd ismertetjük a fogalom általánosításait. A legegyszerűbb általánosítás az úgynevezett Stieltjes-integrál, amikor a súlyfüggvényt explicit módon figyelembe fogjuk venni. A Stieltjes-integrál a Riemann-integrál közvetlen és igen kézenfekvő általánosítása. Számos szempontból a Stieltjes-integrál egyszerűbb mint a Riemann-integrál, ugyanis éppen a fogalom általánossága miatt az integrálással kapcsolatos problémák a Stieltjes-integrál esetén világosabban jelentkeznek mint az igen speciális Riemann-integrál esetén. A sztochasztikus integrálás megértése szempontjából kulcs jelentősége van annak, hogy a Stieltjes-típusú integrálás csak akkor használható, ha a súlyfüggvény úgynevezett *korlátos változású*[2].

[1] A bűvészkedés nem lekicsinylő kifejezés, a bűvészkedés általában mély meglátást takar. A bűvészkedés célja a határérték létezésének garantálása, illetve a konvergencia természetének feltárása.

[2] Szokás még véges megváltozású függvényekről is beszélni. A korlátos és a véges változás lényegében azonos fogalmak. Véges megváltozás alatt azt szokás érteni, hogy a függvény minden véges szakaszon korlátos változású. Így a Riemann integrál integrátora az $y = x$ függvény a teljes számegyenesen nem korlátos változású, de mivel

Az integrállal kapcsolatban mindig két kérdés teendő fel:

1. Mikor létezik az integrál, illetve
2. hogyan számolható ki az értéke[3]?

Ez első kérdés bizonyos értelemben filozófiai karakterű: mikor létezik, milyen általános körben definiálható például a terület, a várható érték, vagy miként később látni fogjuk a kereskedés, a dinamikus stratégiai játék kumulált eredménye, stb. A létezés feltételeinek tisztázása után felmerülő első kérdés: ha matematikai értelemben létezik a fogalom, mekkora az értéke. Világosan látni kell, hogy az első kérdésre a válasz jóval egyszerűbb mint a másodikra. A matematikában áttekinthetetlenül sok integrálfogalom van. Számtalan konstrukció létezik, amely garantálja alkalmasan választott súlyozott összegek határértékének létezését. Ugyanakkor az összegek határértékének, vagyis az integrál értékének kiszámolásához igen kevés, mondhatnánk, hogy nevetségesen kevés módszer áll rendelkezésre. Univerzálisan, vagyis igen nagyszámú összeg kiszámolását lehetővé tevő egyszerű módszer tulajdonképpen csak egy van: a Newton–Leibniz-szabály. Bár a Newton–Leibniz-szabály hatékonysága bámulatos, mégis sok fontos integrál esetén közvetlenül nem használható[4]. Ha a Newton–Leibniz-szabály nem működik, akkor két dolgot tehetünk: vagy ad hoc integrálási technikát alkalmazunk, vagy az integrált numerikusan közelítjük. A matematikai elméletben előforduló fontos integrálok kiszámolására számos ad hoc módszer született, ezek mindegyikének hatóköre azonban korlátozott, és az alkalmazott gondolatmenetek legtöbbször igen speciális megfontolásokra épülnek[5]. Ha az integrál értéke ad hoc, speciális módszerrel sem számolható ki, és az integrál értéke gyakorlati szempontból fontos, akkor az integrált numerikusan is kiszámolhatjuk, vagyis az integrál értékét valamelyik közelítő összeggel közelíthetjük. Erre tipikus példa a normális eloszlás eloszlásfüggvényének táblázata, miként ide tartozik az összes függvénytáblázat vagy az összes Excel-függvény is.

2.1.1. Riemann-integrál

Riemann-integrál esetén az integrátor, vagyis a súlyfüggvény az $y = x$, az integrandus, az összegzendő értékeket szolgáltató objektum pedig tetszőleges folytonos függvény lehet[6]. Jelentőségét két dolog adja: egyrészt szemléletes tartalma a szokásos geometriai fogalmak mint terület, térfogat[7] stb. általánosítása, másrészt az integrálra könnyen igazolható a Newton–Leibniz-szabály. A két fogalom szoros kapcsolatára utal, hogy az analízist felületesen ismerők számára[8] a két fogalom egyet jelent.

A Riemann-integrál definíciója igen egyszerű: vegyük az $[a, b]$ szakasz egy

$$a = x_0 \leq x_1 \leq \ldots \leq x_n = b$$

minden véges szakaszon korlátos változású ezért véges változású. A pontos definíciókat lásd alább.

[3]További fontos kérdés, hogy milyen számolási szabályokkal rendelkezik az integrál. Mint minimális követelmény meg szokás követelni, hogy az integrál lineáris operáció legyen, vagyis, hogy felcserélhető legyen a lineáris kombináció képzésével. Ez olyan természetes követelmény, hogy teljesülését szinte triviálisnak szokás tekinteni. A lineáris kombináció képezhető az integrátor, illetve az integrandus szerint is. A különböző integrálok matematikailag legfontosabb tulajdonsága az integrál és a határértékek viszonya: Mikor lehet az integrált és a határértéket felcserélni?

[4]Meg szokás jegyezni, hogy a Newton–Leibniz-szabály mellett az úgynevezett Cauchy-formula is univerzálisan használható integrálási technika. A Cauchy-formula azonban inkább univerzális módszer arra, hogy olyan integrálokat, amelyeket nem tudunk közvetlenül kiszámolni a Newton–Leibniz-szabállyal miként vezethetjük vissza olyan integrálokra, amelyekre a szabályt már alkalmazni tudjuk.

[5]A speciális integrálok kiszámolása a matematika megbecsült, klaszikus és igen nehéz területeinek egyike. Nagy tévedés azt hinni, hogy a számítógépes programokkal minden integrál könnyen számolható. A könnyű integrálokat könnyű kiszámolni, a nehezeket nehéz! A matematikában is érvényes az energiamegmaradás elve: a nehéz problémák megoldásához és a megoldások megértéséhez sok idő, sok türelem, sok erőfeszítés és kitartás kell.

[6]Nem folytonos függvénynek is értelmes lehet a Riemann-integrálja, de a mi szempontunkból ez egy érdektelen észrevétel. Általában, ha tényleg nem folytonos függvényeket akarunk integrálni, akkor érdemesebb a Lebesgue-féle konstrukciót bemutatni, a Riemann-féle konstrukció nem folytonos integrandus esetén inkább csak történeti érdekesség. A Lebesgue-féle integrálás elmélete azonban a matematikai analízis egyik gyöngyszeme. Minden valódi gyöngyszemért nagyon mélyre kell merülni, mi pedig most csak a hullám hátán akarunk lovagolni, hiszen arbitrázs lehetőséget keresünk.

[7]Természetesen a többdimenziós Riemann-integrál adja a térfogatot.

[8]Nem akarom az olvasót elkeseríteni, de várhatóan a jegyzet összes olvasója ebbe a kategóriába sorolható.

felbontását és tekintsük a

$$\sum_{k=1}^{n} f(t_k)(x_k - x_{k-1})$$

közelítő összeget. A közelítő összeg képzésekor a t_k úgynevezett közelítő, vagy teszt pont az $[x_{k-1}, x_k]$ zárt szakasz tetszőleges pontja lehet. Definíció szerint, ha a felbontás módjától[9] és a közelítő pont választásától függetlenül létezik véges határérték, akkor a határértéket az f Riemann-féle integráljának mondjuk és a határértéket $\int_a^b f(x)\,dx$ módon jelöljük.

Miként említettük minden integrál esetén az első kérdés mikor létezik[10] az integrál?

2.1 Állítás.
Ha az f függvény az $[a, b]$ véges, zárt intervallumon folytonos, akkor az $\int_a^b f(x)\,dx$ integrál létezik.

A tétel indoklása jóval bonyolultabb mint gondolnánk. Az indoklás bonyolultsága elsősorban abból származik, hogy mélyen és alapvetően a valós számok teljességére épül. A teljesség a valós számok filozófiailag legvitathatóbb, ugyanakkor matematikailag vitathatatlanul a legfontosabb, tulajdonsága. Miért létezik az integrál? Azért, mert a számegyenes teljes. Miért tekintjük a számegyenest teljesnek? Hát számos okból, többek között azért is, mert ilyenkor az integrál, Riemann-integrál esetén a terület fogalma, széles körben értelmezhető. Mit értünk teljességen? A teljesség a matematika egyik alapvető fogalma. A számegyenes esetén a teljesség azt jelenti, hogy a számegyenesen nincsenek lyukak! De ez mit jelent? Mi az, hogy lyuk? Szemben a lyukas zokninval a lyukas számegyenes fogalma nem evidens kategória. Miért lyukas a racionális számokból álló számegyenes? Mit jelent ez? Hát például a $\sqrt{2}$ a geometriában „létező" szám, de nem racionális[11]. OK, hát legyen a $\sqrt{2}$ is valós szám, vagyis a racionális számokat egészítsük ki a geometriában megszerkeszthető számokkal. Miért nem tünnek el a lyukak, ha a geometriailag megszerkezthető számokkal kiegészítjük a racionális számokat? Hát vannak olyan számok, amelyek nem szerkezthetőek, de előfordulnak a geometriában. Ilyen például a π. Legyen a π is valós szám! OK. Milyen számokat vegyünk még? Hát vegyük még az e számot is, stb. De hol van a dolognak vége? Ha egy cső lyukas előbb vagy utóbb a lyukakat be lehet tömni. De a számegyenes esetén? Hány lyuk van a számegyenesen? Nyilván egy olyan konstrukciót akarunk, amely biztosítja, hogy minden értelmes szám amivel az analízisben találkozunk valós szám legyen. Mi az, hogy értelmes szám? Hát azok a számok, amelyekkel elvileg valaha találkozhatunk. Mikor? Hát például folytonos függvények Riemann-integráljának elvi konstrukciója során. Aha!

A teljes matematikai analízis a teljesség feltételére épül. Ha nincs teljesség, nincs matematikai analízis[12]*. A teljesség az a feltétel, amely általános és könnyen megjegyezhető, mondhatnánk szép és elegáns tételek megfogalmazását lehetővé teszi*[13]*.*

A teljesség feltétele számos módon megadható. A későbbi általánosítások miatt a legegyszerűbb, bár semmiképpen nem a legszemléletesebb[14] definíció a következő:

[9] Természetesen az osztópontok növelésével a felbontásban szereplő szomszédos pontok távolsága nullához kell, hogy tartson. Tehát nem csak az osztópontok számát, hanem a felbontás „finomságát" is növelni kell.

[10] Talán helyesebb lenne azt kérdezni, hogy miért létezik az integrál? A mikor kérdésre a tétel szövege, a miért kérdésre a bizonyítás ad választ.

[11] Hogy a létezés szó mit jelent nem evidens, ugyanis ha evidens lenne, akkor szegény Pithagorasz a legenda szerint nem vetette volna le magát a kéklő habokba. A legenda léte arra utal, hogy az elmúlt pár ezer év alatt az emberek nagyonis elgondolkodtak a létezés szó értelmén.

[12] Miként tudjuk: No martini no party! Még George Clooneynak is.

[13] A matematika nagy része a teljesség feltételére épül. A hiányzó rész pedig azt vitatja, hogy miért helytelen ez.

[14] Talán a legszemléletesebb, a Cantor és az Archimédesz axiómák megkövetelése. A Cantor-axióma szerint minden egymásba ágyazott, zárt és korlátos intervallumokból álló sorozatnak van közös pontja. Ez jelenti szemléletesen azt, hogy nincsen üres hely a számegyenesen. Nem lehet egy lyukra ráhúzni egy zárt szakaszokból álló sorozatot. Az Archimédesz axióma szerint bármely két valós szám között van racionális szám, vagyis a valós számok a racionális számok és csak azok kibővítéséből, „teljessé tételéből" erednek. Egy másik, evvel érdekes módon ekvivalens megfogalmazás az, hogy ha az intervallumokat mindig felezzük, akkor az első axióma szerint létező pont egyetlen lesz. Másképpen $\lim_{n\to\infty} 2^{-n} = 0$, vagy ami evvel szintén ekvivalens $\lim_{n\to\infty} 1/n = 0$. Vagyis ez a nevezetes határérték a matematika egyik axiómája és nem tétele. Gondolta volna a naív olvasó?

2.2 Definíció.
Az (x_n) sorozatot Cauchy-féle sorozatnak, röviden Cauchy-sorozatnak mondjuk, ha minden $\varepsilon > 0$ számhoz található olyan $N(\varepsilon)$ index, hogy ha $n, m \geq N(\varepsilon)$, akkor $|x_n - x_m| \leq \varepsilon$.

TELJESSÉGI AXIÓMA : *A valós számok körében minden Cauchy-sorozat konvergens*[15].

A teljességi axióma szerint tehát, ha számok egy sorozata olyan, hogy a tagjai egy idő után minden határon túl elég közel kerülnek egymáshoz, akkor a sorozatnak van határértéke. Van, létezik egy olyan szám, amihez a sorozat tagjai tartanak. Ha az (x_n) sorozatot valamilyen számolási, közelítési eljárás eredményének képzeljük el, akkor a Cauchy-feltétel azt jelenti, hogy tetszőleges ε pontosságot megadva, ha nem tudunk ε-nál pontosabban mérni, akkor egy idő után már nem tapasztalunk változást a számolási eljárás során. Ha tetszőleges mérési pontosság esetén a módszer véges idő után már konstans eredményt biztosít, akkor a számolási eljárásnak *létezik*[16], mégpedig *egyetlen* eredménye, amit tetszőlegesen megadott pontosság erejéig közelíteni tudunk. Ha a számegyenes lyukas lenne, akkor a lyukhoz tetszőlegesen közel menve olyan Cauchy-sorozatot készíthetnénk, amely nem lenne konvergens. A teljesség definíció szerint azt jelenti, hogy minden Cauchy-féle konstrukcióhoz létezik egy idealizált elem, egy „valós" szám, amely a sorozat határértéke lesz.

A teljesség lényege, hogy úgy tudjuk egy sorozat konvergenciáját biztosítani, hogy nem mondjuk meg előre a sorozat határértékét, csak a konstrukciót[17]*, amivel a közelítést végezzük.*

Be akarjuk látni, hogy folytonos függvény esetén a Riemann-integrál létezik. Ehhez azt kell belátni, hogy a közelítő összegek sorozata Cauchy-sorozat. Tekintsünk két közelítő összeget.

$$\Delta \doteq \left|\sum_{k=1}^{n} f(t_k)\left(x'_k - x'_{k-1}\right) - \sum_{k=1}^{m} f(s_k)\left(x''_k - x''_{k-1}\right)\right|.$$

Bár a két felosztás különböző, vehetjük a közös finomitásukat, vagyis azt az $(x_k)_{k=1}^{N}$ felosztást, amely a két felosztás közös osztópontjaiból áll. Ekkor

$$\begin{aligned}
\Delta &= \left|\sum_{k=1}^{N} \left(f(t_k) - f(s_k)\right)(x_k - x_{k-1})\right| \leq \\
&\leq \sum_{k=1}^{N} \left|\left(f(t_k) - f(s_k)\right)(x_k - x_{k-1})\right| \leq \\
&\leq \max_{k=1}^{N} |f(t_k) - f(s_k)| \sum_{k=1}^{N} |x_k - x_{k-1}| \leq \\
&\leq \max_{k=1}^{N} |f(t_k) - f(s_k)| (b-a).
\end{aligned}$$

Az f feltételezett folytonossága miatt a $\max_{k=1}^{N} |f(t_k) - f(s_k)|$ kifejezés az osztópontok növelése során tetszőlegesen kicsi lesz[18], így mivel a $b-a$ véges szám, ezért a Δ is egy idő után tetszőlegesen kicsi lesz, tehát a közelítő összegek sorozata Cauchy-sorozat. A számegyenes feltételezett teljessége miatt a közelítő összegek sorozata konvergens, vagyis létezik az integrál.

[15] Miként jeleztük számos egyéb megfogalmazás is létezik. Természetesen ízlés dolga, hogy ki melyik megfogalmazást választja. Az ízlés persze nagyon fontos dolog. Nem csak az öltözködésben, hanem a matematikában is. A teljességi axiómát azért fogalmazzuk meg az egyébként némiképpen izléstelen Cauchy-kritériummal, mert hangsúlyozni szeretnénk, hogy a Riemann-integrál létezése lényegében az analízis egyik axiómája.

[16] Emlékeztetünk: a létezés nagy szó. Létezik határérték! És Harry Potter? És a Deep Space 9? A körnek létezik területe, de nem léteznek a Romulánok! Miért?

[17] Vagyis magát a sorozatot.

[18] Szemléletesen, a szomszédos osztópontok egyre közelebb kerülnek egymáshoz, így a t_k és az s_k távolsága is egyre kisebb lesz, tehát a folytonosság miatt az $f(t_k) - f(s_k)$ is egyre kisebb lesz. (Miként jeleztük kicsire nem adunk, ha az olvasó tudja mi a különbség a folytonosság és az egyenletes folytonosság között akkor ne húzgálja a száját. Az egyenletes folytonosság maradjon a mi titkunk.)

2.1.2. Newton–Leibniz-szabály

Térjünk rá az integrál kiszámítására. Az integrál kiszámítását lehető tevő matematikai szabály a *Lagrange-féle középérték-tétel*:

2.3 Állítás.
Ha az f függvény az $[a, b]$ szakaszon folytonos, az (a, b) halmazon deriválható, akkor létezik[19] $t \in (a, b)$, *hogy*

$$f(b) - f(a) = f'(t)(b - a).$$

Deriválható függvény növekménye megegyezik valamely pontjába húzott érintőjének „növekményével”. Ha a $b - a$ kifejezéssel átosztunk, akkor

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(\xi).$$

Az $\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$ éppen az f függvény által megadott görbe a és b pont közötti húrjának iránytangense. A középérték-tétel szerint van olyan pont, ahol a húr párhuzamos az érintővel, vagyis a húr iránytangense megegyezik az érintő iránytangensével.

Legyen az F deriválható függvény. A középérték-tétel segítségével becsüljük meg az $F(b) - F(a)$ eltérést. Ha $(x_k)_{k=1}^{n}$ az $[a, b]$ szakasz tetszőleges felbontása, akkor

$$\begin{aligned} F(b) - F(a) &= \sum_{k=1}^{n} (F(x_k) - F(x_{k-1})) = \\ &= \sum_{k=1}^{n} f(t_k)(x_k - x_{k-1}), \end{aligned}$$

ahol f az F deriváltja és t_k a középérték-tétel által az (x_k, x_{k-1}) intervallumban garantált pont. Hangsúlyozni kell, hogy a t_k pont elhelyezkedésről semmit nem tudunk. Csak a létezését tudjuk, pontos értékét nem. Ha az f függvény integrálható, akkor minden közelítő összeg sorozat az integrálhoz tart, így az itt konstruált

$$\left(\sum_{k=1}^{n} f(t_k)(x_k - x_{k-1})\right)$$

sorozat is. A közelítő sorozat értéke konstans módon $F(b) - F(a)$, vagyis definíció szerint

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a),$$

vagyis teljesül a Newton–Leibniz-formula:

2.4 Tétel. (Newton-Leibniz)
Riemann-integrálható függvény esetén az integrál értéke az antiderivált növekménye.

Hangsúlyozzuk, hogy a gondolatmenet kulcsa, hogy az integrál definíciójában a köztes t_k pontokat szabadon választhattuk meg. Vegyük ugyanakkor észre, hogy némiképpen csaltunk, ugyanis a Newton–Leibniz-szabály némiképpen üres, ugyanis nem mondjuk meg, hogy mikor alkalmazható. Önmagában a tétel rendkívül elegáns, de a tétel erejét nem csak a megadott gondolatmenet adja. A tétel erejének másik forrása, hogy folytonos f esetén az állítás alkalmazható. Némi túlzással a két állítás együtt alkotja az elemi analízist. Ez indokolja azt, hogy a Newton–Leibniz-szabályt szokás az elemi analízis alaptételének is mondani.

[19] Miért is létezik? Hát persze, hogy a valós számok feltételezett teljessége miatt. Miért másért! Általános ökölszabály: ha valamely matematikus azt mondja létezik, gyanakodjunk, hogy a háttérben a valós számok teljességének feltétele van. Kivétel, ha az illető algebrista, és a kérdést még a marketingszakosok is megértik.

2.1.3. Stieltjes-integrálás

A Riemann-integrál közvetlen általánosítása a *Stieltjes-integrál*. Az általánosítás egyedül abból áll, hogy az $y = x$ súlyfüggvény helyett egy $y = G(x)$ általános súlyfüggvény kerül. Az integrált ilyenkor értelemszerűen az

$$\int_a^b f(x)\, dG(x)$$

módon jelöljük. A konstrukció tehát a következő: Ismét vegyük az $[a, b]$ szakasz egy

$$a = x_0 \leq x_1 \leq \ldots \leq x_n = b$$

felbontását és tekintsük a

$$\sum_{k=1}^{n} f(t_k)(G(x_k) - G(x_{k-1}))$$

közelítő összeget. A közelítő összeg képzésekor a t_k pont ismételten az $[x_{k-1}, x_k]$ zárt szakasz tetszőleges pontja lehet. Definíció szerint, ha a felbontás módjától és a közelítő pont választásától függetlenül létezik véges határérték, akkor a határértéket az f integrandus G súlyfüggvény, vagy integrátor szerinti Stieltjes-féle, vagy egyszerűen Stieltjes-integráljának mondjuk. A Stieltjes-integrál intuitív tartalma a G súlyfüggvény tartalmától függ. Ha G egy eloszlásfüggvény, akkor a $G(x_k) - G(x_{k-1})$ eltérés éppen annak a valószínűsége, hogy az eloszlás mögötti ξ változó az $[x_{k-1}, x_k)$ intervallumba esik. A $\sum_{k=1}^{n} f(t_k)(G(x_k) - G(x_{k-1}))$ közelítő összeg éppen az $f(\xi)$ transzformált valószínűségi változó átlagának, várható értékének közelítése. Ezt a következőképpen indokolhatjuk: Vegyük észre, hogy az eloszlásfüggvény definíciója miatt, miként az imént említettük

$$\begin{aligned} G(x_k) - G(x_{k-1}) &\stackrel{\circ}{=} \mathbf{P}(\xi < x_k) - \mathbf{P}(\xi < x_{k-1}) = \\ &= \mathbf{P}(\{\xi < x_k\} \setminus \{\xi < x_{k-1}\}) = \\ &= \mathbf{P}(\{x_{k-1} \leq \xi < x_k\}). \end{aligned}$$

Az Ω téren értelmezett ξ valószínűségi változó az

$$A \stackrel{\circ}{=} \{x_{k-1} \leq \xi < x_k\}$$

halmazon jól közelíthető az $[x_{k-1}, x_k)$ szakasz bármely t_k pontjával, így az $f(\xi)$ transzformált valószínűségi változó jól közelíthető a

$$\xi_n \stackrel{\circ}{=} \sum_k f(t_k)\, \chi(x_{k-1} \leq \xi < x_k)$$

függvénnyel, ahol a $\chi(A)$ az A halmaz karakterisztikus függvénye[20]. Az átlag definíciója szerint

$$\sum_k f(t_k)\, \mathbf{P}(x_{k-1} \leq \xi < x_k)$$

súlyozott átlag az $\mathbf{M}(f(\xi))$ várható jó közelítése. Speciálisan, ha ξ valószínűségi változó, G a ξ eloszlásfüggvénye, akkor definíció szerint

$$\begin{aligned} \mathbf{M}(\xi) &= \lim_{\Delta \searrow 0} \sum_k x_{k-1} \mathbf{P}(x_{k-1} \leq \xi_k < x_k) = \\ &= \lim_{\Delta \searrow 0} \sum_k x_{k-1}(G(x_k) - G(x_{k-1})) \stackrel{\circ}{=} \\ &\stackrel{\circ}{=} \int_{-\infty}^{\infty} x dG(x) \end{aligned} \tag{2.1}$$

[20]Vagyis a $\chi(A)$ pontosan akkor 1, ha a halmazban vagyunk, a halmazon kívül az értéke nulla. Vigyázat a karakterisztikus függvény elnevezést szokás hamazra és eloszlásra is alkalmazni. A két elnevezésnek semmi köze egymáshoz. De hasonlóan van karakterisztikus polinóm is, sőt miként láttuk, a Lévy-folyamatoknak vannak karakterisztikái stb.

ahol Δ jelöli a számegyenes[21] felosztásának finomságát, vagyis

$$\Delta \mathrel{\hat{=}} \max_k |x_{k+1} - x_k| .$$

Hasonlóan

$$\begin{aligned} \mathbf{M}\left(\xi^2\right) &= \lim_{\Delta \searrow 0} \sum_k x_{k-1}^2 \mathbf{P}\left(x_k \leq \xi_k < x_{k+1}\right) = \\ &= \lim_{\Delta \searrow 0} \sum_k x_{k-1}^2 \left[G\left(x_{k+1}\right) - G\left(x_k\right)\right] \mathrel{\hat{=}} \\ &\mathrel{\hat{=}} \int_{-\infty}^{\infty} x^2 dG(x) . \end{aligned}$$

Az itt tárgyalt formulák az *absztrakt helyettesítés formula* speciális esetei. A formula szerint valamely valószínűségi változó valamely függvényének várható értékét úgy kell kiszámolni, hogy a függvényt integráljuk a változó eloszlása szerint. Absztrakt jelöléssel, ha G egy ξ változó eloszlásfüggvénye, akkor

$$\mathbf{M}\left(g\left(\xi\right)\right) = \int_{\mathbb{R}} g\left(x\right) dG\left(x\right) .$$

A várható érték egy integrál[22]. Az integrálban a súlyt a valószínűségek adják, a súlyozandó értéket pedig a valószínűségi változók. Ezt fejezi ki a várható értéket megadó

$$\mathbf{M}\left(\eta\right) = \int_{\Omega} \eta\left(\omega\right) d\mathbf{P}\left(\omega\right)$$

absztrakt jelölés: az η értékeit be kell súlyozni a megfelelő valószínűségekkel, majd ezeket össze kell adni[23]. A helyettesítési formula azt adja meg, hogy miként lehet az absztrakt módon megadott integrált aprópénzre váltani, vagyis miként lehet az absztrakt módon definiált várható értéket Stieltjes-integrálra visszavezetni.

Miként említettük minden integrál esetén az első kérdés mikor létezik az integrál? Természetesen az integrál létezését ismételten a Cauchy-kritériumra akarjuk visszavezetni. Vegyük észre, hogy az alábbiakban egy igen gyakori matematikai trükköt alkalmazunk. Veszünk egy régi, jól megértett definíciót, illetve rá épülő bizonyításokat, majd a definíciót megváltoztatjuk, miközben a bizonyításokat lényegében változatlanul hagyjuk, illetve csak értelemszerűen módosítjuk[24]. Először tegyük fel, hogy a G súlyfüggvény monoton nő. Próbáljuk megbecsülni a

$$\Delta \mathrel{\hat{=}} \left| \sum_{k=1}^{n} f\left(t_k\right)\left(G\left(x_k'\right) - G\left(x_{k-1}'\right)\right) - \sum_{l=1}^{m} f\left(s_l\right)\left(G\left(x_l''\right) - G\left(x_{l-1}''\right)\right) \right|$$

[21]A számegyenes a ξ értékkészlete.

[22]Tulajdonképpen az egyik legjobb, legtermészetesebb példa olyan integrálra, ahol a súlyfüggvény nem az $y = x$ függvény. Vagyis a súlyfüggvény szerinti integrálásra a legismertebb példa a várható érték.

[23]Némiképpen elnagyolva $d\mathbf{P}(\omega)$ adja annak a valószínűségét, hogy az ω kimenetel következik be. Ezt kell beszorozni az $\eta(\omega)$ értékkel, majd az így kapott értékeket összegezni kell. Miként a helyettesítéses integrálás esetén most is három dolgot kell kicserélni: a ξ változót x-re az Ω teret $\mathbb{R}$-re és a $\mathbf{P}$ mértéket pedig a ξ változó eloszlásfüggvényére.

[24]Az elv azonos az objektum orientált programozás gondolatmenetével. Másképpen a különböző integrálfogalmak az eredeti Riemann-féle konstrukció „overloadolásával" keletkeznek.

eltérést. Ismételten közös osztópontokra áttérve

$$\begin{aligned}\Delta &= \left|\sum_{k=1}^{N}\left(f\left(t_k\right)-f\left(s_k\right)\right)\left(G\left(x_k\right)-G\left(x_{k-1}\right)\right)\right| \leq \\ &\leq \sum_{k=1}^{N}\left|\left(f\left(t_k\right)-f\left(s_k\right)\right)\left(G\left(x_k\right)-G\left(x_{k-1}\right)\right)\right| \leq \\ &\leq \max_{k=1}^{N}\left|f\left(t_k\right)-f\left(s_k\right)\right|\sum_{k=1}^{N}\left|G\left(x_k\right)-G\left(x_{k-1}\right)\right| \leq \\ &\leq \max_{k=1}^{N}\left|f\left(t_k\right)-f\left(s_k\right)\right|\left(G\left(b\right)-G\left(a\right)\right).\end{aligned}$$

A $G(b)-G(a)$ eltérés véges, így miként a Riemann-integrál esetén, most a Δ tetszőlegesen kicsi lehet, így a közelítő összegek sorozata most is Cauchy-sorozat. Így a valós számok teljessége miatt a közelítő összegek sorozata ismét konvergens, tehát folytonos integrandus és monoton növekedő integrátor esetén a Stieltjes-integrál létezik.

Vegyük azonban észre, hogy a G monotonitását csak a

$$\sum_{k=1}^{N}\left|G\left(x_k\right)-G\left(x_{k-1}\right)\right| = G(b)-G(a)$$

egyenlőség teljesültekor használtuk. A bizonyítás szó szerint érvényben marad akkor is, ha a

$$\sum_{k=1}^{N}\left|G\left(x_k\right)-G\left(x_{k-1}\right)\right|$$

kifejezés korlátos. Ez indokolja a következő definíciót:

2.5 Definíció.
Ha a G függvényhez létezik olyan K konstans, hogy az $[a,b]$ szakasz minden $(x_k)_{k=1}^{N}$ felbontására

$$\sum_{k=1}^{N}\left|G\left(x_k\right)-G\left(x_{k-1}\right)\right| \leq K,$$

akkor a G függvényt az $[a,b]$ szakaszon korlátos változásúnak mondjuk. A lehetséges K korlátok halmazának legnagyobb alsó korlátját[25] a G variációjának, vagy teljes megváltozásának mondjuk és $V_{a,b}(G)$ módon jelöljük. Nem nehéz belátni, hogy.

$$V_{a,b}(G) \stackrel{\circ}{=} \sup_{(x_k)}\sum_{k}\left|G\left(x_k\right)-G\left(x_{k-1}\right)\right|,$$

ahol a szuprémumot az $[a,b]$ összes lehetséges (x_k) felbontása szerint kell venni.

Az elmondottak miatt, lényegében definíció szerint, ugyanis a bizonyításon egy szót sem kell változtatni, érvényes a következő állítás:

2.6 Állítás.
Ha az f integrandus folytonos, a G integrátor korlátos változású az $[a,b]$ véges szakaszon, akkor létezik az

$$\int_a^b f(x)\,dG(x)$$

Stieltjes-integrál.

[25] Vagyis venni kell a lehetséges korlátok infimumát, amely a lehetséges korlátok közül a legkisebb.

Az integrállal kapcsolatos következő kérdés: hogyan számolható ki? Sok jó, és főleg új hírt nem tudunk mondani. Az integrál kiszámítását lehetőség szerint vissza kell vezetni a Newton–Leibniz-szabályra! Ezt a következő módon tehetjük meg: Tegyük fel, hogy a G súlyfüggvény folytonosan deriválható. A deriválhatóság miatt használható a középérték-tétel, vagyis

$$G(x_k) - G(x_{k-1}) = g(t_k)(x_k - x_{k-1}),$$

ahol g értelemszerűen a G deriváltja és $t_k \in (x_{k-1}, x_k)$. Ebből a (t_k) köztes pontokhoz tartozó közelítő összegekre

$$\sum_{k=1}^{n} f(t_k)(G(x_k) - G(x_{k-1})) = \sum_{k=1}^{n} f(t_k) g(t_k)(x_k - x_{k-1}).$$

Vegyük észre, hogy t_k közelítő pontnak a Stieltjes-féle közelítő összegben éppen a középérték-tétel által a megelőző sorban megadott pontot vettük. Ezt megtehetjük, ugyanis az integrál értéke független a közelítő pont választási módjától. A

$$\sum_{k=1}^{n} f(t_k) g(t_k)(x_k - x_{k-1})$$

kifejezés éppen az $f(x) g(x)$ folytonos függvény Riemann-féle közelítő összege, így a Riemann-integrálhatóságra vonatkozó kritérium miatt létezik az $\int_a^b f(x) g(x) dx$ integrál, amiből szükségszerűen

$$\int_a^b f(x) dG(x) = \int_a^b f(x) g(x) dx.$$

2.7 Állítás. (Asszociativitási szabály)
Ha az f és a g folytonos, $G(x) \stackrel{\circ}{=} \int_a^x g(x) dx$, akkor

$$\int_a^b f(x) dG(x) = \int_a^b f(x) g(x) dx.$$

Vegyük észre, hogy ha a G egy ξ változó eloszlásfüggvénye, akkor a g deriváltja a ξ sűrűségfüggvény és a várható érték kiszámolásának valószínűségszámításban bevezetett

$$\mathbf{M}(\xi) \stackrel{\circ}{=} \int_{-\infty}^{\infty} x dG(x) = \int_{-\infty}^{\infty} x g(x) dx$$

képletét kapjuk. Az absztrakt helyettesítési formula felhasználásával:

$$\mathbf{M}(h(\xi)) \stackrel{\circ}{=} \int_{-\infty}^{\infty} h(x) dG(x) = \int_{-\infty}^{\infty} h(x) g(x) dx.$$

2.8 Példa.
Számoljuk ki az $\int_{-1}^{1} \cos x dx^2$ integrált.

Az $y = G(x) = x^2$ deriváltja $g(x) = 2x$, így

$$\int_{-1}^{1} \cos x dx^2 = \int_{-1}^{1} 2x \cos x dx = 0.$$

2.9 Példa.
Számoljuk ki a lognormális eloszlás várható értékét!

Legyen $\xi = N(\mu, \sigma)$. Ilyenkor a ξ sűrűségfüggvénye

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right).$$

Legyen $\eta = \exp(\xi)$. Definíció szerint az η lognormális eloszlású. Az asszociativitási szabály szerint

$$\begin{aligned}
\mathbf{M}(\eta) &= \mathbf{M}(\exp(\xi)) = \int_{-\infty}^{\infty} \exp(x) f(x)\, dx = \\
&= \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \exp(x) \exp\left(-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right) dx = \\
&= \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left(-\frac{(x-\mu)^2 - 2\sigma^2 x}{2\sigma^2}\right) dx = \\
&= \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left(-\frac{x^2 - 2\mu x + \mu^2 - 2\sigma^2 x}{2\sigma^2}\right) dx = \\
&= \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left(-\frac{x - (\mu+\sigma^2))^2 + \mu^2 - (\mu+\sigma^2)^2}{2\sigma^2}\right) dx = \\
&= \exp\left(-\frac{\mu^2 - (\mu+\sigma^2)^2}{2\sigma^2}\right) = \\
&= \exp\left(-\frac{\mu^2 - \mu^2 - \sigma^4 - 2\mu\sigma^2}{2\sigma^2}\right) = \exp\left(\mu + \frac{1}{2}\sigma^2\right).
\end{aligned}$$

2.1.4. Korlátos változású függvények

1. A Stieljes-integrál kapcsán felmerülő első kézenfekvő kérdés, milyen interpretáció adható a korlátos változású függvényeknek, illetve a függvény $V_{a,b}$ teljes megváltozásának. Első lépésben képzeljük el, hogy a G függvény egy síkban, vagy térben mozgó pont koordinátáit adja meg. Természetesen ilyenkor a G nem szám, hanem vektor. A

$$\Delta \triangleq \sum_k |G(x_k) - G(x_{k-1})|$$

közelítő összegben a $|\cdot|$ jel a $G(x_k)$ és $G(x_{k-1})$ pontok közötti távolságot jelenti. Ilyenkor a Δ tekinthető a G által befutott út közelítésének: a görbe által befutott utat a közelítő pontok által meghatározott törtvonal hosszával közelítjük. Másképpen fogalmazva, a $V_{a,b}$ interpretációja éppen az a és b közötti út hossza. Pontosabban az út definíció szerint akkor véges, ha a Δ összeg az $[a, b]$ összes lehetséges felbontása esetén egy adott K korlát alatt marad, illetve $V_{a,b}(G)$ definíció szerint a G által megtett út hossza[26]. Ha a pontot hordozó tér d-dimenziós, akkor

$$|G(x_k) - G(x_{k-1})| \triangleq \sqrt{\sum_{j=1}^{d} (G_j(x_k) - G_j(x_{k-1}))^2}$$

és egyszerű megfontolással könnyen belátható, hogy a G görbe által leírt út hossza pontosan akkor véges, ha a G koordinátáit megadó függvények korlátos változásúak. Másképpen fogalmazva a teljes megváltozás végessége a görbe által befutott út végességét jelenti.

2.10 Példa.
Számoljuk ki az $y = f(x)$ függvény grafikonja által meghatározott ív hosszát.

[26] Vegyük észre, hogy a már említett eljárásról van szó: a közelítő összeg tartalmát definíció szerint kiterjesztjük a határértékre.

Az imént bemutatott eljárás alapján venni kell a koordináta függvényeket. Az $y = f(x)$ függvény grafikonja által megadott görbe mint síkban levő objektum az

$$x \mapsto (x, f(x))$$

parametrizálással írható fel. Az így felírt Γ görbének pontosan akkor létezik hossza, ha az f függvény korlátos változású[27]. A görbe hosszát közelítő összeg

$$\Delta \circeq \sum_{k=1}^{n} \sqrt{(x_k - x_{k-1})^2 + (f(x_k) - f(x_{k-1}))^2}.$$

A középérték-tétel miatt

$$\begin{aligned}\Delta &\circeq \sum_{k=1}^{n} \sqrt{(x_k - x_{k-1})^2 + (f'(t_k)(x_k - x_{k-1}))^2} = \\ &= \sum_{k=1}^{n} \sqrt{1 + (f'(t_k))^2}(x_k - x_{k-1}).\end{aligned}$$

Ez utóbbi összeg éppen az

$$\int_a^b \sqrt{1 + (f'(x))^2} dx$$

integrál közelítő összege. Ha tehát az f' derivált létezik és folytonos, akkor az ív hossza létezik és a fenti integrál segítségével kiszámolható. Az elmondottak fontos következménye, hogy ha az f függvény folytonosan deriválható, akkor korlátos változású. A korlátos változású függvények köre azonban sokkal bővebb mint a folytonosan deriválható függvények köre. Miként láttuk, például egy $[a, b]$ véges zárt szakaszon értelmezett minden monoton függvény korlátos változású.

2.11 Példa.
Számoljuk ki az $y = \frac{2}{3}x^{3/2}$ függvény grafikonja által meghatározott görbe hosszát.

Az ívhossz képlete szerint

$$\begin{aligned}\int_0^t \sqrt{1 + \left(x^{1/2}\right)^2} dx &= \int_0^t (1 + x)^{1/2} dx = \\ &= \left[\frac{2}{3}(1 + x)^{3/2}\right]_0^t = \frac{2}{3}\left((1 + t)^{3/2} - 1\right).\end{aligned}$$

□

2. További, kézenfekvő kérdés, hogy miként számolható ki $V_{a,b}(f)$. Ha az f deriválható, akkor a változása egyszerűen kiszámolható. Ha a felosztás már elég finom , akkor a középérték-tétel miatt

$$\begin{aligned}V_{a,b}(f) &\circeq \sup_{(x_k)} \sum_k |f(x_k) - f(x_{k-1})| \approx \\ &\approx \sum_k |f(x_k) - f(x_{k-1})| = \\ &= \sum_k |f'(u_k)(x_k - x_{k-1})| \approx \int_a^b |f'(x)| dx.\end{aligned}$$

2.12 Példa.
Számoljuk ki az $y = x^2$ függvény teljes megváltozását a $[-1, 1]$ intervallumon!

[27] Ugyanis az $y = x$ függvény triviálisan korlátos változású. Természetesen hangsúlyozni kell, hogy véges szakaszon vagyunk, hiszen két rögzített pont közötti távolságot akarjuk megadni.

$$V_{-1,1}\left(x^2\right) = \int_{-1}^{1} |2x|\, dx = 2.$$

□

2.13 Példa.
Számoljuk ki a $\sin x$ *függvény variációját a* $[0, 2\pi]$ *szakaszon!*

$$V_{0,2\pi}(\sin x) = \int_0^{2\pi} |\cos x|\, dx = 4.$$

□

Nem nehéz észrevenni az

$$V_{a,b}(f) = \int_a^b |f'(x)|\, dx = \int_a^b \sqrt{(f'(x))^2} dx$$

képlet és az ívhosszra vonatkozó $\int_a^b \sqrt{1 + (f'(x))^2} dx$ képlet közötti szoros kapcsolatot. A két képlet közötti eltérés egyedül abból származik, hogy az ívhossz kiszámolásakor a síkban a távolságot a közönséges geometria szabályai szerint vettük. Ha a görbét nem a kétdimenziós síkba beágyazva képzeljük el, hanem „önmagában" próbáljuk a hosszát megadni, akkor kézenfekvő a görbe hosszát a teljes változásával definiálni. Vegyük észre, hogy speciálisan azt is beláttuk, hogy ha a G függvény $G(x) = \int_0^x g(t)\, dt$ alakba írható, ahol a g sűrűségfüggvény folytonos, akkor a G minden $[a, b]$ szakaszon korlátos változású, ugyanis ilyenkor a G deriváltja g és

$$V_{a,b}(G) = \int_a^b |g(t)|\, dt < \infty,$$

ugyanis a fenti Riemann-integrál a g folytonossága miatt létezik és véges.

2.1.5. Sztochasztikus Stieltjes-integrálás

Legyen $\theta(t, \omega)$ sztochasztikus folyamat, az integrandus, és $S(t, \omega)$ egy másik folyamat az integrátor. Mit értsünk az $\int_a^b \theta dS$ kifejezésen? A legegyszerűbb esetben, amikor az S integrátor $t \mapsto S(t, \omega)$ trajektóriái nőnek, illetve általában korlátos változásúak és a θ integrandus $t \mapsto \theta(t, \omega)$ trajektóriák folytonosak, akkor minden rögzített ω-ra értelmezhető a

$$\sum_k \theta(u_k, \omega)\left(S(t_k, \omega) - S(t_{k-1}, \omega)\right)$$

közelítő összegek határértéke. Az így kapott integrált szokás *sztochasztikus Stieltjes-integrálnak* mondani. Ilyenkor az u_k közelítő pont a $[t_{k-1}, t_k]$ tetszőleges pontja lehet. A közelítő u_k pontok trajektóriánként is mások és mások lehetnek. A közönséges Stieltjes-integrál tulajdonságai, változtatás nélkül átvihetők sztochasztikus Stieltjes-integrálokra. Például, ha az S folytonosan deriválható, vagyis minden ω-ra a $t \mapsto S(t, \omega)$ trajektória folytonosan deriválható, akkor

$$\sum_k \theta(u_k, \omega)\left[S(t_k, \omega) - S(t_{k-1}, \omega)\right] = \sum_k \theta(u_k, \omega) S'(v_k, \omega)\left[t_k - t_{k-1}\right]$$

amely az

$$\int_a^b \theta S' dt \tag{2.2}$$

trajektóriánként vett integrálhoz tart. Ezt formálisan a

$$\theta dS = \theta S' dt$$

módon szokás jelölni. Hangsúlyozzuk, hogy a bevezetett integrálfogalom a klasszikus integrálelméletben szokásos integrálás ω szerinti parametrikus verziója, minden ω esetén külön-külön végrehajtjuk az integrálást Egy S folyamat variációján, teljes megváltozásán a

$$V_{a,b}(S) \mathrel{\hat{=}} \sup_{(t_k)} \sum_k |S(t_k) - S(t_{k-1})|$$

kifejezést értjük, ahol Δ az $[a,b]$ összes lehetséges felbontásán fut végig. Vegyük észre, hogy sztochasztikus integrátor esetén a $V_{a,b}$ függ az ω kimeneteltől, vagyis valószínűségi változó. Az S folyamatot véges változásúnak mondjuk, ha az összes ω kimenetelre a $t \mapsto S(t,\omega)$ trajektóriák minden $[a,b]$ szakaszon korlátos változásúak.

2.14 Példa.
Poisson-folyamat szerinti sztochasztikus integrálás.

A sztochasztikus Stieltjes-integrálásra legjobb példa valamely π Poisson-folyamat szerinti integrálás. A π integrátor trajektóriái monoton nőnek, így ha az $f(t,\omega)$ integrandus trajektóriái folytonosak, akkor értelmezhető a $t \mapsto \int_0^t f(s)\,d\pi(s)$ sztochasztikus folyamat. A π trajektóriái egy magasságú ugrásokból állnak, így a

$$\sum_k f(\sigma_k)(\pi(s_k) - \pi(s_{k-1}))$$

közelítő összegben minden tag nulla, kivéve azok a tagok, amelyekben az (s_{k-1}, s_k) intervallum éppen a π egy ugrópontját veszi körül. Ebből azonnal látható, hogy

$$\int_0^t f d\pi = \sum_{\tau_k \le t} f(\tau_k),$$

ahol $\tau_1 < \tau_2 < \ldots$ a π ugrásainak véletlen időpontjai. Mivel a π folyamat ugrásai véges időtartományon nem torlódhatnak, ezért az integrál, minden (t,ω) pár esetén egy véges összegre redukálódik. Korábban megjegyeztük, hogy ha a súlyfüggvény folytonosan deriválható, akkor a Stieltjes-integrálok visszavezethetők Riemann-integrálokra. Vegyük észre, hogy az imént elmondottakat kézenfekvő módon általánosítva megmutatható, hogy ha a súlyfüggvény diszkrét pontokban ugrik, akkor a Stieltjes-integrálok értékének meghatározása sorösszegek kiszámolását jelenti. Például ha $G(x)$ egy az x_k értékeket p_k valószínűséggel felvevő ξ valószínűségi változó eloszlásfüggvénye, akkor

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dG(x) = \sum_k x_k p_k,$$

ami éppen az $\mathbf{M}(\xi)$ várható érték elemi valószínűségszámításban megadott képlete[28].

□

2.2. Itô-féle sztochasztikus integrál

A sztochasztikus analízis legfontosabb észrevétele, hogy nem minden sztochasztikus folyamat trajektóriái korlátos változásúak, sőt az érdekes folyamatok, mint például a Wiener-folyamat, illetve általában a Lévy-folyamatok, illetve a martingálok trajektóriái általában nem korlátos változásúak.

[28]A Stieltjes-integrál jelentőségét nagyrészt az adja, hogy segítségével az elemi valószínűségszámításban külön kezelt folytonos és diszkrét eloszlások egyszerre kezelhetők. Az elemi analízisben külön tárgyalt két fogalom az integrál és a sorösszeg lényegében azonos: mind a kettő a Stieltjes-integrál speciális esete.

2.2.1. Kvadratikus variáció

Bár a Stieltjes-integrál a matematika talán legsikeresebb integrálfogalma, számunkra nem megfelelő, ugyanis ha az S integrátor folytonos martingál, például valamilyen Wiener-folyamat, akkor a trajektóriák egy valószínűséggel nem korlátos változásúak! A Stieltjes-integrál csak korlátos változású súlyfüggvény esetében értelmezhető. Hangsúlyozni kell, hogy az integrál nem értelmezhetősége nem azt jelenti, hogy az integrálás eredménye értelmetlen, rossz vagy a szemléletnek ellentmondó érték. Ez azt jelenti, hogy a megadott definíció nem ad választ, sem jót, sem rosszat, sem értelmeset, sem értelmetlent. Másik definíciót kell keresni, lehetőleg olyat, amelyet a korábbi, jól bevált esetben alkalmazva a korábbi definíciót kapjuk vissza.

Az egész sztochasztikus analízis kulcsa a *kvadratikus variáció*, másnéven négyzetes megváltozás! Az alapgondolat a következő: Ha az S integrátor $V_{a,b}(S)$ teljes megváltozása végtelen, akkor a $\Delta S(t_k) \doteq S(t_k) - S(t_{k-1})$ növekmények „túl nagyok". Ha az S trajektóriái folytonosak, akkor a $\Delta S(t_k)$ jellemzően egynél kisebb, így a $(\Delta S(t_k))^2$ kisebb mint a $\Delta S(t_k)$, így várhatóan, illetve remélhetőleg a

$$Q_2 \doteq \lim_{\Delta \searrow 0} \sum_k (S(t_k) - S(t_{k-1}))^2 \doteq \langle S \rangle_2$$

kifejezés véges lesz. Valamivel általánosabban, ha $p \geq 1$, akkor képezhetjük a

$$Q_p \doteq \lim_{\Delta \searrow 0} \sum_k (S(t_k) - S(t_{k-1}))^p \doteq \langle S \rangle_p$$

kifejezést, amit az S függvény *p-ed rendű variációjának* vagy megváltozásának mondunk. Ha $p = 2$, akkor az indexet az egyszerűség kedvéért elhagyjuk[29].

2.15 Példa.
A Wiener-folyamatok kvadratikus variációja-

Ha w Wiener-folyamat, $[a,b] \doteq [0,1]$, és $\Delta_n = (t_k)$ a $[0,1]$ szakasz n egyenlő részre való felbontása, akkor

$$w(t_k) - w(t_{k-1}) \cong N\left(0, \frac{1}{\sqrt{n}}\right),$$

tehát

$$\sum_k (w(t_k) - w(t_{k-1}))^2 \cong \sum_k N\left(0, \frac{1}{\sqrt{n}}\right)^2,$$

vagyis a kvadratikus variáció közelítő összege $1/n$ varianciájú, független változók négyzetének összege. A varianciák adódnak össze, nem a szórások! Ugyanakkor

$$N\left(0, \sqrt{\frac{1}{n}}\right) = \frac{1}{\sqrt{n}} N(0,1),$$

ugyanis a szórás emelhető ki, és nem a variancia! Ebből

$$\sum_k (w(t_k) - w(t_{k-1}))^2 \cong \frac{\sum_k N(0,1)^2}{n}.$$

A nagy számok törvénye alapján a határérték létezik, és 1. Triviálisan látható, hogy ha a $[0,1]$ helyett a $[0,T]$ szakaszt írtuk volna, akkor a határérték T lenne. Ennek megfelelően a Wiener-folyamat kvadratikus variációja a $[0,T]$ szakaszon T.

□

[29] A jelölés nem teljesen megfelelő. Az irodalomban a kvadratikus variációt a $[.]$ jellel szokás jelölni, a $\langle . \rangle$ jel az úgynevezett előrejelezhető kvadratikus variációra utal. Folytonos folyamatok estén a két fogalom egybeesik. Mivel mi csak folytonos folyamatokkal foglalkozunk a jelölésből eredő pontatlanság érdektelen.

Ugyanakkor nem csak a Wiener-folyamatnak van véges kvadratikus variációja, hanem tetszőleges martingál esetén létezik véges kvadratikus variáció, amely a triviális konstans esettől eltekintve[30] mindig pozitív. Hangsúlyozni kell, hogy általában egy martingálra a kvadratikus variáció valódi sztochasztikus folyamat, vagyis függ az időtől és az ω kimeneteltől. A Wiener-folyamat azért a legegyszerűbb nem triviális folytonos sztochasztikus folyamat, mert a kvadratikus variációja a lehető legegyszerűbb.

2.16 Példa.
Vizsgáljuk meg a Wiener-folyamat variációját[31]!

Legyen w egy Wiener-folyamat.

$$\sum_k |w(t_k) - w(t_{k-1})| \cong \frac{\sum_k |N(0,1)|}{\sqrt{n}}$$

Ha $\infty > M > 0$ jelöli az $|N(0,1)|$ várható értékét, akkor a centrális határeloszlás-tétel miatt

$$\frac{\sum_k |N(0,1)| - nM}{\sqrt{n}} \approx N(0,1),$$

amiből

$$\sum_k |w(t_k) - w(t_{k-1})| \approx N(0,1) + \frac{nM}{\sqrt{n}} \to \infty.$$

□

Másoldalról ugyanez. A kvadratikus variációra

$$\sum_k (\Delta w(t_k))^2 \leq \max_k |\Delta w(t_k)| \sum_k |\Delta w(t_k)|.$$

Mivel a bal oldal, a kvadratikus variáció egy pozitív konstanshoz konvergál, és a jobb oldalon az első tag a folyamat folytonossága miatt nullához tart, a másik tagnak végtelenbe kell tartani, ugyanis ellenkező esetben

$$0 < \langle w \rangle = \sum_k (\Delta w(t_k))^2 = 0$$

lenne. Egy folytonos folyamatra, ha a teljes megváltozás véges, akkor a kvadratikus variáció nulla, ha viszont a kvadratikus variáció pozitív, akkor a teljes megváltozás végtelen. Általában egy konkrét S görbe esetén különböző p kitevőkre három eset lehetséges:

1. a p-ed rendű variáció véges, pozitív szám,
2. a p-ed rendű variáció nulla, illetve
3. a p-ed rendű variáció végtelen.

Tegyük fel, hogy az S függvény folytonos. A

$$\sum_k [\Delta S(t_k)]^{p+\varepsilon} \leq \max_k |\Delta S(t_k)|^{\varepsilon} \sum_k |\Delta S(t_k)|^p$$

felbontásban ha $\varepsilon > 0$, akkor a feltételezett folytonosság miatt

$$\max_k |\Delta S(t_k)|^{\varepsilon} \to 0.$$

Ebből következően ha valamely p-re a p-ed rendű variáció véges, akkor minden $q \circeq p + \varepsilon > p$ esetén a q-ad rendű variáció nulla, ha a q-ad rendű variáció pozitív, akkor az összes $p < q$ esetén a p-ed rendű variáció végtelen kell hogy legyen. Másképpen fogalmazva azok a p értékek,

[30] Amikor a martingál konstans trajektóriákkal rendelkezik.
[31] Nem a kvadratikus variációját, hanem a közönséges variációját.

amelyekre egy adott függvény p-ed rendű variációja nulla, illetve végtelen egy p_0 pont kivételével kimerítik a pozitív számok halmazát. Mind a két értékhez tartozó p-k halmaza félegyenes, és a két félegyenes egyedül a p_0 pontban érintkezik. A p_0 pontban azonban bármi előfordulhat: a p_0-ad rendű variáció lehet pozitív, nulla vagy végtelen. Általában sztochasztikus folyamatok esetén semmi sem garantálja, hogy az egyes trajektóriákhoz tartozó p_0 értékek azonosak legyenek. Miként azonban láttuk a Wiener-folyamat esetén a p_0 értéke 2. Ennek megfelelően, ha az integrátor Wiener-folyamat, akkor a trajektóriák nem korlátos változásúak, így a klasszikus trajektóriánkénti integrálás elmélete nem működik!!!!!

Érdemes nyomatékosan hangsúlyozni, hogy a megfontolás alapvetően az S trajektóriáinak folytonosságára épül. Ha az S a sztochasztikus folyamatok irodalmának másik kedvence, a Poisson-folyamat, akkor mind a kvadratikus variáció, mind a teljes megváltozás az ugrások számát adja meg, így mind a kettő véges és pozitív, ráadásul mind a kettő azonos az alapfolyamattal.

2.2.2. Martingálok kvadratikus variációja, kompenzátorok

A kvadratikus variációval kapcsolatos első kézenfekvő kérdés, hogy miként interpretálható? Sajnálatos módon a $V_{a,b}(S)$ teljes megváltozással szemben az $\langle S\rangle$ kvadratikus variáció nem rendelkezik egyszerű szemléletes tartalommal. Ennek oka, hogy a „szemléletünk” eredendően a fizikai térben lejátszódó folyamatokra alapozódik, és az ilyen folyamatok $V_{a,b}$ teljes megváltozása véges, következésképpen a fizikai mozgásra alapuló szemléletünk által elképzelt folyamatok kvadratikus variációja nulla, így valódi kvadratikus variációval rendelkező folyamatokat sohasem „látunk”[32]. A kvadratikus variáció eredendően a véletlen ingadozásokat tartalmazó folyamatokhoz rendelt fogalom, így az interpretációja is a véletlen folyamatokkal kapcsolatban fellépő problémákhoz kötődik. Legyen az S martingál. Az S a martingáltulajdonság miatt definíció szerint tekinthető tökéletes véletlennek. Ez azt jelenti, hogy az S által realizált játékban való kifizetésért nem jár kompenzáció, nulla a költsége annak, hogy megszerezzük az S által reprezentált játék kifizetésfolyamatát[33]. Ugyanakkor az S^2 folyamat esetén a helyzet teljesen más. Az S^2 folyamat értéke minden pontban nem negatív, sőt általában pozitív, így az S^2 véletlen kifizetés birtoklásáért fizetni kell. Ha birtokoljuk a w^2 folyamatot, akkor elég nagy t esetén nagy valószínűséggel elég jól fogunk „kaszálni”, illetve ha elég sokat várunk, akkor tetszőlegesen nagyot kaszálhatunk. Ennek megfelelően a w^2 birtoklása elég jó buli. De semmi sincsen ingyen. Mi a „kaszálás” előre kifizetendő ára? Mennyibe kerül a kasza? Mi az S^2 folyamat fair ára? Természetesen az S^2 fair ára az a folyamat, amelyet az S^2-ből levonva tökéletesen véletlen folyamatot kapunk, vagyis az S^2 ára az a P folyamat, amelyre az $S^2 - P$ martingál. Az S^2 birtoklásáról bármikor lemondhatunk, a játékból bármikor kiléphetünk, így a P kompenzátor folyamatról kézenfekvő feltenni, hogy monoton nő[34]. Megmutatjuk, hogy az S^2 kompenzátora éppen az $\langle S\rangle$, vagyis az $S^2 - \langle S\rangle$ folyamat martingál[35]. Az egyszerűség kedvéért tegyük fel, hogy $S(0) = 0$, ugyanis ellenkező esetben a gondolatmenetet az $S(t) - S(0)$ martingálra alkalmaznánk.

$$S^2(t) - \langle S\rangle(t) \approx S^2(t) - \sum_k \left(S(t_k) - S(t_{k-1})\right)^2.$$

[32] Ugyanakkor minden olyan folyamat, amit „látunk” véges úthosszal, így véges variációval rendelkezik.

[33] Persze ha a várható érték nulla. Pozitív várható érték esetén nyilván fizetni kell és éppen a várható értéket.

[34] Nem folytonos folyamatok esetén célszerű megkövetelni, hogy a P „előrejelezhető” legyen, vagyis a P kompenzátor értékét az ugrás „előtt” ki kell fizetni, vagyis a várható ugrásért a kompenzációt az ugrást megelőzően előre rögzíteni kell, ugyanis az ugrás után már könnyű okosnak lenni. Vagyis a biztosítási díjat az előtt kell kifizetni mint ahogy az ugrás nagysága kiderül. Az előrejelezhetőség a balról való folytonosság általánosítása. A balról folytonos folyamatok „infinitezimálisan" előrejelezhetőek. Ez azonban a sztochasztikus analízis igen rejtett összefüggése, amire csak nagyon érintőlegesen hivatkozunk. A folytonos folyamatok egyik előnyös tulajdonsága, hogy a kvadratikus variáció és az úgynevezett előrejelezhető kvadratikus variáció megegyezik. Ebből következően az elmondottak lényegében csak folytonos lokális martingálok esetén érvényesek, a nem folytonos esetben számos nem elhanyagolható technikai nehézség lép fel.

[35] Folytonos esetben az $\langle S\rangle$ folytonos, így „előrejelezhető".

A kvadratikus variációban szereplő zárójelet felbontva

$$\begin{aligned}\left(S\left(t_k\right)-S\left(t_{k-1}\right)\right)^2 &= S^2\left(t_k\right)+S\left(t_{k-1}\right)^2-2S\left(t_k\right)S\left(t_{k-1}\right)= \\ &= S^2\left(t_k\right)-S\left(t_{k-1}\right)^2- \\ &\quad -2S\left(t_{k-1}\right)\left(S\left(t_k\right)-S\left(t_{k-1}\right)\right).\end{aligned}$$

Ebből következően, ha $0=t_0<t_1<\ldots<t_n=t$ a $[0,t]$ időszakasz egy tetszőleges felbontása, akkor

$$\begin{aligned}S^2(t)-\langle S\rangle(t) &\approx S^2(t_n)-\sum_{k=1}^{n}\left(S^2(t_k)-S^2(t_{k-1})\right)+ \\ &\quad +\sum_{k=1}^{n}2S(t_{k-1})\left(S(t_k)-S(t_{k-1})\right).\end{aligned}$$

A teleszkopikus összeget kibontva és felhasználva, hogy a feltétel szerint $S(t_0)=S(0)=0$

$$S^2(t)-\langle S\rangle(t)=\sum_{k=1}^{n}2S(t_{k-1})\left(S(t_k)-S(t_{k-1})\right).$$

Megmutatjuk, hogy a

$$\sum_k 2S(t_{k-1})\left(S(t_k)-S(t_{k-1})\right)\stackrel{\circ}{=}\sum_k d_k$$

összeg martingál, amihez elegendő belátni, hogy a

$$d_k\stackrel{\circ}{=}2S(t_{k-1})\left(S(t_k)-S(t_{k-1})\right)$$

sorozat martingáldifferencia sorozat: A kiemelési szabály miatt, felhasználva, hogy az S martingál

$$\begin{aligned}\mathbf{M}\left(d_k\mid\mathcal{F}_{t_{k-1}}\right) &\stackrel{\circ}{=} 2\mathbf{M}\left(S(t_{k-1})\left(S(t_k)-S(t_{k-1})\right)\mid\mathcal{F}_{t_{k-1}}\right)= \\ &= 2S(t_{k-1})\mathbf{M}\left(\left(S(t_k)-S(t_{k-1})\right)\mid\mathcal{F}_{t_{k-1}}\right)= \\ &= 2S(t_{k-1})\cdot 0=0,\end{aligned}$$

tehát a $(d_k)_k$ valóban martingáldifferencia sorozat, így az

$$S^2(t)-\langle S\rangle(t)\approx\sum_{t_k\le t}d_k$$

martingál.

2.17 Példa.
A w^2 kompenzátora t.

Emlékeztetünk, hogy $\langle w\rangle(t)=t$. Meg kell mutatni, hogy a $w^2(t)-t$ folyamat martingál. Legyen $s<t$ tetszőleges. A független növekmény feltétele miatt

$$\begin{aligned}&\mathbf{M}\left(w^2(t)\mid\mathcal{F}_s\right)= \\ =\ &\mathbf{M}\left(\left(w(t)-w(s)\right)^2+w^2(s)+2w(s)\left(w(t)-w(s)\right)\mid\mathcal{F}_s\right)= \\ =\ &w^2(s)+\mathbf{M}\left(\left(w(t)-w(s)\right)^2\right)+2\mathbf{M}\left(w(s)\left(w(t)-w(s)\right)\mid\mathcal{F}_s\right).\end{aligned}$$

A kiemelési szabály, illetve a w martingáltulajdonsága miatt az utolsó kifejezés

$$w(s)\mathbf{M}\left(\left(w(t)-w(s)\right)\mid\mathcal{F}_s\right)=0,$$

az $\mathbf{M}\left((w(t)-w(s))^2\right)$ második tag értéke $t-s$, így

$$\mathbf{M}\left(w^2(t) \mid \mathcal{F}_s\right) = w^2(s) + t - s,$$

amit átrendezve

$$\mathbf{M}\left(w^2(t) - t \mid \mathcal{F}_s\right) = w^2(s) - s,$$

vagyis a $w^2(t) - t$ valóban martingál.

□

2.2.3. Martingálok szerinti Itô-integrálás

Tegyük fel, hogy az S martingál és próbáljuk meg értelmezni a $\int_a^b \theta(t)\, dS(t)$ integrált. Miként jeleztük ha az S folytonos martingál, akkor a triviális konstans esettől[36] eltekintve a trajektóriái nem korlátos változásúak, így az integrált hagyományos módon, trajektóriánként vett Stieltjes-integrálként, nem tudjuk definiálni.

2.18 Definíció.
Tegyük fel, hogy az $I_n \doteq \sum_k \theta(\tau_k)\, \Delta S(t_k)$ közelítő összegekben τ_k közelítő pontnak a $[t_{k-1}, t_k]$ intervallum $\tau_k = t_{k-1}$ kezdőpontját vesszük. Ilyenkor Itô-féle közelítő összegekről beszélünk.

A hagyományos integrálelmélet tárgyalásakor hangsúlyoztuk, hogy a közelítő összegek képzésekor a közbülső pont tetszőlegesen választható, és az integrál értéke független attól, hogy melyik pontban számoltuk ki az integrandus közelítő értékét. Az Itô-féle sztochasztikus integrálok esetében ez nincsen így. A közelítő összeget mindig az intervallum kezdőpontjában kell képezni. Matematikai szempontból az Itô-integrál legfontosabb sajátja éppen ez. A közelítő összeg ezen képzési szabálya azonban igen szemléletes, és tulajdonképpen nagyon természetes. Ha az S integrátorfolyamatot kumulált nyereségként értelmezzük, akkor a $\Delta S(t_k) \doteq [S(t_k) - S(t_{k-1})]$ növekmény a $[t_{k-1}, t_k]$ időszak alatt elért egységnyi befektetésre jutó nyeremény, következésképpen az időszak alatt elért teljes nyeremény arányos az időszak során megtett $\theta(\tau_k)$ téttel. Ugyanakkor egy fogadásban a tétet mindig a fogadás tárgyát képező véletlen esemény előtt kell megtenni, vagyis a $[t_{k-1}, t_k]$ időszakra eső fogadás nagyságát a t_{k-1} időpontban kell megadni.

2.19 Példa.
A sztochasztikus integrál értéke függhet a közelítő pont megválasztásának módjától.

Legyen w Wiener-folyamat és próbáljuk meg definiálni az $\int_a^b w dw$ integrált. A közelítő összegekre áttérve

$$\begin{aligned} I_n^{(1)} &\doteq \sum_k w(t_{k-1})\left(w(t_k) - w(t_{k-1})\right), \\ I_n^{(2)} &\doteq \sum_k w(t_k)\left(w(t_k) - w(t_{k-1})\right). \end{aligned}$$

A két összeg közötti egyetlen eltérés, hogy a τ_k közelítő pont az első esetben a részintervallum eleje, a második esetben a vége. Ugyanakkor

$$\begin{aligned} I_n^{(2)} - I_n^{(1)} &\doteq \sum_k w(t_k)\, \Delta w(t_k) - \sum_k w(t_{k-1})\, \Delta w(t_k) = \\ &= \sum_k \left(w(t_k) - w(t_{k-1})\right) \Delta w(t_k) = \\ &= \sum_k \left(w(t_{k-1}) - w(t_k)\right)^2, \end{aligned}$$

[36]Az $S(t) = c$ konstans folyamat martingál és a trajektóriái korlátos változásúak. Ez az eset azonban meglehetősen érdektelen, ugyanis a játék nyereménye $\Delta S(t) = 0$. Erre mondják olcsó játék, bölcs embereknek.

vagyis a két közelítő összeg különbsége éppen a Wiener-folyamat kvadratikus variációjának közelítő értéke. Ebből következően ha a két közelítő összegnek van határértéke, akkor a két határérték nem lehet azonos, vagyis az integrál értéke függ a közelítő pont megválasztási módjától. Ez másképpen úgy is fogalmazható, hogy tetszőleges köztes pont megengedése esetén az integrálközelítő összegek sorozata semmilyen konvergenciafogalom esetén nem lehet konvergens.

□

Vegyük észre, hogy az előző példában a bűnös természetesen a kvadratikus variáció. Az integrál értéke azért függ a köztes ponttól, mert a kvadratikus variáció pozitív. Vizsgáljuk meg az integrál létezésének problémáját! Vegyük észre, hogy az integrál létezése távolról sem tűnik természetesnek. A kvadratikus variáció pozitivitása erősen felforgatja az integrálelméletet. Tulajdonképpen igen meglepő, hogy ebből a „gyászos" helyzetből mégis van elegáns kiút.

Számoljuk ki az

$$I_n \stackrel{\circ}{=} \sum_{k=1}^{n} \theta\left(t_{k-1}\right) \Delta S\left(t_k\right)$$

Itô-féle közelítő összeg várható értékét és szórását.

$$\begin{aligned}
\mathbf{M}\left(I_n\right) &= \mathbf{M}\left(\sum_k \theta\left(t_{k-1}\right) \Delta S\left(t_k\right)\right) = \\
&= \sum_k \mathbf{M}\left(\theta\left(t_{k-1}\right) \Delta S\left(t_k\right)\right) = \\
&= \sum_k \mathbf{M}\left(\mathbf{M}\left(\theta\left(t_{k-1}\right) \Delta S\left(t_k\right) \mid \mathcal{F}_{t_{k-1}}\right)\right) = \\
&= \sum_k \mathbf{M}\left(\theta\left(t_{k-1}\right) \mathbf{M}\left(\Delta S\left(t_k\right) \mid \mathcal{F}_{t_{k-1}}\right)\right) = \\
&= \sum_k \mathbf{M}\left(\theta\left(t_{k-1}\right) \cdot 0\right) = 0,
\end{aligned}$$

ahol természetesen kihasználtuk, hogy az S martingál, vagyis

$$\mathbf{M}\left(\Delta S\left(t_k\right) \mid \mathcal{F}_{t_{k-1}}\right) = 0$$

és hogy a $\theta\left(t_{k-1}\right)$ kiemelhető az $\mathcal{F}_{t_{k-1}}$ szerinti feltételes várható értékből. A szórás kiszámolására rátérve, ha $s < t$, akkor

$$\begin{aligned}
&\mathbf{M}\left(\theta(t)\left[S(t+h)-S(t)\right]\theta(s)\left[S(s+h)-S(s)\right]\right) = \\
=\ &\mathbf{M}\left(\mathbf{M}\left(\theta(t)\left[S(t+h)-S(t)\right]\theta(s)\left[S(s+h)-S(s)\right] \mid \mathcal{F}_t\right)\right) = \\
=\ &\mathbf{M}\left(\theta(t)\,\theta(s)\left[S(s+h)-S(s)\right]\mathbf{M}\left(\left[S(t+h)-S(t)\right] \mid \mathcal{F}_t\right)\right) = \\
=\ &\mathbf{M}\left(\theta(t)\,\theta(s)\left[S(s+h)-S(s)\right]\cdot 0\right) = 0,
\end{aligned} \tag{2.3}$$

ugyanis a $\theta(t)\,\theta(s)\left[S(s+h)-S(s)\right]$ változó értéke a t időpontban már ismert, és ezért kiemelhető t időponthoz tartozó feltételes várható értékből. Ebből következően az alábbi számolás során a vegyesszorzatok várható értéke nulla:

$$\begin{aligned}
\mathbf{D}^2\left(I_n\right) &= \mathbf{M}\left(\left(\sum_k \theta\left(t_{k-1}\right)\left[S\left(t_k\right)-S\left(t_{k-1}\right)\right]\right)^2\right) = \\
&= \mathbf{M}\left(\sum_k \sum_j \theta\left(t_{k-1}\right)\theta\left(t_{j-1}\right)\Delta S\left(t_k\right)\Delta S\left(t_j\right)\right) = \\
&= \sum_k \mathbf{M}\left(\left(\theta\left(t_{k-1}\right)\right)^2\left[S\left(t_k\right)-S\left(t_{k-1}\right)\right]^2\right) \approx \\
&\approx \mathbf{M}\left(\sum_k \theta^2\left(t_{k-1}\right)\left[Q_2\left(t_k\right)-Q_2\left(t_{k-1}\right)\right]\right).
\end{aligned}$$

ahol $Q_2 \stackrel{\circ}{=} \langle S \rangle$ az S kvadratikus variációja[37]. Az $\langle S \rangle$ kvadratikus variáció nagysága a hozzá tartozó intervallum hosszának növelésével monoton nő, tehát az utolsó várható értéken belüli $\sum_k \theta^2 (t_{k-1}) \Delta \langle S \rangle$ közelítő összeg a klasszikus módon értelmezhető $\int_a^b \theta^2 d\langle S \rangle$ Stieltjes-integrál egy közelítő összege. Összefoglalva:

Ha az integrálközelítő összegeket az Itô-féle szabály szerint a

$$\sum_k \theta (t_{k-1}) (S(t_k) - S(t_{k-1}))$$

módon választjuk, és az S integrátorfolyamat martingál, akkor a közelítő összeg várható értéke nulla, varianciája pedig az

$$\mathbf{M}\left(\int_a^b \theta^2 (t) \, d\langle S \rangle\right).$$

közelítő összege lesz.

Emlékeztetünk, hogy a közönséges integrál létezését a Cauchy-kritériumra alapoztuk. Megmutattuk, hogy az integrál azért létezik, mert a közelítő összegek sorozata Cauchy-sorozat, illetve a számok halmaza teljes. Most is erről van szó. A bemutatott gondolatmenetet egyszerűen módosítva azonnal látható, hogy ha a θ folyamat folytonos, és a felosztás finomságát minden határon túl növeljük, akkor a különböző felosztásokhoz tartozó közelítő összegek sztochasztikusan közel kerülnek egymáshoz, vagyis ha az időintervallum felosztását minden határon túl növeljük, akkor az Itô-féle közelítő összegek sorozata a sztochasztikus konvergenciában Cauchy-sorozat lesz[38]. Pontosabban megmutatható, hogy tetszőleges $\varepsilon > 0$ és $\delta > 0$ szám esetén létezik olyan ρ, hogy ha az I_1 és az I_2 olyan Itô-féle közelítő összegek, amelyekre a felbontás finomsága már kisebb mint ρ, akkor

$$\mathbf{P}(|I_1 - I_2| \geq \varepsilon) \leq \delta.$$

Némiképpen heurisztikusan okoskodva: ha a (t_k) felbontás már elég finom, akkor az újabb osztópontok hozzávételével a

$$\sum_k \theta^2 (t_{k-1}) (Q(t_k) - Q(t_{k-1}))$$

már alig változik, ugyanis a $Q = \langle S \rangle$ súlyfüggvény szerint vett $\int_a^b \theta^2 (t) \, d\langle S \rangle (t)$ Stieltjes-féle trajektóriánkénti integrálok léteznek így a felbontás további finomítása már nem változtat, pontosabban csak alig-alig változtat a Stieltjes-integrálhoz tartozó közelítő összegeken. Ebből következően az

$$\mathbf{M}\left(\sum_k \theta^2 (t_{k-1}) (Q(t_k) - Q(t_{k-1}))\right)$$

szórásnégyzet is alig változik, vagyis a sztochasztikus integrálhoz tartozó Itô-féle közelítő összegek varianciája a felosztás további finomításával már alig változik, vagyis az egyes Itô-féle közelítő összegek eltérésének varianciája nullához tart. Ebből következően ha I'_n és I''_n két közelítő összeg, akkor a Csebisev-egyenlőtlenség miatt elég finom felosztásra tetszőleges rögzített $\varepsilon > 0$ szám esetén

$$\mathbf{P}(|I'_n - I''_n| \geq \varepsilon) \leq \frac{\mathbf{D}^2 (I'_n - I''_n)}{\varepsilon^2} \to 0,$$

ezért úgy érezzük, hogy az Itô-féle közelítő összegek sztochasztikusan „ráhúzódnak” az integrálra. A Riemann és Stieltjes-integrálokra használt teljességi axióma sztochasztikus megfelelője a következő:

2.20 Definíció.
A (ξ_k) sorozat sztochasztikusan Cauchy-sorozat, ha tetszőleges $\varepsilon > 0$ és $\delta > 0$ esetén van olyan $N(\varepsilon)$, hogy tetszőleges $n, m \geq N(\varepsilon)$ indexre $\mathbf{P}(|\xi_n - \xi_m| \geq \varepsilon) \leq \delta$.

[37] Vegyük észre, hogy ismét kihasználtuk a $\Delta \langle S \rangle \approx (\Delta S)^2$ közelítő formulát.

[38] Ennek oka, hogy a θ ilyenkor a két különböző felosztáshoz tartozó közelítő pontok eltérése, amely az integrandus feltételezett folytonossága miatt elég finom felosztás esetén tetszőlegesen kicsi lesz.

2.21 Definíció.
Ha minden $\varepsilon > 0$ szám esetén

$$\lim_{n\to\infty} \mathbf{P}\left(|\xi_n - \xi| > \varepsilon\right) = 0,$$

akkor azt mondjuk, hogy a (ξ_n) sorozat sztochasztikusan ξ-hez tart.

TMLJMSSÉGI TÉTML : *A valószínűségi változók halmaza a sztochasztikus konvergenciában teljes, vagyis minden a sztochasztikus konvergenciában Cauchy-sorozat sztochasztikusan konvergens*[39].

Összefoglalva az elmondottakat:

2.22 Tétel.
Folytonos θ integrandus és S martingál integrátor esetén az $[a, b]$ szakaszon képzett Itô-féle közelítő összegek sorozatának a sztochasztikus konvergenciában létezik határértéke, amelyet $\int_a^b \theta dS$ módon fogunk jelölni és a θ integrandus S szerinti Itô-integráljának fogunk mondani.

Evvel a sztochasztikus integrálás első problémáját, az integrál létezésének kérdését tisztáztuk[40].

Emlékeztetünk, hogy minden integrál, a klasszikus, a sztochasztikus, illetve a matematika által definiált összes további integrál, tartalmát tekintve súlyozott összegnek tekinthető, pontosabban heurisztikusan a súlyozott összeg és az integrál közelítőleg azonos fogalmak. Természetesen nem mellékes, hogy mit jelent a közelítőleg kifejezés. Minden integrál esetén pontosan meg kell mondani, hogy milyen módon mérjük a közelítő összegekkel való közelítés pontosságát. Ezt másképpen úgy is mondhatjuk, hogy meg kell adni a konvergencia fogalmát[41]. A valószínűségszámításban két természetes konvergenciafogalommal találkozhatunk. Az egyik a már bemutatott sztochasztikus konvergencia, a másik az egy valószínűséggel való konvergencia:

2.23 Definíció.
Legyen (ξ_n) valószínűségi változók sorozata. Ha annak a valószínűsége, hogy $\xi_n \to \xi$ egy, vagyis

$$\mathbf{P}\left(\{\omega : \xi_n(\omega) \to \xi(\omega)\}\right) = 1,$$

akkor azt mondjuk, hogy a (ξ_n) sorozat egy valószínűséggel a ξ-hez tart.

Az egy valószínűséggel való konvergencia azonban igen erős megkötés, és igen gyakran nem teljesül. Szemléletileg is evidens, de könnyen meg is mutatható, hogy az egy valószínűséggel való konvergenciából következik a sztochasztikus konvergencia, de a fordított irány nem igaz.

2.24 Példa.
Sztochasztikusan konvergens sorozat, amely sehol sem konvergens.

Vegyük a következő sorozatot: A $[0, 1]$ szakaszt osszuk fel n-részre, és a ξ_k a k-adik szakaszon legyen egy az összes többin pedig legyen nulla. Így definiáltunk n változót. A következő lépésben a $[0, 1]$ szakaszt osszuk fel $n + 1$ részre, és ciklikusan ismét menjünk körbe az így kapott $n + 1$ szakaszon, vagyis mindig csak az egyik szakaszon legyen a változó értéke egy, a többin pedig legyen az értéke nulla. A következő lépésben az eljárást folytatva definiáljunk újabb $n + 2$ változót, stb. A konstrukcióval olyan sorozatot kapunk, amely a $[0, 1]$ egyetlen pontjában sem konvergens, de az olyan pontok valószínűsége ahol a sorozat nem nulla nullához tart, vagyis a sorozat sztochasztikusan nullához tart.

□

[39] A tétel indoklása messze vezetne. Annyit érdemes megjegyezni, hogy számos trükkös megfontolás után az állítást visszavezetjük a számegyenes teljességére.
[40] Az integrál kiszámításával kapcsolatos kérdéseket az Itô-lemma kapcsán fogjuk tárgyalni.
[41] Vagyis a konvergencia definícióját amely mellett a közelítő összegek az integrálhoz tartanak.

A példából is látható, hogy a sztochasztikus konvergencia valami fajta „általában”[42] való konvergenciát jelent, amely nem zárja ki az egyes konkrét kimenetelekben való végtelenhez való divergenciát vagy ciklikus változást. Minden lépésben a rossz ω kimenetelek halmaza változhat, de a rossz ω kimenetelek valószínűsége egyre kisebb lesz. Megjegyezzük, hogy a sztochasztikus konvergenciában a rossz ω kimenetelek realizációja esetén a valószínűségi változó nagysága sem érdekes. Előfordulhat, hogy a „rossz esemény” valószínűsége kicsi, de az „esemény nagyon rossz”[43].

A korlátos változású súlyfolyamatok szerinti Stieltjes-féle sztochasztikus integrálok esetén a közelítő összegek sorozata a köztes pont megválasztási módjától függetlenül egy valószínűséggel az integrálhoz tart, a martingálok szerint vett Itô-integrálok esetén az integrálközelítő összegek nem egy valószínűséggel, hanem csak sztochasztikusan közelítik az integrál értékét. Az Itô-féle konstrukció lényege, hogy egyrészt a közelítő összegeket speciálisan választjuk, másrészt a trajektóriánkénti konvergenciát a közelítő összegek sztochasztikus konvergenciájára cseréljük.

Mivel a majdnem mindenhol való konvergenciából következik a sztochasztikus konvergencia, ezért ha egy sztochasztikus integrál Stieltjes-értelemben létezik, akkor az integrál Itô-értelemben is létezik, vagyis az Itô-féle sztochasztikus integrál a Stieltjes-féle sztochasztikus integrál általánosítása.

2.2.4. Sztochasztikus integrálok kvadratikus variációja

Miként láttuk, a sztochasztikus analízis kulcsa a kvadratikus variáció. Legyen

$$M(t) \overset{\circ}{=} \int_0^t \theta(u)\, dS(u),$$

ahol feltettük, hogy az integrál értelmes. Számoljuk ki a $t \mapsto M(t)$ integrálfolyamathoz tartozó $t \mapsto \langle M \rangle (t)$ kvadratikus variáció folyamatot. Definíció szerint

$$\begin{aligned}
\langle M \rangle (t) &\approx \sum_k (\Delta M(t_k))^2 = \sum_k \left(\int_{t_{k-1}}^{t_k} \theta(u)\, dS(u) \right)^2 \approx \\
&\approx \sum_k \theta^2(t_{k-1}) (\Delta S(t_k))^2 \approx \\
&\approx \sum_k \theta^2(t_{k-1}) \Delta \langle S \rangle (t_k) \approx \int_0^t \theta^2(u)\, d\langle S \rangle (u),
\end{aligned}$$

ahol felhasználtuk a

$$\begin{aligned}
(\Delta S(t_k))^2 &\overset{\circ}{=} (S(t_k) - S(t_{k-1}))^2 \approx \Delta \langle S \rangle (t_k) = \\
&= \langle S(t_k) \rangle - \langle S(t_{k-1}) \rangle
\end{aligned}$$

közelítő formulát, illetve, hogy elég finom felbontás esetén az

$$\int_{t_{k-1}}^{t_k} \theta(u)\, dS(u)$$

integrál közelíthető a

$$\theta(t_{k-1}) \Delta S(t_k) = \theta(t_{k-1}) (S(t_k) - S(t_{k-1}))$$

közelítő „téglalappal”. Speciálisan, ha az S integrátor $\langle S \rangle$ kvadratikus variációja nulla[44], akkor $\langle M \rangle = 0$. Például

$$\left\langle \int_0^t w(s)\, ds \right\rangle = \int_0^t w^2(s)\, d\langle s \rangle = \int_0^t w^2(s)\, d0 = 0,$$

[42] Nem átlagban, ugyanis lehet, hogy a sorozat tagjainak nincsen átlaga, vagyis várható értéke.

[43] Bár igen természetes, a fogalom pontos megértése céljából jelezzük, hogy abból, hogy két változó a sztochasztikus konvergencia értelmében közel van, még nem jelenti, hogy a kockázatuk is közel van. Bár a kockázat szó definíciója nem evidens, azt érezzük, hogy egy kis valószínűségű esemény mellett bekövetkezett nagyon nagy bukás igen kockázatos dolog.

[44] Például ha az S integrátor folytonos, korlátos változású folyamat.

ugyanakkor

$$\left\langle \int_0^t s dw\left(s\right) \right\rangle = \int_0^t s^2 d\left\langle w\left(s\right)\right\rangle = \int_0^t s^2 ds = \frac{t^3}{3}.$$

2.2.5. Asszociativitási szabály

Tegyük fel, hogy $S\left(u\right) \circeq \int_0^u \zeta\left(s\right) d\rho\left(s\right)$, és tekintsük az $\int_0^t \theta\left(u\right) dS\left(u\right)$ integrált. Mivel az integrál a közelítő összegek határértéke, ezért

$$\int_0^t \theta\left(u\right) dS\left(u\right) \approx \sum_k \theta\left(u_{k-1}\right) \Delta S\left(u_k\right).$$

Az előző alpontban látott gondolatmenettel egyező módon az $S\left(u\right)$ integrálfüggvény $\Delta S\left(u_k\right)$ növekményei az S alakja miatt közelíthetőek a

$$\zeta\left(u_{k-1}\right) \Delta\rho\left(u_k\right)$$

téglalapokkal, így

$$\int_0^t \theta\left(u\right) dS\left(u\right) \approx \sum_k \theta\left(u_{k-1}\right) \zeta\left(u_{k-1}\right) \Delta\rho\left(u_k\right) \approx \int_0^t \theta\left(u\right) \zeta\left(u\right) d\rho\left(u\right).$$

Másképpen fogalmazva integrálfüggvény szerinti integrálás esetén a két integrál elvégzésének sorrendje „csoportosítható”. A szabályt szokás *asszociativitási szabálynak* is mondani. Az elnevezés indoka a következő: Ha az integrálokat differenciális formában írjuk fel, akkor

$$dS = \zeta d\rho,$$

a $\int_0^t \theta\left(u\right) dS\left(u\right)$ integrál pedig a

$$\theta dS = \theta\left(\zeta d\rho\right) = \left(\theta\zeta\right) d\rho$$

formális szabály szerint alakítható, vagyis az integrál

$$\int_0^t \theta\left(u\right) dS\left(u\right) = \int_0^t \theta\left(u\right) \zeta\left(u\right) d\rho\left(u\right)$$

átalakítás formálisan a differenciális alakban felírt kifejezés átzárójelezése. Vegyük észre, hogy az indoklás érvényes minden fajta integrálra, így a Stieltjes- és az Itô-féle integrálokra egyaránt használható. Emlékeztettünk, hogy a Stieltjes-integrálok kiszámolásakor megmutattuk, hogy ha a G súlyfüggvény deriválható és a G deriváltja a g sűrűségfüggvény, akkor

$$\int_a^b f\left(x\right) dG\left(x\right) = \int_a^b f\left(x\right) g\left(x\right) dx.$$

Vegyük észre, hogy az asszociativitási szabály éppen ennek a sűrűségfüggvényre vonatkozó formulának az általánosítása tetszőleges integrál esetére.

2.2.6. Lokális martingálok

Az Itô-integrál definíciója alapján a sztochasztikus integrál egy fajta korrekt folytonos fogadási folyamat nettó, kumulált eredménye, nyereménye. Az Itô-integrálban szereplő integrátor martingál. Miként említetük, a martingálok szokásos interpretációja, hogy fair játékok. Felvethető a kérdés, hogy az S fair játékkal szemben játszott θ stratégiai nettó, kumulált eredménye fair játék-e, vagyis a θ megjátszásának lehetősége az érdekelt feleknek, legalábbis átlagban egyenlő esélyt biztosít vagy sem. Másképpen fogalmazva milyen feltételek mellett lesz a

$$t \mapsto \int_0^t \theta\left(s\right) dS\left(s\right)$$

integrálfolyamat martingál? Tekintsük a folyamat

$$M(t) \circeq \sum_{s_k \leq t} \theta(s_{k-1})(S(s_k) - S(s_{k-1}))$$

közelítő összegét. A kiemelési szabály szerint a már többször látott módon okoskodva

$$\begin{aligned}
\mathbf{M}(M(t_{k+1}) \mid \mathcal{F}_{t_k}) &= \sum_{s_k \leq t_{k+1}} \mathbf{M}(\theta(s_{k-1})[S(s_k) - S(s_{k-1})] \mid \mathcal{F}_{t_k}) = \\
&= M(t_k) + \theta(t_k)\mathbf{M}(S(t_{k+1}) - S(t_k) \mid \mathcal{F}_{t_k}) = \\
&= M(t_k) + \theta(t_k)(\mathbf{M}(S(t_{k+1}) \mid \mathcal{F}_{t_k}) - \mathbf{M}(S(t_k) \mid \mathcal{F}_{t_k})) = \\
&= M(t_k) + \theta(t_k)(S(t_k) - S(t_k)) = \\
&= M(t_k),
\end{aligned}$$

vagyis a diszkrét közelítő összegekből álló sorozat martingál. Fontos hangsúlyozni, hogy a sztochasztikus integrálással kapott

$$t \mapsto \int_0^t \theta(s)\, dS(s)$$

integrálfolyamat azonban nem lesz martingál. Ebből a szempontból a diszkrét, illetve a folytonos időábrázoláshoz tartozó modellek lényegesen eltérnek. A tárgyalás során a diszkrét összegek és a folytonos összegek, vagyis az integrálok között nem teszünk különbséget. Ez természetesen súlyos matematikai hiba. Általában a sztochasztikus integrálként csak lokális martingált kapunk, és külön figyelmet kell fordítani arra, hogy mikor kapunk integrálként valódi martingált. Miként jeleztük a lokális martingál és a martingál közötti viszony szemléletesen igen nehezen tisztázható, ugyanis mély technikai fogalomról van szó[45]. A lényegi problémát az jelenti, hogy míg a

$$\sum_k \theta(s_{k-1})(S(s_k) - S(s_{k-1}))$$

közelítő összegek várható értéke az S martingáltulajdonsága miatt nulla, a felosztás finomítása során kapott sorozat határértékének várható értéke már nem lesz nulla. Általában ugyanis semmi sem biztosítja a határérték és a várható érték felcserélhetőségét[46]. A probléma abból ered, hogy az integrandusok egy egyre szűkebb halmazon egyre nagyobb értéket vehetnek fel. Szemléletesen az integrandus egyre „kockázatosabb” lehet. Kis valószínűséggel nagyon nagyot bukunk, de átlagban azért kicsit nyerünk[47].

2.25 Példa.
A sorozat várható értéke és a határérték általában nem cserélhető fel.

Tegyük fel, hogy az $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$ valószínűségi mező a $(0,1)$ intervallum egy pontját választja ki egyenletes eloszlás szerint. Ha

$$\xi_n(\omega) \circeq \begin{cases} n & \text{ha} \quad 0 < \omega \leq 1/n \\ 0 & \text{ha} \quad 1/n < \omega < 1 \end{cases},$$

akkor $\mathbf{M}(\xi_n) = 1$, így $\lim_{n\to\infty} \mathbf{M}(\xi_n) = 1$, de mivel $\lim_{n\to\infty} \xi_n = 0$, ezért

$$\mathbf{M}\left(\lim_{n\to\infty} \xi_n\right) = \mathbf{M}(0) = 0 \neq 1 = \lim_{n\to\infty} \mathbf{M}(\xi_n).$$

[45]A lokális martingál és a martingál közötti különbség a sztochasztikus analízisben a legkényesebb, örökké problémát okozó kérdés, amely egyidejüleg a hibák ősanyja és ősatyja, maga az eredendő bűn, a részletekben levő ördög maga. Ugyanakkor a két fogalom közötti eltérés remélhetőleg szabad szemmel nem látható, mi pedig, közgazdászok lévén, a matematikában kicsire nem adunk.

[46]A határérték és a várható érték felcserélése az analízisben, illetve a valószínűségszámításban a végső technikai probléma. Aki a várható értéket csak úgy, szemrebbenés nélkül felcseréli a határértékkel az vagy túl sokat tételez fel az olvasóról, vagy túl keveset. Én leginkább az utóbbira gondolok.

[47]Fájóan gyakran elkövetett hiba, bár lehet hogy a hiba kifejezés nem pontos.

□

Ahhoz, hogy a martingáltulajdonságot biztosítani tudjuk, szükséges feltételként például meg szokás követelni, hogy az $\mathbf{M}\left(\int_a^b \theta^2 d\left\langle S\right\rangle\right)$ kifejezés véges legyen. Ez teljesül például, ha a θ egyenletesen korlátos. A továbbiak során nem teszük különbséget lokális martingálok és martingálok között, de valahányszor egy sztochasztikus integrál várható értékét nullának vesszük, mindig automatikusan feltesszük, illetve az alkalmazás során ellenőrizzük, hogy az azt biztosító idézett megkötés teljesül. Másképpen fogalmazva a továbbiakban a lokális martingálokat nem különböztetjük meg a martingáloktól, így a *martingálok szerinti sztochasztikus integrálok várható értékét mindig nullának vesszük.*

A lokális martingálok és a martingálok közötti különbségre bár mély technikai fogalomról van szó, intuitíve mégis jól rá lehet érezni: a probléma az integrandusok nagyságrendjéből[48] és a duplázási stratégia megvalósíthatóságából ered. A martingál szerinti sztochasztikus integrál szemléletileg egy fair játék ellen játszott stratégia játék eredménye, kumulált nyeresége. A játék annyiban fair, hogy a stratégia megválasztásakor az egyes lépések során a jövőt nem lehet előrelátni, ezért a téteket mindig a fogadás tárgyát képező esemény előtt kell megtenni. Ebből következően az egyes lépésekben a játék ténylegesen fair. A játék azonban annyiban nem fair, hogy a játszás jogát és a tétek nagyságát nem korlátozzuk. A fogadó fél addig és akkora tétekben fogad amíg akar, illetve amekkorákban akar. A θ folyamatra egyedül azt tettük fel, hogy az értéke csak a múlttól függ, de a nagyságát nem korlátozzuk[49]. Elképzelhető, hogy bizonyos ω kimenetelek esetén a $t \mapsto \theta(t,\omega)$ trajektória nem korlátos módon nő. Ha így áll a helyzet, akkor nagy kockázatot vállalva és korlátlan ideig játszva általában lehet nyerő stratégiát találni. A Wiener-folyamat diszkrét verziójában, a fej vagy irás játékban, a közismert és korábban már tárgyalt nyerő stratégia a duplázó stratégia, amikor vesztés esetén a nyereményt megduplázzuk. Mivel bármeddig, bármekkora tétben jogunk van fogadni, és bármikor ki lehet szállni, nem túl meglepő módon a fogadó fél mind nyer, sőt elvileg végtelen sokat nyerhet. Másképpen fogalmazva egy martingál szerinti sztochasztikus integrál azért nem lesz martingál, mert az integrandus kockázata korlátlanul nőhet. Ezért nem lesz a sztochasztikus integrál martingál, csak lokális martingál. A hazárdjátékos célja, hogy a martingálként viselkedő véletlennel szembeni játékban kihasználja, hogy a kumulált folyamat csak lokális martingál és nem martingál. Ha természetesen a játszható θ stratégiákat korlátozzuk, nem engedünk meg csak „ésszerű" kockázatot tartalmazó stratégiákat, akkor a játék nyereménye martingál marad, vagyis a játék fair marad[50].

Megmutatható, hogy a sztochasztikus integrál konstrukciója átvihető martingálokról lokális martingálokra is, de evvel nem foglalkozunk[51].

2.2.7. Szemimartingálok

Ha egy sztochasztikus folyamat egy korlátos változású folyamat és egy lokális martingál összege, akkor azt mondjuk, hogy a folyamat *szemimartingál*. Szemimartingálra a legegyszerűbb és legfontosabb példa az

$$\int_0^t \xi(s)\,ds + \int_0^t \eta(s)\,dw(s)$$

[48]Az említett $\mathbf{M}\left(\int_a^b \theta^2 d\left\langle S\right\rangle\right) < \infty$ feltétel éppen a θ átlagos nagyságát korlátozza.

[49]Csak azt követeljük meg, hogy az integrandus folytonos legyen. Ez biztosítja, hogy létezzen az integrál. A nem folytonos eset tartalmaz meglepetéseket, de erre nem térünk ki.

[50]A kockázatkezelés célja éppen az, hogy megakadályozza a túlzott kockázatokat. A Mi kockázatunk az Ön pénzével típusú viselkedés lényege, hogy megpróbáljuk a nyereményfolyamatot lokális martingállá alakítani, majd bízva bízunk. V.ö.: K&H, Enron, LTCM stb.

[51]Már csak azért sem, ugyanis a lokális martingál definícióját emberbaráti okokból nem tárom az érdeklődő hallgatóság elé. Ugyanakkor érdemes hangsúlyozni, hogy lokális martingál integrátorok esetén az alapgondolatok nem változnak, tehát a sztochasztikus integrál ilyenkor is az Itô-féle közelítő összegek sztochasztikus határértéke. A lokális martingál definícióján kívül semmilyen technikai probléma nem jelentkezik.

kifejezés, ahol a ξ és az η folytonos folyamatok. Az ilyen kifejezéseket szokás *Itô-diffúziónak* is mondani. Az irodalomban szokás konvenció szerint az ilyen kifejezéseket az integrál jelek elhagyásával

$$\xi dt + \eta dw$$

módon szokás írni. A ξ folytonossága miatt az $\int_0^t \xi(s)\,ds$

$$V_{0,t}\left(\int_0^t \xi(s)\,ds\right) = \int_0^t |\xi(s)|\,ds$$

variációja véges. A második tag pedig a w Wiener-folyamattal definiált sztochasztikus integrál, tehát lokális martingál, és a sztochasztikus integrál kvadratikus variációjára vonatkozó képlet szerint

$$\left\langle \int_0^t \eta(s)\,dw(s)\right\rangle = \int_0^t \eta^2(s)\,d\langle w(s)\rangle = \int_0^t \eta^2(s)\,ds.$$

Ha a ξ folyamat folytonos

$$X(t,\omega) = A(t,\omega) + S(t,\omega)$$

szemimartingál, akkor értelmezhető az

$$\int_a^b \xi dX \triangleq \int_a^b \xi dA + \int_a^b \xi dS$$

sztochasztikus integrál. Világos, hogy a jobb oldali összeg mind a két tagja értelmes. Az első trajektóriánként vett közönséges Stieltjes-intergál, a másik egy sztochasztikus konvergenciában vett Itô-integrál. Mivel a majdnem mindenhol való konvergenciából következik a sztochasztikus konvergencia, az $\int_a^b \xi dX$ tekinthető a Itô-féle közelítő összegek sztochasztikus konvergenciában vett határértékének. Az X szemimartingálra szintén képezhetjük a

$$\lim_{\Delta t_k \searrow 0} \sum_k \left(X(t_k) - X(t_{k-1})\right)^2$$

kvadratikus variációt. Az összegzés mögötti négyzetben szereplő tagokra

$$\sum_k \left((\Delta A(t_k))^2 + 2\Delta S(t_k)\,\Delta A(t_k) + (\Delta S(t_k))^2\right).$$

A harmadik tag éppen az $\langle S\rangle$ lokális martingál rész kvadratikus variációjához tart. Az első tagra

$$\sum_k (\Delta A(t_k))^2 \le \max_k |\Delta A(t_k)| \sum_k |\Delta A(t_k)|.$$

Mivel az A feltétel szerint korlátos változású, ezért az összeg rendelkezik véges korláttal. Ha az A folytonos, akkor $\max_k |\Delta A(t_k)| \to 0$, tehát ilyenkor $\sum_k (\Delta A(t_k))^2 \to 0$. Hasonlóan ha az S folytonos, akkor

$$\left|\sum_k \Delta S(t_k)\,\Delta A(t_k)\right| \le \max_k |\Delta S(t_k)| \sum_k |\Delta A(t_k)| \to 0,$$

vagyis folytonos szemimartingálok kvadratikus variációja éppen a lokális martingál rész kvadratikus variációja. Ha X_1 és X_2 két szemimartingál, akkor definiálható a

$$\lim_{\Delta t_k \searrow 0} \sum_k \Delta X_1(t_k)\,\Delta X_2(t_k) \triangleq \langle X_1, X_2\rangle$$

kvadratikus keresztvariáció. Ha az X_1 korlátos változású és az X_2 folytonos, akkor ismételten

$$\left|\sum_k \Delta X_1(t_k)\,\Delta X_2(t_k)\right| \le \max_k |\Delta X_2(t_k)| \sum_k |\Delta X_1(t_k)| \to 0.$$

Ebből következően ha $X_k(t,\omega) = A_k(t,\omega) + S_k(t,\omega)$, ahol az A_k korlátos változású, az S_k kvadratikus variációja véges, akkor a szokásos folytonossági feltételek teljesülése esetén

$$\langle X_1, X_2\rangle = \langle S_1, S_2\rangle .$$

2.26 Példa.
Számoljuk ki a

$$\xi(t) = \int_0^t \eta_1(t)\, d\zeta_1 + \int_0^t \eta_2(t)\, d\zeta_2$$

összeg kvadratikus variációját.

Az $\int_0^t \eta_i d\zeta_i \approx \sum_{t_k \le t} \eta_i(t_{k-1})(\zeta_i(t_k) - \zeta_i(t_{k-1}))$ integrálfolyamat növekményei közelítőleg

$$\eta_i(t_{k-1})(\zeta_i(t_k) - \zeta_i(t_{k-1})),$$

így a korábban elmondottakkal analóg módon

$$\langle\xi\rangle \approx \sum_k (\Delta\xi(t_k))^2 \approx \sum_k (\eta_1(t_{k-1})\Delta\zeta_1(t_k) + \eta_2(t_{k-1})\Delta\zeta_2(t_k))^2 =$$

$$= \sum_k \left[\eta_1^2(t_{k-1})(\Delta\zeta_1(t_k))^2 + \eta_2^2(t_{k-1})(\Delta\zeta_2(t_k))^2 + 2\eta_1(t_{k-1})\eta_2(t_{k-1})\Delta\zeta_1(t_k)\Delta\zeta_2(t_k)\right] \approx$$

$$\approx \int_0^t \eta_1^2 d\langle\zeta_1\rangle + \int_0^t \eta_2^2 d\langle\zeta_2\rangle + 2\sum_k \eta_1\eta_2\Delta\zeta_1\Delta\zeta_2 \approx$$

$$\approx \int_0^t \eta_1^2 d\langle\zeta_1\rangle + \int_0^t \eta_2^2 d\langle\zeta_2\rangle + 2\int_0^t \eta_1\eta_2 d\langle\zeta_1,\zeta_2\rangle,$$

ahol többször kihasználtuk a kvadratikus variáció növekményére vonatkozó $(\Delta\zeta)^2 \approx \Delta\langle\zeta\rangle$ formulát, illetve az analóg módon érvényes $\Delta\zeta_1\Delta\zeta_2 \approx \Delta\langle\zeta_1,\zeta_2\rangle$ közelítő képletet. Ha a ζ_1 folyamat folytonos és korlátos változású és a ζ_2 folytonos, akkor

$$\langle\xi\rangle(t) = \int_0^t \eta_2^2 d\langle\zeta_2\rangle,$$

ugyanis az összeg másik két tagjában az integrátor értéke nulla.

□

3. fejezet

Itô-formula

Ebben a fejezetben a sztochasztikus kalkulus számítási szabályát az Itô-formulát és alkalmazásait ismertetjük.

A szemimartingálok osztálya meglepően stabil abban az értelemben, hogy egy sor műveletet végrehajtva szemimartingálból szemimartingált kapunk. Például könnyen belátható, hogy szemimartingálok összege szemimartingál. Kevésbé nyilvánvaló, de szemimartingálok szorzata és hányadosa is szemimartingál[1]. A szemimartingálok legfontosabb tulajdonságát az Itô-formula[2] tartalmazza. Az Itô-formula számos alapvető jelentőségű következménnyel bír. Ezek közé tartozik például a a szemimartingálok már említett zártsága a szorzás és az osztás műveletére.

3.1. Itô-formula mint a Newton–Leibniz-szabály általánosítása

A sztochasztikus analízis központi állítása az *Itô-formula*:

3.1 Tétel. (Itô-formula)
Ha F kétszer folytonosan deriválható n-változós függvény, és $(\xi_k)_{k=1}^n$ folytonos szemimartingálok, akkor

$$\begin{aligned} F(\xi(t)) - F(\xi(0)) &= \sum_{k=1}^{n} \int_0^t \frac{\partial F}{\partial x_k}(\xi(s))\, d\xi_k(s) + \\ &+ \frac{1}{2} \sum_{i,j} \int_0^t \frac{\partial^2 F}{\partial x_i \partial x_j}(\xi(s))\, d\left\langle \xi_i, \xi_j \right\rangle(s). \end{aligned}$$

3.1.1. Másodrendű közelítések, kvadratikus variáció

A bizonyítás nagyon messze vezetne, de azért némi indoklást célszerű adni. Világos, hogy egy fajta Newton–Leibniz-szabályról van szó. Próbáljuk meg így igazolni. Vegyük a

$$F(\xi(t)) - F(\xi(0)) = \sum_{k=1}^{N} \left[F(\xi(t_k)) - F(\xi(t_{k-1})) \right]$$

[1] Általában a matematikában az összegre való zártság szinte alapkövetelmény. Egy olyan folyamatosztály, amely a négy alapműveletre nézve nem zárt, matematikailag igen kellemetlen tud lenni, használata komoly „kockázatokat” rejt magában.

[2] Történeti okoból használatos még az Itô-lemma elnevezés is.

teleszkópikus felbontást. Vegyük észre, hogy a két oldal azonos. A közönséges Newton–Leibniz-szabály esetén az

$$\begin{aligned}F\left(\xi\left(t_{k+1}\right)\right)-F\left(\xi\left(t_k\right)\right) &\simeq F'\left(\xi\left(\tau_k\right)\right)\left[\xi\left(t_{k+1}\right)-\xi\left(t_k\right)\right]= \\ &= \sum_{i=1}^{n}\frac{\partial F}{\partial x_i}\left(\xi\left(\tau_k\right)\right)\left[\xi_i\left(t_{k+1}\right)-\xi_i\left(t_k\right)\right]\end{aligned}$$

közelítéssel élünk[3]. Vegyük észre, hogy az így kapott

$$\sum_{k=1}^{N}\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial F}{\partial x_i}\left(\xi\left(\tau_k\right)\right)\left[\xi_i\left(t_k\right)-\xi_i\left(t_{k-1}\right)\right]$$

összeg általában nem konvergens, ugyanis a τ_k közelítő pontokat nem a $[t_{k-1}, t_k]$ szakaszok kezdőpontjának kaptuk, márpedig a sztochasztikus integrál csak akkor konvergens, ha $\tau_k = t_{k-1}$. A teleszkopikus összeget becsülhetnénk másképpen is. Ennek a klasszikus esetben nincs értelme, most azonban célszerű, ha a Taylor-formula által biztosított

$$F'\left(\xi\left(t_{k-1}\right)\right)\left[\xi\left(t_k\right)-\xi\left(t_{k-1}\right)\right]+\frac{1}{2}F''\left(\xi\left(\tau_k\right)\right)\left(\left[\xi\left(t_k\right)-\xi\left(t_{k-1}\right)\right]\right)$$

másodrendű közelítéssel élünk. Emlékeztetünk, hogy a második derivált egy kvadratikus alak, így a $\xi\left(\tau_k\right)$ pontban vett F'' második derivált a $\left[\xi\left(t_k\right)-\xi\left(t_{k-1}\right)\right]$ helyen éppen

$$\left(\xi\left(t_k\right)-\xi\left(t_{k-1}\right)\right)^T\cdot H\cdot\left(\xi\left(t_k\right)-\xi\left(t_{k-1}\right)\right)$$

módon írható, ahol

$$H \circeq \left(\frac{\partial^2 F}{\partial x_i \partial x_j}\left(\xi\left(\tau_k\right)\right)\right)$$

a második parciális deriváltakból álló úgynevezett Hesse-mátrix. A Taylor-formula szerint a másodrendű tagban levő τ_k továbbra is a $[t_{k-1}, t_k]$ egy köztes pontja, de a τ_k az elsőrendű tagban nem szerepel csak a másodrendűben. Így tehát a másodrendű tag

$$F''\left(\xi\left(\tau_k\right)\right)\left(\xi\left(t_k\right)-\xi\left(t_{k-1}\right)\right)=\sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial^2 F}{\partial x_i \partial x_j}\left(\xi\left(\tau_k\right)\right)\Delta\xi_i\left(t_k\right)\Delta\xi_j\left(t_k\right).$$

Az elsőrendű közelítés éppen az

$$\int_a^b F'(\xi)\,d\xi=\sum_{i=1}^{n}\int_a^b\frac{\partial F}{\partial x_i}(\xi)\,d\xi_i$$

integrálhoz tart. Mivel a keresztvariáció növekményének becslése alapján

$$\Delta\xi_i\left(t_k\right)\Delta\xi_j\left(t_k\right)\approx\Delta\left\langle\xi_i,\xi_j\right\rangle\left(t_k\right)$$

ezért

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x_i \partial x_j}\left(\xi\left(\tau_k\right)\right)\Delta\xi_i\left(t_k\right)\Delta\xi_j\left(t_k\right)\approx\frac{\partial^2 F}{\partial x_i \partial x_j}\left(\xi\left(\tau_k\right)\right)\Delta\left\langle\xi_i,\xi_j\right\rangle\left(t_k\right),$$

tehát

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{N}\frac{\partial^2 F}{\partial x_i \partial x_j}\left(\xi\left(\tau_k\right)\right)\Delta\xi_i\left(t_k\right)\Delta\xi_j\left(t_k\right) &\approx \sum_{k=1}^{N}\frac{\partial^2 F}{\partial x_i \partial x_j}\left(\xi\left(\tau_k\right)\right)\Delta\left\langle\xi_i,\xi_j\right\rangle\left(t_k\right) \\ &\to \int_a^b\frac{\partial^2 F}{\partial x_i \partial x_j}\left(\xi(t)\right)d\left\langle\xi_i,\xi_j\right\rangle(t).\end{aligned}$$

[3] Ügyeljünk a többváltozós függvények deriválási szabályára. A többváltozós függvények deriváltja sorvektor. Egy változós esetben egyenlőség van.

Vegyük észre, hogy a másodrendű tagokból képzett integrál a négyzetes keresztvariáció szerint képzett integrál, vagyis közönséges Stieltjes-integrál, így az a tény, hogy a τ_k nem az intervallum kezdőpontja nem okoz gondot[4].

Az Itô-formula a Newton–Leibniz-szabály általánosítása. A két formula különbsége a másodrendű tagokban van. A klasszikus analízisben a másodrendű tagok értéke nulla lenne, ugyanis ha az f függvény kétszer folytonosan deriválható, akkor az f'' folytonos függvény az $[a,b]$ véges szakaszon korlátos, tehát

$$\begin{aligned}\left|\frac{1}{2}\sum_k f''(\tau_k)(t_k-t_{k-1})^2\right| &\le \frac{1}{2}K\sum_k (t_k-t_{k-1})^2 \le \\ &\le \frac{1}{2}K\max_k|t_k-t_{k-1}|\sum_k(t_k-t_{k-1}) = \\ &= \frac{1}{2}K\max_k|t_k-t_{k-1}|(b-a)\to 0.\end{aligned}$$

Másképpen fogalmazva a klasszikus analízisben a másodrendű közelítés figyelembevételének nincs értelme[5].

3.2 Példa.
Számoljuk ki a $\xi(t) \stackrel{\circ}{=} \exp(w(t))$ folyamat kompenzátorát.

Emlékeztetünk, hogy egy ξ folyamat *kompenzátorán* azt a P monoton növekedő, pozitív értékű folyamatot értjük, amelyre a $\xi - P$ „tökéletesen véletlen”, vagyis lokális martingál. Az Itô-formula szerint

$$\xi(t)-\xi(0)=\int_0^t \exp(w(s))\,dw(s)+\frac{1}{2}\int_0^t\exp(w(s))\,ds.$$

Az első tag a w martingál szerint vett sztochasztikus integrál, tehát szintén martingál, így tökéletesen véletlen folyamat. A második tag a $P \stackrel{\circ}{=} \frac{1}{2}\int_0^t \exp(w(s))\,ds$ integrál szintén véletlen folyamat, de minden trajektóriája monoton nő és folytonosan deriválható, így joggal interpretálható úgy mint az $\exp(w(t))$ folyamat birtoklásáért fizetendő összeg. Számoljuk ki a P várható értékét. A lognormális eloszlás várható értékének képlete szerint

$$\begin{aligned}\mathbf{M}(P(t)) &= \frac{1}{2}\mathbf{M}\left(\int_0^t\exp(w(s))\,ds\right) = \\ &= \frac{1}{2}\int_0^t \mathbf{M}(\exp(w(s)))\,ds = \\ &= \frac{1}{2}\int_0^t\exp\left(\frac{s}{2}\right)ds = \exp\left(\frac{t}{2}\right)-1.\end{aligned}$$

Vegyük észre, hogy a lognormális eloszlás várható értékének képlete miatt az alapfolyamat várható értéke

$$\mathbf{M}(\exp(w(t)))=\exp\left(\frac{t}{2}\right).$$

A két várható érték különbsége 1, amely éppen az $\mathbf{M}(\xi(0))$ értéke. Mivel a $\xi(0)$ a $t=0$ időpontban ismert és a kompenzátoron definíció szerint olyan folyamatot szokás érteni, amely a $t=0$ időpontban nulla, ezért helyesebb lenne a $\mathbf{M}(\xi(t)-\xi(0))$ várható értéket tekinteni, amely éppen a kompenzátor várható értéke. Ebből következően a kompenzátor folyamat átlagos értéke éppen az eredeti folyamat növekményének átlagos értékével azonos, miközben a kompenzátor az alapfolyamatban szereplő „trajektóriánkénti kockázatot” kompenzálja.

□

[4]Vegyük észre, hogy a formula igazolása pontosan ezen az észrevételen alapszik!!!

[5]Ez nem jelenti azt, hogy az integrálok numerikus közelítésekor a másodrendű közelítéseket nem szokás használni. A másodrendű közelítés pontosabb mint az elsőrendű, de határértékben a klasszikus esetben a másodrendű tag eltűnik.

3.1.2. Itô-formula alkalmazása várható értékek kiszámolására

Az Itô-formula egyik fontos olvasata a következő: Legyen a $\xi(t,\omega)$ folyamat folytonos martingál. Ha az f függvény kétszer folytonosan deriválható, akkor az $\eta(t,\omega) \stackrel{\circ}{=} f(\xi(t,\omega))$ módon definiált folyamat az Itô-formula szerint folytonos szemimartingál, ugyanis felbontható két integrál összegére, ahol az első integrál Itô-féle sztochasztikus integrál, a másik pedig korlátos változású folyamat szerint vett közönséges Stieltjes-integrál. A sztochasztikus integrál általában martingál, tehát a várható értéke általában konstans módon nulla, a Stieltjes-integrált tartalmazó tag pedig korlátos változású, így a kvadratikus variációja nulla. Ez lehetővé teszi, hogy kiszámoljuk az η transzformált folyamat, illetve a folyamat kvadratikus variációjának várható értékét.

1. Számoljuk ki a $\sin w$ sztochasztikus folyamat várható értékét. Az Itô-formula alapján

$$\begin{aligned}\sin w(t)-\sin w(0) &= \int_0^t \cos w(s)\,dw(s)+\frac{1}{2}\int_0^t -\sin(w(s))\,d\langle w(s)\rangle = \\ &= \int_0^t \cos w(s)\,dw(s)-\frac{1}{2}\int_0^t \sin(w(s))\,ds.\end{aligned}$$

Mind a két oldalon várható értéket véve

$$\begin{aligned}\mathbf{M}(\sin w(t)) &= \mathbf{M}\left(\int_0^t \cos w(s)\,dw(s)\right)-\frac{1}{2}\mathbf{M}\left(\int_0^t \sin(w(s))\,ds\right) = \\ &= -\frac{1}{2}\int_0^t \mathbf{M}(\sin(w(s)))\,ds,\end{aligned}$$

ahol kihasználtuk, hogy a sztochasztikus integrálok várható értéke nulla. Ha

$$f(t) \stackrel{\circ}{=} \mathbf{M}(\sin(w(t))),$$

akkor

$$f(t) = -\frac{1}{2}\int_0^t f(s)\,ds \quad f(0)=0.$$

Mind a két oldalt deriválva a

$$\frac{d}{ds}f = -\frac{1}{2}f, \quad f(0)=0$$

differenciálegyenlethez jutunk, amely megoldása

$$f(t)=0.$$

Ez azonban nem meglepő, ugyanis a keresett integrál a Wiener-folyamat eloszlása[6] alapján

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi t}}\int_{-\infty}^{\infty} \exp\left(-\frac{x^2}{2t}\right)\sin x dx,$$

amely a szinusz függvény páratlansága miatt nulla.

2. Számoljuk ki a $\cos w$ sztochasztikus folyamat várható értékét. Az Itô-formula alapján

$$\cos w(t)-\cos w(0) = -\int_0^t \sin w(s)\,dw(s)+\frac{1}{2}\int_0^t -\cos(w(s))\,ds$$

Várható értéket véve, felhasználva, hogy a sztochasztikus integrál várható értéke nulla

$$\begin{aligned}\mathbf{M}(\cos w(t))-1 &= -\mathbf{M}\left(\int_0^t \sin w(s)\,dw(s)\right)-\frac{1}{2}\mathbf{M}\left(\int_0^t \cos(w(s))\,ds\right) = \\ &= -\frac{1}{2}\int_0^t \mathbf{M}(\cos w(s))\,ds.\end{aligned}$$

[6] Ugyanis a $w(t)$ eloszlása éppen $N(0,\sqrt{t})$, így a sűrűségfüggvénye $f(x)=1/\sqrt{2\pi t}\exp(-x^2/2t)$.

Bevezetve az

$$f(t) \doteq \mathbf{M}(\cos w(t))$$

függvényt

$$\frac{d}{dt} f(t) = -\frac{1}{2} f(t) \quad f(0) = 1,$$

amely megoldása

$$f(t) = \exp\left(-\frac{1}{2}t\right).$$

3. Számoljuk ki az $\exp(w)$ folyamat várható értékét. Ismételten az Itô-formula alapján

$$\exp(w(t)) - 1 = \int_0^t \exp(w(s))\, dw(s) + \frac{1}{2}\int_0^t \exp(w(s))\, ds.$$

Várható értéket véve

$$\mathbf{M}(\exp(w(t))) - 1 = \mathbf{M}\left(\int_0^t \exp(w(s))\, dw(s)\right) + \frac{1}{2}\mathbf{M}\left(\int_0^t \exp(w(s))\, ds\right).$$

A megszokott módon differenciálva a két oldalt

$$\frac{d}{dt} f(t) = \frac{1}{2} f(t), \quad f(0) = 1$$

egyenletet kapjuk, amely megoldása

$$f(t) = \exp\left(\frac{1}{2}t\right).$$

Például, ha $t = 1$, akkor

$$\begin{aligned}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} \exp(s)\exp\left(-\frac{s^2}{2}\right) ds &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} \exp\left(-\frac{1}{2}\left[(s-1)^2 - 1\right]\right) ds = \\ &= e^{1/2}\end{aligned}$$

4. Igazoljuk a lognormális eloszlás várható értékére vonatkozó képletet. Az Itô-formula alapján

$$\begin{aligned}\exp(\mu + \sigma w(t)) - \exp(\mu) &= \sigma \int_0^t \exp(\mu + \sigma w(s))\, dw(s) + \\ &\quad + \frac{1}{2}\sigma^2 \int_0^t \exp(\mu + \sigma w(s))\, ds.\end{aligned}$$

Várható értéket véve, és elhagyva a sztochasztikus integrál várható értékét a

$$\frac{d}{dt} f = \frac{\sigma^2}{2} f(t), \quad f(0) = \exp(\mu)$$

egyenlethez jutunk, amely megoldása

$$f(t) = \exp\left(\frac{\sigma^2}{2}t + \mu\right).$$

5. Számoljuk ki a $\langle \sin w(t) \rangle$ kvadratikus variációt. Az Itô-formula alapján

$$\begin{aligned}\sin w(t) - \sin w(0) &= \int_0^t \cos w(s)\, dw(s) - \frac{1}{2}\int_0^t \sin w(s)\, d\langle w\rangle(s) = \\ &= \int_0^t \cos w(s)\, dw(s) - \frac{1}{2}\int_0^t \sin w(s)\, ds.\end{aligned}$$

Az összeg kvadratikus variációjára vonatkozó képlet szerint

$$\langle \sin w(t) \rangle = \int_0^t \cos^2 w(s)\, ds,$$

ugyanis a többi kvadratikus variáció nulla.

6. Számoljuk ki a $\langle \sin w(t) \rangle$ kvadratikus variáció várható értékét.

$$\begin{aligned}
\mathbf{M} \langle \sin w(t) \rangle &= \mathbf{M}\left(\int_0^t \cos^2 w(s)\, ds \right) = \int_0^t \mathbf{M}\left(\cos^2 w(s)\right) ds = \\
&= \int_0^t \mathbf{M}\left(\frac{1+\cos 2w(s)}{2} \right) ds = \\
&= \frac{1}{2}\left(\int_0^t 1 ds + \int_0^t \mathbf{M}(\cos 2w(s))\, ds \right).
\end{aligned}$$

A második kifejezést a már bemutatott módon az Itô-formula segítségével számolhatjuk ki.

$$\cos 2w(s) - 1 = -2\int_0^s \sin 2w(u)\, dw(u) - \frac{1}{2} 4 \int_0^s \cos 2w(u)\, du.$$

Várható értéket véve, a sztochasztikus integrál várható értékét elhagyva

$$f(s) - 1 = -2\int_0^s f(u)\, du,$$

amiből

$$f(s) = \exp(-2s).$$

A keresett kvadratikus variáció

$$\frac{1}{2}t + \frac{1}{2}\int_0^t \exp(-2s)\, ds = \frac{1}{2}t - \frac{1}{4}\left[\exp(-2s)\right]_0^t = \frac{1}{2}t - \frac{1}{4}\exp(-2t) + \frac{1}{4}.$$

3.1.3. Itô-formula időtől függő transzformációs függvény esetén

A többdimenziós Itô-formula speciális esete amikor $\eta(t) \circeq f(t, \xi(t))$, ahol az f kétváltozós, kétszer folytonosan deriválható függvény. Az Itô-formula szerint

$$\begin{aligned}
f(t,\xi(t)) - f(0,\xi(0)) &= \int_0^t \frac{\partial f}{\partial s}(s,\xi(s))\, ds + \int_0^t \frac{\partial f}{\partial x}(s,\xi(s))\, d\xi(s) + \\
&+ \frac{1}{2}\int_0^t \frac{\partial^2 f}{\partial s^2}(s,\xi(s))\, d\langle s \rangle + \frac{1}{2}\int_0^t \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(s,\xi(s))\, d\langle \xi \rangle (s) + \\
&+ \int_0^t \frac{\partial^2 f}{\partial s \partial x}(s,\xi(s))\, d\langle s, \xi \rangle.
\end{aligned}$$

Miként már többször láttuk, $\langle s \rangle = 0$. A keresztvariáció szintén nulla, ugyanis a ξ trajektóriáinak folytonossága miatt

$$\begin{aligned}
\left|\langle s,\xi \rangle (t)\right| &\approx \left| \sum_k (s_k - s_{k-1})(\xi(s_k) - \xi(s_{k-1})) \right| \leq \\
&\leq t \max_k \left|\xi(s_k) - \xi(s_{k-1})\right| \to 0.
\end{aligned}$$

Megjegyezzük, hogy a gondolatmenet általánosítható: Ha az $\zeta_1(t,\omega)$ folyamat trajektóriái korlátos változásúak, a $\zeta_2(t,\omega)$ folyamat trajektóriái folytonosak, akkor

$$\begin{aligned}
\left|\langle \zeta_1, \zeta_2 \rangle (t)\right| &\approx \left| \sum_k (\zeta_1(s_k) - \zeta_1(s_{k-1}))(\zeta_2(s_k) - \zeta_2(s_{k-1})) \right| \leq \\
&\leq V_{0,t}(\zeta_1) \max_k \left|\zeta_2(s_k) - \zeta_2(s_{k-1})\right| \to 0,
\end{aligned}$$

vagyis a megadott feltételek esetén $\langle \zeta_1, \zeta_2 \rangle = 0$. A másodrendű tagban tehát három tényező elhagyható, így

$$\begin{aligned} f(t,\xi(t)) - f(0,\xi(0)) &= \int_0^t \frac{\partial f}{\partial s}(s,\xi(s))\,ds + \int_0^t \frac{\partial f}{\partial x}(s,\xi(s))\,d\xi + \\ &+ \frac{1}{2}\int_0^t \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(s,\xi(s))\,d\langle \xi \rangle . \end{aligned}$$

Speciálisan ha

$$\xi(u) \circeq \int_0^u X(s)\,dw(s),$$

vagyis ha

$$d\xi = X dw,$$

akkor az integrálok kvadratikus variációjának képlete szerint

$$\begin{aligned} \langle \xi \rangle (u) &\circeq \left\langle \int_0^u X(s)\,dw(s) \right\rangle = \int_0^u X^2(s)\,d\langle w\rangle(s) = \\ &= \int_0^u X^2(s)\,ds. \end{aligned}$$

Ezt és az integrálokra vonatkozó asszociativitási szabályt kétszer felhasználva

$$\begin{gathered} f(t,\xi(t)) - f(0,\xi(0)) = \\ = \int_0^t \frac{\partial f}{\partial s}(s,\xi(s))\,ds + \int_0^t \frac{\partial f}{\partial x}(s,\xi(s))\,d\xi(s) + \\ + \frac{1}{2}\int_0^t \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(s,\xi(s))\,d\langle \xi\rangle(s) = \\ = \int_0^t \frac{\partial f}{\partial s}(s,\xi(s))\,ds + \int_0^t \frac{\partial f}{\partial x}(s,\xi(s))\,X dw + \frac{1}{2}\int_0^t \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(s,\xi(s))\,X^2 ds = \\ = \int_0^t \left(\frac{\partial f}{\partial s}(s,\xi(s)) + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(s,\xi(s))\,X^2\right) ds + \int_0^t \frac{\partial f}{\partial x}(s,\xi(s))\,X dw. \end{gathered}$$

A pénzügyi matematika könyvek gyakran az Itô-formulát ebben az alakban szokták közölni és differenciális alakban írni

$$df = \left(\frac{\partial f}{\partial t} + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}X^2\right) dt + \frac{\partial f}{\partial x} X dw$$

Ez az alak azonban csak egy nehezen megjegyezhető, mondhatnánk némiképpen zavaros speciális formája az általunk tárgyalt, és remélhetőleg jóval világosabb, általános esetnek[7].

3.1.4. Lineáris sztochasztikus differenciálegyenletek

A Black–Scholes-modellben a részvények ármozgását a

$$dS = \mu S dt + \sigma S dw, \quad S(t) = s \tag{3.1}$$

sztochasztikus differenciálegyenlettel írjuk le. A jelölésen a tetszőleges $t < T$ időpontokra teljesülő

$$S(T) - S(t) = \int_t^T \mu \cdot S(u)\,du + \int_t^T \sigma \cdot S(u)\,dw(u)$$

[7] A legfontosabb észrevétel, hogy a két dt szerinti integrál megjelenésének teljesen eltérő oka van.

integrálegyenlet értendő. Általában a sztochasztikus differenciálegyenleteket igen nehéz megoldani. Ebben az esetben azonban a megoldás explicite megadható:

$$S(T) = s \cdot \exp\left(\left(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2\right) \cdot (T-t) + \sigma \cdot w(T-t)\right). \tag{3.2}$$

Valóban, az Itô-formula időtől függő verziója alapján

$$\begin{aligned} & S(T) - S(t) = \\ = & \int_t^T \left(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2\right) S(u)\,du + \sigma \int_t^T S(u)\,dw + \frac{1}{2}\int_t^T \sigma^2 S(u)\,du = \\ = & \mu \int_t^T S(u)\,du + \sigma \int_t^T S(u)\,dw. \end{aligned}$$

3.3 Példa.
Határozzuk meg a (3.1) megoldásának várható értékét.

Az egyenlet megoldását a T pontban a (3.2) képlet adja meg. A képletből világos, hogy a megoldás lognormális eloszlást követ, ahol logaritmushoz tartozó normális eloszlás[8]

$$N\left(\left(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2\right)(T-t), \sigma\sqrt{T-t}\right).$$

A lognormális eloszlás várható értékének képlete alapján

$$\begin{aligned} \mathbf{M}(S(T)) &= s \cdot \mathbf{M}\left(\exp\left(N\left(\left(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2\right)(T-t), \sigma\sqrt{T-t}\right)\right)\right) = \\ &= s \exp\left(\left(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2\right)(T-t) + \frac{1}{2}\sigma^2 (T-t)\right) = \\ &= s \exp\left(\mu (T-t)\right). \end{aligned}$$

□

3.4 Példa.
Számoljuk ki az $N(t) \triangleq \exp(w(t) - t/2)$ exponenciális martingál négyzetének kompenzátorát!

Emlékeztetünk, hogy az N^2 kompenzátorán azt a monoton növekedő, folytonos P folyamatot értjük, amelyre az $N^2(t) - P(t)$ folyamat lokális martingál. Tetszőleges N folytonos martingál esetén az Itô-formula szerint

$$\begin{aligned} N^2(t) - N^2(0) &= \int_0^t 2N dN + \frac{1}{2}\int_0^t 2d\langle N\rangle = \\ &= \int_0^t 2N dN + \langle N\rangle(t). \end{aligned}$$

Az $\langle N\rangle$ monoton növekedő, az $\int_0^t 2NdN$ integrál lokális martingál, tehát az N^2 kompenzátora[9] az $\langle N\rangle$ kvadratikus variáció. Ugyanakkor ha $\mu = 0$, $\sigma = 1$, akkor a lineáris sztochasztikus differenciálegyenlet megoldása éppen N, vagyis

$$N(t) - N(0) = \int_0^t N(u)\,dw(u), \quad N(0) = 1.$$

[8]Értelemszerűen az s kezdeti feltétel nélkül.
[9]Természetesen ezt már korábban is láttuk.

Az $N(t) - 1 = \int_0^t N(u)\, dw(u)$ integrál kvadratikus variációja

$$\begin{aligned} \langle N \rangle (t) &= \int_0^t N^2(s)\, d\langle w \rangle (s) = \int_0^t N^2(s)\, ds = \\ &= \int_0^t \exp(2w(s) - s)\, ds. \end{aligned}$$

Vegyük észre, hogy a $P = \langle N \rangle$ kompenzátor mint sztochasztikus folyamat függ az ω kimeneteltől. □

3.2. Feynman–Kac-formula

Tekintsük a Black–Scholes-féle parciális differenciálegyenletet (PDE):

$$\frac{\partial f}{\partial t} + rS\frac{\partial f}{\partial S} + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 f}{\partial S^2} = rf,$$

A call opciókhoz tartozó peremfeltétel

$$f(T, S) = \max\{S - X, 0\}.$$

Ez speciális esete a

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial t} + \mu\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{1}{2}\sigma^2 \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + rf + k = 0, \\ f(T, x) = \Phi(x) \end{aligned}$$

egyenletnek, ahol μ, σ, k a keresett f függvényhez hasonlóan a (t, x) független változók függvényei, az r pedig konstans. A parciális differenciálegyenlet megoldását sztochasztikus differenciálegyenlet (SDE) segítségével adjuk meg. Tekintsük először az általános PDE-hez tartozó következő úgynevezett Cauchy-problémát[10]:

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial t} + \mu\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{1}{2}\sigma^2 \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + k = 0, \\ f(T, x) = \Phi(x). \end{aligned} \tag{3.3}$$

3.2.1. Parciális és sztochasztikus differenciálegyenletek

A parciális differenciálegyenlethez formálisan[11] rendeljük hozzá a

$$\begin{aligned} dX(s) &= \mu(s, X(s))\, ds + \sigma(s, X(s))\, dw(s), \\ X(t) &= x \end{aligned}$$

sztochasztikus differenciálegyenletet. Vegyük észre, hogy az idő jelölésére a t helyébe s kerül, a t időparaméter és az x helyparaméter a kezdeti feltételben jelenik meg. Ismételten megjegyezzük, hogy a sztochasztikus differenciálegyenletre felírt, sztochasztikus analízisben megszokott jelölés valójában a tetszőleges $t < T$ időpontokra teljesülő

$$X(T) - x = X(T) - X(t) = \int_t^T \mu(s, X(s))\, ds + \int_t^T \sigma(s, X(s))\, dw(s)$$

integrálegyenlőség teljesülését jelenti. Vezessük be az úgynevezett Dinkin-operátort, amely a PDE-ben szereplő x szerint vett deriváltakat tartalmazó tagokból áll:

$$Af \circeq \mu\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{1}{2}\sigma^2 \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}.$$

[10] Vegyük észre, hogy a feladat homogén, vagyis nem tartalmazza az f függvényt, csak a deriváltjait, vagyis az rf tagot elhagytuk.

[11] Hangsúlyozni kell, hogy a hozzárendelés formális, következésképpen mechanikus.

Az A segítségével a (3.3) PDE

$$\frac{\partial f}{\partial t} + Af + k = 0, \quad f(T, x) = \Phi(x) \tag{3.4}$$

módon írható. Legyen[12] $f(t, x) \in C^2$ az egyenlet megoldása. Az időtől függő Itô-formula alapján

$$df = \frac{\partial f}{\partial s} ds + \frac{\partial f}{\partial x} dX + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} d \langle X \rangle,$$

ugyanis miként korábban láttuk a másodrendű tagban a többi kvadratikus variáció nulla. Az X képletét a dX tagba behelyettesítve az integrálokra vonatkozó asszociativitási szabály miatt

$$\frac{\partial f}{\partial x} dX = \frac{\partial f}{\partial x} (\mu ds + \sigma dw) = \mu \frac{\partial f}{\partial x} ds + \sigma \frac{\partial f}{\partial x} dw.$$

Az X két tag összege, így miként már többször láttuk, az

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

nevezetes összefüggés triviális alkalmazásával

$$\langle X \rangle = \langle \mu ds + \sigma dw \rangle = \langle \mu ds \rangle + 2 \langle \mu ds, \sigma dw \rangle + \langle \sigma dw \rangle.$$

Miként láttuk, folytonos esetben ha a kvadratikus variációban valamelyik kifejezés véges változású, akkor a kvadratikus variáció nulla, így[13]

$$\langle X \rangle = \langle \sigma dw \rangle.$$

A sztochasztikus integrálok kvadratikus variációjának képlete miatt

$$\langle \sigma dw \rangle (t) \stackrel{\circ}{=} \left\langle \int_0^t \sigma dw \right\rangle = \int_0^t \sigma^2 d \langle w \rangle = \int_0^t \sigma^2 ds.$$

A Dinkin-operátor mint jelölés segítségével a kifejezés

$$\begin{aligned} df &= \frac{\partial f}{\partial s} ds + \frac{\partial f}{\partial x} dX + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} d \langle X \rangle = \\ &= \frac{\partial f}{\partial s} ds + \mu \frac{\partial f}{\partial x} ds + \sigma \frac{\partial f}{\partial x} dw + \frac{1}{2} \sigma^2 \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} ds = \\ &= \left(\frac{\partial f}{\partial s} + \mu \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{1}{2} \sigma^2 \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \right) ds + \sigma \frac{\partial f}{\partial x} dw = \\ &= \left(\frac{\partial f}{\partial s} + Af \right) ds + \sigma \frac{\partial f}{\partial x} dw. \end{aligned}$$

Az egyenlőséget integrálként részletesen kírva és felhasználva, hogy az f megoldása a PDE-nek, vagyis teljesül a (3.4):

$$\begin{aligned} f(T, X(T)) - f(t, X(t)) &= \int_t^T \left(\frac{\partial f}{\partial s} + Af \right) ds + \int_t^T \frac{\partial f}{\partial x} \sigma dw = \\ &= \int_t^T -k ds + \int_t^T \frac{\partial f}{\partial x} \sigma dw. \end{aligned}$$

[12] Az $f \in C^2$ jelölés azt jelenti, hogy az f kétszer folytonosan deriválható.

[13] A μds kifejezés korlátos változású, ugyanis a némiképpen homályos differencia jelölés mögött egy érzéki $\int_0^t \mu ds$ integrál dobog, amely teljes megváltozása, mint tudjuk, $\int_0^t |\mu| ds < \infty$.

Ha a második tag elég jó[14], akkor mind a két oldalon várható értéket véve, a megszokott módon felhasználva, hogy a sztochasztikus integrál várható értéke nulla

$$\begin{aligned}\mathbf{M}\left(f\left(T,X\left(T\right)\right)-f\left(t,X\left(t\right)\right)\right) &= \mathbf{M}\left(\int_t^T -kds\right)+\mathbf{M}\left(\int_t^T \frac{\partial f}{\partial x}\sigma dw\right)= \\ &= \mathbf{M}\left(\int_t^T -kds\right).\end{aligned}$$

Mivel az $X(s)$ eleget tesz az SDE-nek, ezért a kezdeti feltétel miatt $X(t)=x$, tehát az

$$f\left(t,X\left(t\right)\right)=f\left(t,x\right)$$

konstans. Az összefüggést átalakítva

$$\begin{aligned}\mathbf{M}\left(f\left(T,X\left(T\right)\right)-f\left(t,X\left(t\right)\right)\right) &= \mathbf{M}\left(f\left(T,X\left(T\right)\right)-f\left(t,x\right)\right)= \\ &= \mathbf{M}\left(f\left(T,X\left(T\right)\right)\right)-f\left(t,x\right)= \\ &= \mathbf{M}\left(\int_t^T -k\left(s,X\left(s\right)\right)ds\right).\end{aligned}$$

Átrendezve

$$\begin{aligned}f\left(t,x\right) &= \mathbf{M}\left(f\left(T,X\left(T\right)\right)\right)+\mathbf{M}\left(\int_t^T k\left(s,X\left(s\right)\right)ds\right)= \\ &= \mathbf{M}\left(\Phi\left(X\left(T\right)\right)\right)+\mathbf{M}\left(\int_t^T k\left(s,X\left(s\right)\right)ds\right),\end{aligned}$$

ahol felhasználtuk, hogy az f megoldása a PDE-nek, tehát minden y-ra

$$f\left(T,y\right)=\Phi\left(y\right),$$

így

$$f\left(T,X\left(T\right)\right)=\Phi\left(X\left(T\right)\right).$$

A közgazdasági alkalmazásokban $k=0$, így ilyenkor

$$f\left(t,x\right)=\mathbf{M}\left(\Phi\left(X\left(T\right)\right)\right),$$

vagyis a parciális differenciálegyenlet megoldása, a T időpontban levő peremérték segítségével várható értékeként számolható. Vegyük észre, hogy az $\mathbf{M}$ várható érték a sztochasztikus differenciálegyenlethez tartozó valószínűség szerint értendő. A sztochasztikus differenciálegyenlet egy matematikai segédeszköz, amely közvetlenül a parciális differenciálegyenlethez tartozik és ezért teljesen független attól, hogy miként jutottunk a parciális differenciálegyenlethez. A derivatív árazás elméletében a parciális differenciálegyenletet egy másik sztochasztikus differenciálegyenletből vezetjük le, amely egyenlet az árak mozgását írja le és amely egyenlet a statisztikailag megfigyelhető valószínűségi mező felett van értelmezve. A parciális differenciálegyenlet megoldásakor használt segédmező azonban egy másik valószínűség[15], amelyet szokás kockázatsemleges valószínűségi mezőnek nevezni és amely elvileg semmilyen kapcsolatban sincsen az eredeti problémában szereplő statisztikailag megfigyelt adatokra támaszkodó valószínűségi mezővel.

Térjünk visssza az eredeti

$$\frac{\partial f}{\partial t}+\mu\frac{\partial f}{\partial x}+\frac{1}{2}\sigma^2\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}+k+rf=0,\quad f\left(T,x\right)=\Phi\left(x\right)$$

[14] Vagyis a sztochasztikus integrál nem csak lokális martingál, hanem valódi martingál.
[15] Amely csak a matematikusok által kreált fantáziavilágban létezik.

inhomogén PDE-re. Szorozzuk be az egyenletet az $\exp(rt)$ függvénnyel, és vezessük be a

$$h(t,x) \triangleq \exp(rt) f(t,x)$$

jelölést. A szorzat deriválási szabálya miatt

$$\frac{\partial h}{\partial t} = \frac{\partial f}{\partial t}\exp(rt) + r\exp(rt) f(t,x),$$

így az inhomogén egyenlet az ekvivalens

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{\partial h}{\partial t} + \mu\frac{\partial h}{\partial x} + \frac{1}{2}\sigma^2\frac{\partial^2 h}{\partial x^2} + k\exp(rt), \\ \Phi(x) &= f(T,x) = \exp(-rT)\, h(t,x) \end{aligned}$$

módon írható. A már bemutatott módon a homogén egyenletet megoldva

$$\begin{aligned} h(t,x) &= \mathbf{M}(h(T,X(T))) + \mathbf{M}\left(\int_t^T \exp(rs)\, k(s,X(s))\, ds\right) = \\ &= \mathbf{M}(\Phi(x)\exp(rT)) + \mathbf{M}\left(\int_t^T \exp(rs)\, k(s,X(s))\, ds\right) = \\ &= \exp(rT)\,\mathbf{M}(\Phi(X(T))) + \mathbf{M}\left(\int_t^T \exp(rs)\, k(s,X(s))\, ds\right). \end{aligned}$$

Az f függvényt visszahelyettesítve az inhomogén egyenlet megoldása

$$\begin{aligned} f(t,x) &= \exp(r(T-t))\,\mathbf{M}(\Phi(X(T))) + \\ &\quad + \exp(-rt)\,\mathbf{M}\left(\int_t^T \exp(rs)\, k(s,X(s))\, ds\right). \end{aligned}$$

Ha $k = 0$, akkor

$$f(t,x) = \exp(r(T-t))\,\mathbf{M}(\Phi(X(T))).$$

3.2.2. A derivatív árazás alapképlete

Vegyük észre, hogy a Black–Scholes-féle egyenletben szereplő r kamatláb a mi jelölésünk szerint éppen $-r$, így az eredeti jelölésre áttérve

$$f(t,x) = \exp(-r(T-t))\,\mathbf{M}(\Phi(X(T))),$$

vagyis az Black–Scholes-féle egyenlet megoldása, a derivatíva jelenlegi t időpontban vett ára, a T jövőbeli $\Phi(X(T))$ kifizetés diszkontált várható értéke, ahol a várható értéket, illetve az $X(T)$ változót a parciális differenciálegyenlethez rendelt fantáziavilágban, az úgynevezett kockázatsemleges világban kell venni[16].

3.2.3. Példák

Tekintsünk néhány példát:

1. Oldjuk meg a

$$\frac{\partial h}{\partial t} + \frac{1}{2}\sigma^2\frac{\partial^2 h}{\partial x^2} = 0, \quad h(T,x) = x^2$$

[16] Az eredeti Black–Scholes modelben az árak jelölése S, mi következetesen X-szel jelöljük a sztochasztikus differenciálegyenlet változóját hangsúlyozva, hogy a kettőnek semmi köze egymáshoz.

PDE-tet.

Rendeljük hozzá a sztochasztikus differenciálegyenletet

$$dX(s) = 0 \cdot ds + \sigma dw(s), \quad X(t) = x.$$

Az egyenlet könnyen megoldható, a megoldása

$$X(s) = x + \sigma (w(s) - w(t)).$$

A Wiener-folyamat tulajdonságai alapján $X(s) \cong N\left(x, \sigma\sqrt{s-t}\right)$. Ezt felhasználva a megoldás

$$\begin{aligned} h(t,x) &= \mathbf{M}\left(X^2(T)\right) = \mathbf{D}^2(X(T)) + \mathbf{M}^2(X(T)) = \\ &= \sigma^2(T-t) + x^2. \end{aligned}$$

Valóban

$$\begin{aligned} \frac{\partial h}{\partial t} + \frac{1}{2}\sigma^2\frac{\partial^2 h}{\partial x^2} &= -\sigma^2 + \sigma^2 = 0 \\ h(T,x) &= \sigma^2(T-T) + x^2 = x^2. \end{aligned}$$

2. Oldjuk meg a

$$\frac{\partial h}{\partial t} + \frac{1}{2}x^2\frac{\partial^2 h}{\partial x^2} + x = 0, \quad h(T,x) = \ln x^2$$

PDE-tet.

Hagyjuk először el a $k(t,x) = x$ konstans tagot, vagyis tekintsük a

$$\frac{\partial h}{\partial t} + \frac{1}{2}x^2\frac{\partial^2 h}{\partial x^2} = 0, \quad h(T,x) = \ln x^2$$

egyenletet. Rendeljük hozzá a

$$dX(s) = 0 \cdot ds + X(s)\,dw(s) = X(s)\,dw(s), \quad X(t) = x,$$

SDE-tet. Az egyenlet ismételten könnyen megoldható. A (3.2) képlet alapján

$$X(s) = x\exp\left(-\frac{1}{2}(s-t) + w(s-t)\right).$$

Az $X(T)$ változót a $\Phi(x) = \ln x^2$ függvénybe betéve

$$\ln\left(X^2(T)\right) = -(T-t) + 2N\left(0, \sqrt{T-t}\right) + \ln x^2,$$

amiből

$$\begin{aligned} h(t,x) &= \mathbf{M}\left(-(T-t) + 2N\left(0,\sqrt{T-t}\right) + \ln x^2\right) = \\ &= (t-T) + \ln x^2. \end{aligned}$$

Valóban

$$\begin{aligned} \frac{\partial h}{\partial t} + \frac{1}{2}x^2\frac{\partial^2 h}{\partial x^2} &= 1 + \frac{1}{2}x^2\left(\frac{1}{x^2}2x\right)' = \\ &= 1 + x^2\left(\frac{1}{x}\right)' = \\ &= 1 + x^2\left(-\frac{1}{x^2}\right) = 0. \\ h(T,x) &= (T-T) + \ln x^2 = \\ &= \ln x^2. \end{aligned}$$

Az eredeti egyenletet az

$$f(t,x) = \mathbf{M}(\Phi(X(T))) + \int_t^T \mathbf{M}(k(s,X(s)))\,ds$$

általános formula alapján oldjuk meg, ahol $k(s,x)$ az általános szabad konstans tag a (3.3) egyenletben[17]. A lognormális eloszlás várható értékére vonatkozó képlet alapján

$$\begin{aligned}\mathbf{M}(k(s,X(s))) &= \mathbf{M}(X(s)) = \mathbf{M}\left(x\exp\left(-\frac{1}{2}(s-t)+w(s-t)\right)\right)\\ &= x\exp\left(-\frac{1}{2}(s-t)+\frac{1}{2}(s-t)\right) = x,\end{aligned}$$

amiből

$$\int_t^T \mathbf{M}(k(s,X(s)))\,ds = x\int_t^T 1ds = x(T-t).$$

Ez alapján

$$f(t,x) = (t-T) + \ln x^2 + x(T-t).$$

Valóban

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial t} + \frac{1}{2}x^2\frac{\partial^2 f}{\partial^2 x^2} + x &= 1 - x + \frac{1}{2}x^2\left(\frac{1}{x^2}2x\right)' + x =\\ &= 1 + x^2\left(\frac{1}{x}\right)' = 0\end{aligned}$$

$$f(T,x) = \ln x^2.$$

3. Oldjuk meg a

$$\begin{aligned}\frac{\partial h}{\partial t} + \frac{\partial h}{\partial x} + \frac{1}{2}\sigma^2\frac{\partial^2 h}{\partial x^2} &= 0,\\ h(T,x) &= x^2\end{aligned}$$

PDE-tet.

Rendeljük hozzá a sztochasztikus differenciálegyenletet.

$$dX(s) = 1ds + \sigma dw(s), \quad X(t) = x.$$

Az egyenlet

$$\begin{aligned}X(T) - x &= \int_t^T ds + \sigma\int_t^T dw = T - t + \sigma[w(T) - w(t)] \cong\\ &\cong N\left(T-t, \sigma\sqrt{T-t}\right).\end{aligned}$$

A megoldóképlet alapján

$$h(t,x) = \mathbf{M}\left(N^2\left(x+T-t,\sigma\sqrt{T-t}\right)\right) = \sigma^2(T-t) + (x+T-t)^2.$$

Valóban

$$\begin{aligned}\frac{\partial h}{\partial t} + \frac{\partial h}{\partial x} + \frac{1}{2}\sigma^2\frac{\partial^2 h}{\partial x^2} &= -\sigma^2 + 2(x+T-t)(-1) +\\ &\quad +2(x+T-t) + \frac{1}{2}\sigma^2 2\\ &= 0,\end{aligned}$$

[17] Feltéve, hogy a két integrál felcserélhető, de ezt igen általános feltételek mellett meg lehet tenni. A legegyszerűbben ellenőrizhető feltétel, hogy a kettős integrálban szereplő integrandus nem negatív.

$$h(T,x) = x^2.$$

4. Oldjuk meg a

$$\begin{aligned}\frac{\partial h}{\partial t} + x\frac{\partial h}{\partial x} + \frac{1}{2}x^2\frac{\partial^2 h}{\partial^2 x^2} &= 0,\\ h(T,x) &= \ln x^2\end{aligned}$$

PDE-tet.

Rendeljük hozzá a

$$dX(s) = X(s)\,ds + X(s)\,dw(s), \quad X(t) = x$$

sztochasztikus egyenletet, amely lineáris sztochasztikus differenciálegyenlet, tehát a megoldása

$$X(s) = x\exp\left(\left(1-\frac{1}{2}\right)(s-t) + w(s-t)\right).$$

A parciális differenciálegyenlet megoldása

$$\begin{aligned}h(t,x) &= \mathbf{M}\left(\ln X^2(T)\right) = \ln x^2 + \mathbf{M}\left(N\left(T-t,\sqrt{T-t}\right)\right) =\\ &= \ln x^2 + T - t.\end{aligned}$$

Valóban a peremfeltétel triviálisan teljesül, és

$$\begin{aligned}&\frac{\partial h}{\partial t} + x\frac{\partial h}{\partial x} + \frac{1}{2}x^2\frac{\partial^2 h}{\partial^2 x^2} =\\ =\ &-1 + x\frac{2}{x} + \frac{1}{2}x^2\left(-\frac{2}{x^2}\right) =\\ =\ &-1+2-1 = 0.\end{aligned}$$

5. Oldjuk meg a

$$\begin{aligned}\frac{\partial h}{\partial t} + x\frac{\partial h}{\partial x} + \frac{1}{2}x^2\frac{\partial^2 h}{\partial^2 x^2} + x^2 &= 0,\\ h(T,x) &= \ln x^2\end{aligned}$$

PDE-tet.

Rendeljük hozzá a

$$dX(s) = X(s)\,ds + X(s)\,dw(s), \quad X(t) = x$$

sztochasztikus differenciálegyenletet. Ez ismételten lineáris sztochasztikus differenciálegyenlet, tehát a megoldása

$$X(s) = x\exp\left(\left(1-\frac{1}{2}\right)(s-t) + w(s-t)\right).$$

A parciális differenciálegyenlet megoldása

$$h(t,x) = \mathbf{M}\left(\ln X^2(T)\right) + \int_t^T \mathbf{M}\left(X^2(s)\right)ds.$$

Az egyes komponenseket kiszámolva

$$\begin{aligned}\mathbf{M}\left(\ln X^2(T)\right) &= \mathbf{M}\left(\ln x^2 + 2\left[\frac{1}{2}(T-t) + w(T-t)\right]\right) =\\ &= \ln x^2 + \mathbf{M}\left(N\left((T-t), 2\sqrt{T-t}\right)\right) =\\ &= \ln x^2 + T - t,\end{aligned}$$

illetve a lognormális eloszlás várható értékére vonatkozó képlet alapján

$$\begin{aligned}\int_t^T \mathbf{M}\left(X^2(s)\right) ds &= x^2 \int_t^T \mathbf{M}\left(\exp\left(s-t+2w\left(s-t\right)\right)\right) ds = \\ &= x^2 \int_t^T \exp\left(3\left(s-t\right)\right) ds = \\ &= x^2 \left[\exp\left(3\left(s-t\right)\right)\right]_t^T = \\ &= \frac{x^2}{3}\left(\exp\left(3\left(T-t\right)\right)-1\right).\end{aligned}$$

Összefoglalva:

$$h(t,x) = \ln x^2 + T - t + \frac{x^2}{3}\left(\exp\left(3\left(T-t\right)\right)-1\right).$$

Ha $t = T$, akkor

$$h(T,x) = \ln x^2,$$

vagyis teljesül a peremfeltétel. Az egyenletbe behelyettesítve

$$\begin{aligned}&\frac{\partial h}{\partial t} + x\frac{\partial h}{\partial x} + \frac{1}{2}x^2\frac{\partial^2 h}{\partial^2 x^2} + x^2 = \\ &-1 - x^2\exp\left(3\left(T-t\right)\right) + \\ &+2x\frac{1}{x} + \frac{2x^2}{3}\left[\exp\left(3\left(T-t\right)\right)-1\right] + \\ &-\frac{2}{2}x^2\frac{1}{x^2} + \frac{1}{2}\frac{2x^2}{3}\left[\exp\left(3\left(T-t\right)\right)-1\right] + \\ &x^2,\end{aligned}$$

amely az összevonásokat elvégezve nulla.

4. fejezet

Girszanov-formula

A Girszanov-formula a mértékcsere alapvető eszköze. A mértékcsere célja a kockázatsemleges mértékre való áttérés. A sztochasztikus analízis egyik alapvető észrevétele, hogy az elmélet formulái nem változnak az ekvivalens mértékcsere folyamán. Természetesen a mértékcsere során a várható érték megváltozhat. Ennek megfelelően a lokális martingálok osztálya változik a mértékcserével, de a szemimartingálok és az integrálok nem függnek az alapul vett valószínűségi mértéktől.

A sztochasztikus analízis nevezetes formulája a Girszanov-formula. Maga a formula tulajdonképpen igen egyszerű, ami miatt a formulát mégis nehéznek szokás tartani, az a formula mondanivalója. A formula megértésének kulcsa a mértékcsere fogalmának tisztázása. A valószínűségszámítás tárgyalásakor mindig abból szokás kiindulni, hogy adott az $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$ valószínűségi mező. A valószínűségszámítás célja, hogy az előre rögzített mező ismeretében határozzuk meg a különböző valószínűségi változók eloszlását[1]. De miből is származik az eredeti valószínűségi mező? Általában a feladat természete miatt előre adott[2], esetenként szimmetria megfontolásokból nekünk kell meghatározni. Időnként előfordul, hogy valamilyen ismert határeloszlás-tétel alkalmazásával nekünk kell „kitalálni" az eloszlást. Mind a három esetben úgy érezzük, hogy a valószínűségi mértékek nagysága „objektív", a problémához egyedül lehetséges módon hozzá van rendelve.

4.1. Mértékcsere megadása sűrűségfüggvénnyel

Természetesen ez nem így van. Az $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$ valószínűségi mezőben a $\mathbf{P}$, az úgynevezett *valószínűségi mérték*, minden további nélkül kicserélhető. De hogyan lehet a mérték kicserélését jellemezni? A *mértékcserét* a legegyszerűbben az új mérték *sűrűségfüggvényének*[3] megadásával oldhatjuk meg.

4.1 Definíció.
Az f függvényt a $\mathbf{Q}$ mérték $\mathbf{P}$ mértékre vonatkozó sűrűségfüggvényének mondjuk, ha minden A esemény esetén

$$\mathbf{Q}(A) = \int_A f d\mathbf{P}.$$

A sűrűségfüggvény természetesen az Ω halmazon értelmezett függvény. A lényeg, hogy minden A halmaz esetén az f függvény A halmazon vett integrálja a $\mathbf{P}$ szerint éppen az A halmaz mértékét adja az új $\mathbf{Q}$ mérték szerint. A $\mathbf{Q}$ és a $\mathbf{P}$ nem feltétlenül kell, hogy valószínűségi mérték legyen. A

[1] Természetesen az eloszlások teljeskörű megadása helyett gyakran megelégszünk a változók várható értékének, vagy szórásának kiszámolásával.

[2] Ilyenkor statisztikai és elméleti megfontolások együttesét szokás alkalmazni.

[3] A bevezető valószínűségszámításban sűrűségfüggvényen általában a számegyenes értelmezett eloszlások sűrűségfüggvényét szokás érteni. Az alábbi fogalom ennek általánosítása. Mivel sztochasztikus folyamat esetén az Ω elég bonyolult lehet, ezért a sűrűségfüggvény is igen bonyolult lehet. A bonyolultság elsődleges oka, hogy maga az Ω alaptér igen komplikált, nagyon gyakran függvényekből álló összetett matematikai konstrukció.

klasszikus esetben a sűrűségfüggvényt deriválással számoljuk ki és a függvény a derivált integrálja[4] összefüggés miatt igaz az előállítás. Ilyenkor a $\mathbf{Q}$ egy valószínűségi mérték, de a $\mathbf{P}$ nem az, ugyanis a számegyenesen a normál geometria által meghatározott mérték nem valószínűségi mérték, hiszen az alaphalmaz mértéke nem egy, hanem végtelen. Mivel a klassszikus esetben a sűrűségfüggvény deriválással számoljuk ki szokás a sűrűségfüggvényt Radon–Nikodym-deriváltnak is mondani. Érdemes hangsúlyozni, hogy tetszőleges két mérték esetében nincsen mindig sűrűségfüggvény. Például a Poisson-eloszlás és a normális eloszlás esetén az egyik valószínűségi mértéknek sincsen sűrűségfüggvénye a másik szerint. Ennek oka, hogy a Poisson-eloszlás diszkrét pontokra koncentrálódik, a normális eloszlás pedig folytonos eloszlás, vagyis minden pont valószínűsége nulla. Vegyük észre, hogy mind a két eloszlás az $\mathbb{R}$ számegyenesen van értelmezve és a megfigyelhető események halmaza, az $\mathcal{A}$, azonos. Vagyis a két eloszlás azonos $(\Omega, \mathcal{A})$ eseménytéren van értelmezve, csak más és más valószínűséggel „súlyozzák” az egyes eseményeket.

Nagyon fontos, hogy megértsük, hogy miért nincsen az említett két eloszlásnak egymásra vonatkozólag sűrűségfüggvénye. Az integrálás egyik alapvető szabálya, hogy egy nulla valószínűségű eseményen integrálva mindig nullát kapunk. Függetlenül attól, hogy mit integrálunk. Ez a szabály közvetlen kiterjesztése annak, hogy az egyenesek területe a síkban nulla, ugyanis nulla a „szélességük”. Egy téglalap területe a szélesség és a hosszúság szorzata, és definíció szerint, ha az egyik oldal hossza nulla, akkor a szorzat értéke nulla, még akkor is, ha a másik oldal mérete végtelen[5]. A Poisson és a normális eloszlás esetén mindig lehet olyan halmazt találni, amelyik valószínűsége az egyik eloszlás szerint nulla, a másik esetében azonban pozitív. Például a Poisson-eloszlás szerint a negatív számok halmazának valószínűsége nulla, miközben a negatív számok valószínűsége a normális eloszlás szerint pozitív.

4.2 Példa.
Exponenciális eloszlás normális eloszlásra vonakozó sűrűségfüggvénye.

Legyen $\mathbf{Q}$ az

$$h(x) \mathrel{\hat=} \begin{cases} \exp(-x) & \text{ha} \quad x > 0 \\ 0 & \text{ha} \quad x \leq 0 \end{cases}$$

sűrűségfüggvénnyel adott exponenciális eloszlás. Vagyis a számegyenesen levő tetszőleges A eseményre

$$\mathbf{Q}(A) \mathrel{\hat=} \int_{A \cap \{x \geq 0\}} \exp(-x)\, dx.$$

A $\mathbf{P}$ valószínűségi mértéket definiáljuk a

$$g(x) \mathrel{\hat=} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{x^2}{2}\right)$$

sűrűségfüggvénnyel, vagyis a $\mathbf{P}$ legyen a standard normális eloszláshoz tartozó valószínűségi mérték. Valamely u függvény $\mathbf{P}$ szerinti integrálja a Stieltjes-integrálásnál bemutatott asszociativitási szabály miatt

$$\int_A u\, d\mathbf{P} = \int_A u(x)\, g(x)\, dx.$$

A $\mathbf{Q}$-nak a $\mathbf{P}$-re vonatkozó sűrűségfüggvénye

$$f(x) \mathrel{\hat=} \frac{h(x)}{g(x)},$$

[4] Vagyis a Newton–Leibniz-formula miatt.

[5] Ez a szabály persze csak a sík közönséges geometriájára igaz. Vannak olyan eloszlások, amelyek a sík, vagy az egyenes nulla területű tartomámyára támaszkodnak. Legegyszerűbb példa a Poisson-eloszlás, amely az egész számokra halmazára támaszkodik. Ilyenkor persze nincsen az eloszlásnak hagyományos értelemben vett sűrűségfüggvénye. Éppen ezen jelenség miatt nem lehet minden eloszlást a sűrűségfüggvényével leírni.

ugyanis tetszőleges A eseményre

$$\begin{aligned}\int_A f d\mathbf{P} &\circeq \int_A \frac{h(x)}{g(x)} d\mathbf{P} = \int_A \frac{h(x)}{g(x)} g(x)\, dx = \\ &= \int_{A\cap\{x\geq 0\}} \exp(-x)\, dx = \mathbf{Q}(A).\end{aligned}$$

Érdemes hangsúlyozni, hogy az eredeti $\mathbf{P}$ mérték szerint a valószínűség változó várható értéke nulla volt, az új szerint azonban a várható érték egy. Ennek oka, hogy az egyes kimenetelekhez tartozó súlyok teljesen mások lettek. Például az új valószínűségi mérték szerint a negatív számok mindegyikének a valószínűsége nulla lesz, korábban a negatív számok valószínűsége 1/2 volt.

□

Az előző példa alapján könnyen látható a következő szabály: Ha a $\mathbf{P}$ eloszlás sűrűségfüggvénye g a $\mathbf{Q}$ eloszlás sűrűségfüggvénye h és ahol a h pozitív ott a g is pozitív, akkor a $\mathbf{Q}$ eloszlás $\mathbf{P}$-szerinti sűrűségfüggvénye éppen $f = h/g$.

4.2. Girszanov-formula Wiener-folyamatok esetén

A következő példa kulcs szerepet játszik a Girszanov-formula megértésében.

4.3 Példa.
Normális eloszlás várható értékének módosítása mértékcserével.

Legyen $\mathbf{P}$ az $N(0,\sigma)$ eloszlás és legyen $\mathbf{Q}$ az $N(\mu,\sigma)$ eloszlás. A $\mathbf{P}$-hez tartozó sűrűségfüggvény

$$g(x) \circeq \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{x^2}{2\sigma^2}\right).$$

A $\mathbf{Q}$-hoz tartozó sűrűségfüggvény

$$h(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right).$$

Az előző példában látottakkal azonos módon azonnal látható, hogy a $\mathbf{P}$-ről $\mathbf{Q}$-ra való átváltást biztosító sűrűségfüggvény a két sűrűségfüggvény hányadosa, vagyis

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{h(x)}{g(x)} = \exp\left(-\frac{1}{2\sigma^2}\left((x-\mu)^2 - x^2\right)\right) = \\ &= \exp\left(\frac{\mu x}{\sigma^2} - \frac{\mu^2}{2\sigma^2}\right).\end{aligned}$$

Bevezetve az $\theta \circeq \mu/\sigma^2$ paramétert a formula

$$f(x) = \exp\left(\theta x - \frac{1}{2}\theta^2\sigma^2\right)$$

módon írható. Tegyük fel, hogy az $N(0,\sigma)$ eloszlás valamilyen Wiener-folyamat t időpontban való megfigyeléséből ered. Ekkor $\sigma^2 = t$. Ekkor ha az eredeti mérték helyett az

$$f(x) = \exp\left(\theta x - \frac{1}{2}\theta^2 t\right) \tag{4.1}$$

sűrűségfüggvény segítségével kicserélt új mérték szerint tekintjük az eredeti Wiener-folyamat értékét a t időpontban, akkor a t időpontban kapott eloszlásnak nem nulla lesz a várható értéke, hanem μ. Hangsúlyozni kell, hogy a várható érték egy súlyozott összeg. A nagysága függ attól, hogy mit és attól, hogy mivel súlyozzuk. A mértékcsere során a súlyozandó értékek, vagyis a t időpontban megfigyelt változó nem változott. De mivel a súlyok megváltoztak a várható értéke nem nulla lesz, hanem μ.

Általában, ha egy $N(\mu_1, \sigma_1)$ eloszlású változóból akarunk egy $N(\mu_2, \sigma_2)$ eloszlású változót csinálni, akkor az átváltás sűrűségfüggvénye

$$\frac{\sigma_1}{\sigma_2} \exp\left(-\left(\frac{(x-\mu_2)^2}{2\sigma_2^2} - \frac{(x-\mu_1)^2}{2\sigma_1^2}\right)\right).$$

Speciális, ha[6] $\sigma_1 = \sigma_2 = \sqrt{t}$ és $\mu_1 = 0$, miközben $\mu_2 = -\gamma t$, akkor

$$\begin{aligned} f(x) &= \exp\left(-\left(\frac{(x+\gamma t)^2}{2t} - \frac{x^2}{2t}\right)\right) = \\ &= \exp\left(-\left(\frac{x^2 + 2x\gamma t + (\gamma t)^2}{2t} - \frac{x^2}{2t}\right)\right) = \\ &= \exp\left(-\frac{2x\gamma t + (\gamma t)^2}{2t}\right) = \exp\left(-x\gamma - \frac{1}{2}\gamma^2 t\right). \end{aligned}$$

Ha pedig $\sigma_1 = \sigma_2 = \sqrt{t}$ és $\mu_1 = \gamma t$ és $\mu_2 = 0$, vagyis, ha a γt trendet el akarjuk tüntetni, akkor

$$\begin{aligned} f(x) &= \exp\left(-\left(\frac{x^2}{2t} - \frac{(x-\gamma t)^2}{2t}\right)\right) = \\ &= \exp\left(-\left(\frac{x^2}{2t} - \frac{x^2 - 2x\gamma t + (\gamma t)^2}{2t}\right)\right) = \\ &= \exp\left(-\frac{2x\gamma t - (\gamma t)^2}{2t}\right) = \exp\left(-x\gamma + \frac{1}{2}\gamma^2 t\right). \end{aligned}$$

□

A Girszanov-formula irányába haladva próbáljuk megérteni, hogy hogyan néz ki egy *sztochasztikus folyamat eloszlása*. Hogy a problémát szükségtelenül ne bonyolítsuk, a vizsgálandó folyamat a $\mathbf{P}$ mérték mellett legyen egy w Wiener-folyamat. A gond természetesen az, hogy a folyamat tulajdonképpen egy végtelen dimenziós véletlen vektor, ugyanis minden t időpontban egy valószínűségi változót kapunk, és mindegyik valószínűségi változóhoz tartozik egy-egy eloszlásfüggvény. A sztochasztikus folyamat eloszlásának meghatározása az egyes időpontokban megfigyelt értékek közötti különböző „együttállások" valószínűségének meghatározása. Természetesen a lehetséges „együttállások" halmaza áttekinthetetlenül széles. Szerencsére azonban a sűrűségfüggvény megadásához elegendő néhány viszonylag egyszerű halmaz valószínűségét megadni. A legegyszerűbb szerkezetű események, amelyeket egy w Wiener-folyamat segítségével meghatározhatunk

$$A \mathrel{\hat{=}} \{w(t_1) \in B_1, w(t_2) \in B_2, \ldots, w(t_n) \in B_n\}$$

alakuak. Az A esemény azt adja meg, hogy a w folyamat a $t_1, t_2, \ldots, t_n$ időpontokban rendre a $B_1, B_2, \ldots, B_n$ halmazokban lesz. Például a t_1 időpontban az értéke 2 felett lesz a t_2 időpontban 3 alatt stb. Az ilyen típusú halmazok valószínűségét egy Wiener-folyamat esetén azonban relatíve

[6] V.ö.: [?], ahol az elvárt új várható érték $-\gamma t$. Az irodalomban némi zavar forrása lehet a képletben szereplő konstans előjele. A matematikai irodalomban általában az a kérdés, hogyan lehet mértékcserével a várható értéket nem nullává tenni, ugyanis a kérdés úgy merül fel, hogy mértékcsere során mi történik egy martingállal, illetve egy Wiener-folyamattal. A pénzügyi irodalomban azonban a kérdés úgy merül fel, hogy miként lehet egy nem martingált martingállá tenni mértékcserével, vagyis miként lehet a várható értéket nullává tenni.

nehéz meghatározni. Jóval egyszerűbb azoknak az eseményeknek a valószínűségét meghatározni, ahol ki tudjuk használni, hogy a w független növekményű. A

$$D \mathrel{\circ\!\!=} \{w(t_1) \in C_1, w(t_2) - w(t_1) \in C_2, \ldots, w(t_n) - w(t_{n-1}) \in C_n\} \tag{4.2}$$

halmazokhoz tartozó valószínűség egyszerűen meghatározható, ugyanis a független növekmény feltétele miatt a D valószínűsége szorzat alakba írható

$$\mathbf{P}(C) \mathrel{\circ\!\!=} F_{t_1}(C_1) \cdot F_{t_2 - t_1}(C_2) \cdots F_{t_n - t_{n-1}}(C_n),$$

ahol a normális eloszlás sűrűségfüggvénye alapján

$$F_s(C) = \frac{1}{\sqrt{2\pi s}} \int_C \exp\left(-\frac{x^2}{2s}\right) ds.$$

Másképpen fogalmazva Wiener-folyamat esetén kényelmes nézőpont, ha nem a folyamat értékeit figyeljük meg, hanem a növekményeket és kihasználjuk, hogy a növekmények függetlenek. Nyilvánvalóan a két megfigyelési rendszer matematikailag ekvivalens, ugyanis bármelyikből elemi számolással bármelyikre áttérhetünk a másikról.

Tekintsük az egyik $\eta_i \mathrel{\circ\!\!=} w(t_i) - w(t_{i-1})$ növekményt! A teljes $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$ téren a mértékcserét „darabonként" adjuk meg. Legyenek $\mathcal{A}_i \subseteq \mathcal{A}$ azok az események, amelyeket az η_i megfigyelésével kaphatunk. Ezek éppen az

$$\{\eta_i \in C_i\} \mathrel{\circ\!\!=} \{\omega : \eta_i(\omega) \in C_i\}$$

típusú részhalmazai az Ω eseménytérnek. Az η_i eloszlása $N(0, \sqrt{t_i - t_{i-1}})$. Legyen μ_i egy tetszőleges új várható érték és cseréljük ki úgy a mértéket, hogy az η_i új eloszlása $N(\mu_i, \sqrt{t_i - t_{i-1}})$ legyen. Hogyan lehet ezt megtenni? Természetesen úgy, hogy megadjuk az eredeti $\mathbf{P}$ mértékre vonatkozó sűrűségfüggvényt! Azonnal meg fogjuk mutatni, hogy az átmenetet biztosító sűrűségfüggvény

$$\begin{aligned} Z_i(\omega) &= \exp\left(\theta_i \eta_i(\omega) - \frac{1}{2}\theta_i^2 (t_i - t_{i-1})\right) \mathrel{\circ\!\!=} \\ &\mathrel{\circ\!\!=} \exp\left(\theta_i (w(t_i, \omega) - w(t_{i-1}, \omega)) - \frac{1}{2}\theta_i^2 (t_i - t_{i-1})\right), \end{aligned}$$

ahol

$$\theta_i \mathrel{\circ\!\!=} \frac{\mu_i}{\sigma_i^2} = \frac{\mu_i}{t_i - t_{i-1}}.$$

A képlet az előzőek alapján majdnem ismerős, az egyetlen eltérés, hogy a (4.1) képletben az x helyébe az $\eta_i \mathrel{\circ\!\!=} w(t_i) - w(t_{i-1})$ változó kerül[7]. Próbáljuk ennek az okát megtalálni!

Az első fontos észrevétel, hogy a $d\mathbf{Q}/d\mathbf{P}$ sűrűségfüggvény az Ω téren van értelmezve. A bevezető valószínűségszámításban az Ω alaptér általában nem jelenik meg közvetlenül, ugyanis csak a valószínűségi változók eloszlásával foglalkozunk. Ha úgy tetszik az Ω alaptérnek kanonikus módon választhatjuk az $\mathbb{R}$ egyenest. Ezért a sűrűségfüggvény is az $\Omega = \mathbb{R}$ számegyenesen van értelmezve és ezt hangsúlyozzuk avval, hogy a mértékcserét megadó sűrűségfüggvény argumentumát nem ω-val, hanem egyszerűen x-szel jelöljük. Ha pusztán a szám értékű valószínűségi változók eloszlásaira koncentrálunk, akkor a számegyenesen értelmezett eloszlások közötti transzformációt a (4.1) képletben szereplő f függvény adja.

A Z_i alakjának indoklásául nézzük meg, milyen eloszlást eredményez a Z_i sűrűségfüggvény, vagyis mi lesz a

$$\mathbf{Q}(A) \mathrel{\circ\!\!=} \int_A Z_i d\mathbf{P}, \quad A \in \mathcal{A}_i.$$

[7] A sűrűségfüggvény az Ω alaptéren van értelmezve, ezért szerepel az argumentumában az ω kimenetel. Az ω kimenetelhez meg kell keresni a hozzá tartozó $t \mapsto w(t, \omega)$ trajektóriát és ennek növekményét felhasználva kell a sűrűségfüggvény konkrét értékét kiszámolni. A dolog komplikáltnak tűnik, de valójában nem az. A sűrűségfüggvényben az adott ω esetén megfigyelhető konkét növekmény szerepel, ami persze függ az aktuális realizációtól, de értéke pont az, amit az adott realizáció esetén éppen megfigyeltünk.

Vegyük észre, hogy csak az $\mathcal{A}_i$ eseménytéren vizsgáljuk a mértékcserét. Máshol nem is tudjuk, ugyanis csak az $\eta_i \doteq w(t_i) - w(t_{i-1})$ növekményt figyeltük meg. Fontos hangsúlyozni, hogy miként általában a valószínűségszámításban az eloszlás a megfigyelhető események valószínűségét megadó függvény. Megfigyelhető eseményen az összes elvileg megfigyelhető eseményt értjük. Sztochasztikus folyamatok esetén a megfigyelhető események halmaza rendkívül nagy. Az itt követett gondolatmenet lényege, hogy rögzítünk bizonyos időpontokat és az ezen időpontban végzett megfigyelések halmazán megvizsgáljuk a mértékcserét. Majd ez követően növeljük a megfigyelésekhez tartozó időpontok számát.

Visszatérve az eredeti megfontolásokhoz, az $\mathcal{A}_i$ definícióját felhasználva minden A megfigyelt esemény $\{\eta_i \in C\}$ alakú, ahol a C az $\mathbb{R}$ egy alkalmas részhalmaza. Az egyszerűbb jelölés miatt az

$$f_i(x) \doteq \exp\left(\theta_i x - \frac{1}{2}\theta_i^2 (t_i - t_{i-1})\right)$$

függvényt bevezetve, amely éppen a (4.1) sorban szereplő sűrűségfüggvény

$$\begin{aligned}
\mathbf{Q}(\eta_i \in C) &\doteq \mathbf{Q}(A) \doteq \int_A Z_i d\mathbf{P} = \int_\Omega Z_i \chi(\eta_i \in C)\, d\mathbf{P} = \\
&= \mathbf{M}(Z_i \chi(\eta_i \in C)) = \\
&= \mathbf{M}(f_i(\eta_i)\chi(\eta_i \in C)) = \int_\mathbb{R} f_i(x)\chi(x \in C)\, dG_i(x) = \\
&= \int_\mathbb{R} f_i(x)\chi(x \in C)\, g_i(x)\, dx = \int_C h_i(x)\, dx = H_i(C).
\end{aligned}$$

Vegyük észre, hogy a levezetésben G_i az $N(0, \sqrt{t_i - t_{i-1}})$ eloszlásfüggvénye, a H_i pedig a $N(\mu_i, \sqrt{t_i - t_{i-1}})$ eloszlásfüggvénye. Vagyis a Z_i valóban az η_i eredeti $N(0, \sqrt{t_i - t_{i-1}})$ eloszlását „átváltja" az $N(\mu_i, \sqrt{t_i - t_{i-1}})$ eloszlásra.

A képlet levezetésekor felhasználtuk a transzformált valószínűségi változók várható értékét meghatározó formulát, az úgynevezett *absztrakt helyettesítés formuláját.* Bár a formula elnevezése elsőre talán ismeretlennek tűnik, valójában egy igen gyakran használt összefüggésről van szó. A formula szerint, ha egy ξ változó eloszlásfüggvénye F és $\eta \doteq g(\xi)$, vagyis az η változót a ξ változó g szerinti transzformáltjaként kapjuk, akkor

$$\mathbf{M}(\eta) \doteq \mathbf{M}(g(\xi)) \doteq \int_\Omega g(\xi)\, d\mathbf{P} = \int_\mathbb{R} g(x)\, dF(x).$$

A formula szerint három dolgot kell kicserélni: Az ω-át x-re a Ω-át $\mathbb{R}$-re és a $\mathbf{P}$-t a ξ változó F eloszlásfüggvényére. A formulával a Ω-án értelmezett absztrakt integrálokat a számegyenesen értelmezett integrálokra lehet átváltani. A formula legismertebb alkalmazása momentumok kiszámolására használt képlet. Például a második momentum esetén

$$\mathbf{M}(\xi^2) \doteq \int_\Omega \xi^2 d\mathbf{P} = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 dF(x) = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 f(x)\, dx,$$

ahol persze feltettük, hogy létezik sűrűségfüggvény.

Az absztrakt helyettesítési formula segítségével a mértékcsere már tárgyalt képlete a következő: Legyen egy ξ változó eloszlásának sűrűségfüggvénye g és legyen h egy olyan a számegyenesen értelmezett sűrűségfüggvény, amelyre az $f \doteq h/g$ értelmes, vagyis ha a h pozitív, akkor a g is legyen pozitív[8]. Legyen $f \doteq h/g$. Vizsgáljuk meg az $f(\xi) \geq 0$ transzformált változó által az Ω alaptéren generált $\mathbf{Q}$ mértékre nézve a ξ eloszlását!

$$\begin{aligned}
\mathbf{Q}(\xi \in C) &= \int_\Omega \chi_C(\xi)\, d\mathbf{Q} = \int_\Omega \chi_C(\xi) \frac{h(\xi)}{g(\xi)} d\mathbf{P} = \\
&= \int_\mathbb{R} \chi_C(x) \frac{h(x)}{g(x)} g(x)\, dx = \int_C h(x)\, dx.
\end{aligned}$$

[8] A h/g legyen nulla, ha a g, és így a h is, nulla.

Következésképpen a ξ változó $\mathbf{Q}$ alatti eloszlásának is van sűrűségfüggvénye a számegyenesen és ez a sűrűségfüggvény éppen h. Tehát ha számegyenesen értelmezett, vagyis ha az eloszlásokhoz tartozó, sűrűségfüggvények hányadosába betesszük az eredeti változót, akkor megkapjuk az Ω téren értelmezett mértékek közötti sűrűségfüggvényt.

Térjünk most vissza a fenti (4.2) sorban definiált $D \subseteq \Omega$ halmazra, amely a növekmények együttes megfigyelését írja le. Tegyük fel, hogy mindegyik C_i halmazon adott egy-egy θ_i. Tegyük fel, hogy a teljes sűrűségfüggvényt a sűrűségfüggvények szorzataként akarjuk megadni, vagyis meg akarjuk őrizni a növekmények függetlenségét. Ekkor

$$\begin{aligned} Z^{(n)} &= Z_1 Z_2 \cdots Z_n = \prod_{i=1}^{n} Z_i = \\ &= \prod_{i=1}^{n} \exp\left(\theta_i \left(w\left(t_i\right) - w\left(t_{i-1}\right)\right) - \frac{\theta_i^2}{2}\left(t_i - t_{i-1}\right)\right) = \\ &= \exp\left(\sum_{i=1}^{n} \theta_i \left(w\left(t_i\right) - w\left(t_{i-1}\right)\right) - \sum_{i=1}^{n} \frac{\theta_i^2}{2}\left(t_i - t_{i-1}\right)\right). \end{aligned}$$

Ha a „felosztást” finomítjuk, vagyis egyre több időpontban végezzük el a mértékcserét, akkor a határérték, amely mint sűrűségfüggvény már persze a teljes $\mathcal{A}$-ra értelmezve van

$$Z = \exp\left(\int_0^t \theta(s)\, dw(s) - \frac{1}{2}\int_0^t \theta(s)^2\, ds\right).$$

Vegyük ismét észre, hogy a Z az ω kimenetelek függvénye és a Ω halmazon van értelmezve. Milyen folyamat lesz az eredeti w Wiener-folyamat az új $\mathbf{Q}$ mérték mellett?

1. Egyrészt a folyamat folytonos marad, ugyanis az Ω halmazon a mérték kicserélése semmit sem változtat a trajektóriánkon. Ha azok folytonosak voltak nyilván azok is maradtak.

2. A folyamat növekményeinek eloszlásai normálisak maradnak és a szórások nem változnak, ugyanis csak a μ_i várható értékeket módosítottuk.

3. Mivel az új eloszlások meghatározásakor a növekményekhez tartozó együttes eloszlásokat a peremeloszlások összeszorzásával határoztuk meg a növekmények függetlenek maradnak. Ez egy igen lényeges lépés. Elvileg semmi okunk nincsen arra, hogy az egyes időpontokban végrehajtott mértékcseréket a megadott módon kapcsoljuk össze. A mértékcsere folyamán ügyeltünk arra, hogy a növekmények függetlenek maradjanak és az egyes időpontokban az új mérték szerint az eloszlások normálisak maradjanak, miközben nem módosítottuk a szórásokat. Miért olyan meglepő, hogy az új mérték szerint egy trenddel rendelkező Wiener-folyamatot kapunk? Miért, ki számított másra?

4. A fő kérdés csak az, mi történik a várható értékekkel? A $t_i - t_{i-1}$ időszakon az új várható érték μ_i lesz. Természetesen a várható érték megváltozása, az idő függvénye. Egyenletes várható érték változást feltételezve kétszer akkor időszak alatt a várható érték kétszer annyit változhat. Ennek megfelelően a

$$\theta_i \circeq \frac{\mu_i}{t_i - t_{i-1}} = \frac{\mu_i}{\sigma_i^2}$$

az egységnyi idő alatt való megváltozása a várható értéknek, vagyis a várható érték változásának sebessége. A közelítő összeg esetén az új várható érték, az egyes várható érték növekmények összege, vagyis

$$\sum_{i=1}^{n} \mu_i = \sum_{i=1}^{n} \theta_i \left(t_i - t_{i-1}\right) \approx \int_0^t \theta(s)\, ds.$$

Vagyis az új mérték alatt a várható érték

$$\mathbf{M}^{\mathbf{Q}}\left(w(t)\right) = \int_0^t \theta(s)\, ds$$

lesz, ahol a $\mathbf{Q}$ index arra utal, hogy most a várható értéket nem az eredeti $\mathbf{P}$ valószínűség alatt kell venni, hanem az új $\mathbf{Q}$ alatt. Ez a képlet éppen az út egyenlő a sebesség integráljával szabály.

Az egész kérdést némiképpen átforgathatjuk. Ha a w folyamatból levonjuk a $\int_0^t \theta(s)\,ds$ folyamatot, akkor az így kapott $\widehat{w}$ folyamat Wiener-folyamat lesz a $\mathbf{Q}$ alatt, ugyanis a Wiener-folyamat minden tulajdonsága teljesül, ugyanis a levonás után a várható értéke is nulla lesz. Ez mondja ki a nevezetes Girszanov-formula.

4.4 Tétel. (Girszanov-formula)
Ha w egy Wiener-folyamat valamely $\mathbf{P}$ mérték mellett és a $\mathbf{Q}$ mérték $\mathbf{P}$-re vonatkozó sűrűségfüggvénye az Ω halmazon

$$Z \doteq \exp\left(\int_0^t \theta(s)\,dw(s) - \frac{1}{2}\int_0^t \theta(s)^2\,ds\right),$$

akkor a

$$\widehat{w}(t) \doteq w(t) - \int_0^t \theta(s)\,ds$$

folyamat Wiener-folyamat lesz az új $\mathbf{Q}$ mérték mellett.

Érdemes néhány egyszerű megjegyzést tenni.

Először egy terminológiai megjegyzés. A sűrűségfüggvény elnevezést a valószínűségszámításban általában csak a számegyenesen a közönséges integrálás esetén szokás használni. Az elemi valószínűségszámításban a sűrűségfüggvény az eloszlásfüggvény deriváltja. Ez indokolja azt, hogy absztrakt körülmények között *Radon–Nikodym-deriváltról* szokás beszélni. A $\mathbf{Q}$ mérték $\mathbf{P}$-re vonatkozó sűrűségfüggvényét, vagyis a Radon–Nikodym-deriváltat $d\mathbf{Q}/d\mathbf{P}$ módon szokás jelölni. Tehát a Girszanov-formulában

$$\frac{d\mathbf{Q}}{d\mathbf{P}} \doteq Z \doteq \exp\left(\int_0^t \theta(s)\,dw(s) - \frac{1}{2}\int_0^t \theta(s)^2\,ds\right).$$

Absztrakt körülmények között, így például a Girszanov-formula esetén, természetesen beszélhetünk sűrűségfüggvényről, de deriváltról, mint a különbségi hányadosok határértékéről, nem. Ennek ellenére a deriválás elnevezés igen szemléletes és hasznos, de hangsúlyozni kell, hogy a Radon–Nikodym-derivált csak távoli rokona az elemi kalkulusban megismert deriválásnak.

Második megjegyzésünk szintén terminológiai jellegű. A μ_i átlagos elmozdulások összegét, vagyis az $\int_0^t \theta(s)\,ds$ kifejezéseket szokás *driftnek* nevezni. Vagyis a Girszanov-formula szerint a mértékcsere hatására a drift nélküli Wiener-folyamatban megjelenik a drift.

Maga a Wiener-folyamat egy igazságos játék, egy martingál. A mértékcsere hatására az igazságos játék esetleg igazságtalanná válhat. Ennek oka, hogy az egyes kimenetelek valószínűsége módosul. Talán jól szemléltethető a probléma a fej vagy irás játékkal. Ha felírjuk a lehetséges kimeneteleket, akkor az így kapott bináris fa egy sztochasztikus folyamat, ugyanis az egyes kimenetelekhez minden egyes időpontban egy valós számot rendel. A játék végeredménye attól függ, hogy a „sors” melyik útra terel minket. Ha minden lépésben azonos a két elágazás valószínűsége, akkor a játék fair. Ha azonban hamis érmével játszunk, a játék nem fair. Hangsúlyozni kell, hogy az érme megválasztásától függetlenül maga a lehetséges kimenetelek halmaza azonos, csak az egyes utak valószínűsége módosul. Vagyis a lehetséges események, a lehetséges játékok halmaza az érme kiválasztása előtt már adott. Absztrakt környezetben ez azt jelenti, hogy az $(\Omega, \mathcal{A})$ tér a konkrét érme kiválasztása előtt adott. Az érme megválasztása a nyerési esélyeket, vagyis a valószínűségi mértéket adja meg. Ha az érme fair nincsen drift, vagyis az átlagos nyeremény nulla. Ha nem, vagyis ha az érme „hibás”, akkor van drift. Minnél tovább játszunk, annál több lesz a „becsapott” fél átlagos vesztesége. A nyereményfolyamat az egyik irányba sodródik, vagyis a folyamatnak van driftje.

Végül megjegyezzük, hogy némiképpen zavaró, hogy a matematikai pénzügyekben a Girszanov-formulát „fordítva” szokás használni. A matematikai pénzügyekben a részvényhozamok folyamata tartalmaz egy driftet. Ennek oka, hogy minnél nagyobb a kockázat annál nagyobb kompenzáció jár a részvényért, így a hozamok, pontosabban a kockázatmentes kamatláb feletti hozamok, nem alkotnak martingált. A részvény mögött levő reálfolyamatban az érme hamis[9], így a részvény tartásáért kompenzáció jár, vagyis a hamis érme pénzügyi tükörképe is hamis. A derivatív árazás esetén azonban csak a relatív összefüggések érvényesek. A részvény driftje megjelenik a belőle fix matematikai összefüggéssel számolt származtatott termékben is: Hamis érme függvénye is hamis és helyes fedezési arányok esetén „a két hamisság kioltja egymást”. Mind a két fél tudja, hogy az érme hamis és ennek tudatában teszik meg a téteket, vagy fogalmazzák meg a szabályokat. A drift kivétele úgy is ábrázolható, hogy átírjuk a valószínűségeket. Ha a fej kétszer olyan gyakran jön ki mind az írás, akkor csak minden második fejet veszünk figyelembe és a játék máris fair. A Girszanov-formula éppen ennek a trivialitásnak a megjelenése egy matematikailag igen összetett modellben.

4.5 Példa.
Drift kivétele mértékcserével.

Legyen az X sztochasztikus folyamat $w(t) + at$ alakú a $\mathbf{P}$ valószínűségi mérték alatt. A folyamat a $\mathbf{P}$ mérték alatt egy drifttel rendelkező Wiener-folyamat. A sodródás sebesség a. Mértékcserével ki akarjuk venni a driftet. Mennyi legyen a θ? A $\mathbf{Q}$ alatt az at tag nem változik, a w pedig $\widehat{w}(t) + \int_0^t \theta(s)\,ds$ alakú lesz, ahol a $\widehat{w}$ a $\mathbf{Q}$ alatt Wiener-folyamat. Ha a θ konstans, akkor

$$w(t) = \widehat{w}(t) + \theta t.$$

Ilyenkor

$$X(t) = w(t) + at = \widehat{w}(t) + \theta t + at.$$

Ez akkor lesz fair a $\mathbf{Q}$ alatt, ha $\theta = -a$. Vagyis ha $\theta = -a$, akkor a $\mathbf{P}$ alatti drifttel rendelkező X folyamat a $\mathbf{Q}$ alatt Wiener-folyamat.

□

4.3. Girszanov-formula lokális martingálokra

Végezetül érdemes egy rövid időre visszatérni a mértékcsere általános problémájához. Miként a mértékcsere bevezetésekor jeleztük a $d\mathbf{Q}/d\mathbf{P}$ sűrűségfüggvény létezéséhez szükséges, hogy a $\mathbf{Q}$ ne legyen pozitív akkor, ha a $\mathbf{P}$ nulla. Ez indokolja a következő definíciót:

4.6 Definíció.
Azt mondjuk, hogy a $\mathbf{P}$ és a $\mathbf{Q}$ mértékek ekvivalensek, ha a $\mathbf{Q}$ mérték pontosan akkor nulla egy halmazon, ha a halmaz valószínűsége a $\mathbf{P}$ mértékre nézve is nulla.

Ekvivalens mértékek esetén az egy valószínűséggel konvergens sorozatok triviálisan megegyeznek, ugyanis a „gonosz” kimenetelek halmaza független a mértéktől, és e miatt a gonosz halmazok valószínűsége mind a két mérték esetén, az ekvivalencia definíciója miatt, egyszerre nulla vagy nem nulla. Nem ennyire evidens, de megmutatható, hogy a sztochasztikusan konvergens sorozatok halmaza is egybesik, vagyis az ekvivalens mértékcsere nem változtatja meg a sztochasztikus konvergenciát. Ebből következően a sztochasztikus integrál és a kvadratikus variáció a mértékcsere folyamán nem változik. Így az Itô-formulában szereplő különböző kifejezések nem változnak a mértékcsere folyamán. Ebből következően a mértékcsere jórészt nem módosítja a sztochasztikus analízist, így érdemes mindig olyan mértéket választani, ahol a dolgok a lehető legegyszerűbbek. Másképpen fogalmazva a sztochasztikus analízis invariáns az ekvivalens mértékcserére, így az alapul vett mértéket lényegében „kényelmi” szempontok határozzák meg.

Természetesen felvethető, hogy akkor mégis mi változik a mértékcsere során? Nyilvánvalóan például a várható érték, illetve ennek megfelelően a szemimartingálok felosztása lokális martingálra

[9] Itt most nem feltétlenül csalásra kell gondolni. Egyszerűen a reálfolyamat tartalmaz egy sor nem diverzifikálható kockázatot. A diverzifikálható kockázat egy Wiener-folyamat, a nem diverzifikálható rész a drift.

és korlátos változású tagra. Vagyis ha X egy szemimartingál, akkor az X nyilván nem változik ha kicseréljük az alapul vett mértéket. Miért is változna? Ha az X martingál a $\mathbf{P}$ alatt akkor a $\mathbf{Q}$ alatt nem lesz martingál. Miért is maradna, az, hiszen módosul a várható érték? Idáig nem volt trendje, a növekmények várható értéke nulla volt, most pedig a növekmények várható értéke nem lesz nulla. Persze az nem nyilvánvaló, hogy szemimartingál marad. Miért is lenne ez nyilvánvaló? A Girszanov-tétel talán legfontosabb következménye, hogy a válasz igen, ha az X szemimartingál a $\mathbf{P}$ alatt, akkor az X szemimartingál marad a $\mathbf{Q}$ alatt is! Legyen $X = X(0) + M + V$ az X felbontása a $\mathbf{P}$ alatt és az új mérték alatt az X felbontása legyen $X = X(0) + N + B$. A Girszanov-formula a következő kérdést veti fel:

Mi a kapcsolat a V és a B között?

Az egyszerűség kedvéért tegyük fel, hogy az M egy martingál. Hogyan tudnánk olyan ekvivalens mértéket találni, amelyre nézve az M trendje B lesz? Vagyis az M martingálból egy B trenddel rendelkező szemimartingált akarunk csinálni. Ezt a Wiener-folyamatnál bemutatott módon „lépésenként" akarjuk megtenni. vagyis a mértékcserét „csepegtetve" akarjuk, dt hosszú időszakonként megkonstruálni. Rögzítsünk egy $0 \leq t \leq T$ időpontot. Mivel az M martingál, ezért úgy érezzük, hogy egy igazságos játék eredménye. Igazságos játék sok van. A legegyszerűbb eset, amikor a nyerési esélyek azonosak. Lehetséges azonban, hogy a valószínűségek nem azonosak, de ilyenkor a nyeremények nagysága sem azonos, de várható értékben kiegyenlítik egymást. Az is lehetséges, hogy több irányban is mozoghatunk, felfelé, lefelé, vagy helyben maradunk stb. Az egyszerűség kedvért azonban tekintsük az elsőt, az azonos $1/2$ valószínűségekhez tartozó esetet. Ilyenkor az M egy végtelen kicsi idő alatt tetszőleges trajektória tetszőleges időpontjában $1/2$ valószínűséggel felfelé megy vagy $1/2$ valószínűséggel lefelé indul el. Vegyük a t időpontban azt az A esemény, ahol az adott trajektórián a t időpontban felfelé indul el és jelölje az M növekményét az A eseményen δ. Mivel az M martingál, ezért úgy érezzük[10], hogy

$$\mathbf{P}(A) \cdot \delta - \mathbf{P}(A^c) \cdot \delta = 0.$$

Másképpen a martingál tulajdonság miatt minden trajektórián minden időpontban a lehetséges infinitezimális elmozdulások átlaga nulla lesz[11]. Jelölje α azt az átváltó konstanst, amely a $\mathbf{P}$ valószínűséget átváltja az A halmazon $\mathbf{Q}$-ra, vagyis legyen az A halmazon

$$\frac{d\mathbf{Q}}{d\mathbf{P}} = \alpha.$$

Mivel az A és az A^c „elválaszthatatlan", ezért ha az A^c halmazon az átváltó konstans β, akkor a $\mathbf{P}(A) = \mathbf{P}(A^c) = 1/2$ feltétel felhasználásával

$$1 = \mathbf{Q}(A) + \mathbf{Q}\left(\widetilde{A}\right) = \alpha\mathbf{P}(A) + \beta\mathbf{P}(A^c) = \frac{\alpha+\beta}{2}$$

kell, hogy legyen, ugyanis ellenkező esetben a $d\mathbf{Q}/d\mathbf{P}$ nem lenne sűrűségfüggvény, ugyanis nem összegződne a $\mathbf{P}$ szerint egyre. Ebből

$$\beta = 2 - \alpha.$$

Így csak az a konstanst kell kiszámolni. Az új $\mathbf{Q}$ valószínűségre a dt időszak alatt az új várható érték

$$\mathbf{Q}(A)\,\delta - \mathbf{Q}\left(\widetilde{A}\right)\delta = \Delta B(t)$$

Az átváltó konstansokat behelyettesítve

$$\alpha\frac{1}{2}\delta - (2-\alpha)\,\delta\frac{1}{2} = \Delta B(t).$$

[10] Nyilván ez egy igen vitatható gondolat. Ugyanakkor, ha nem így lenne és az A-nak nem lenne „árnyoldala", akkor az A bekövetkezésére fogadva biztos nyereséghez tudnánk jutni, és a martingál „definíciója" miatt ez lehetetlen. Vagyis az M martingál tulajdonsága miatt, és a minden jóban van valami rossz elve miatt, az A-hoz létezik $\widetilde{A}$. Másképpen a kockázat nélkül nincsen üzlet elv miatt, ha van üzlet, kell lenni kockázatnak is.

[11] A martingál kapcsán hangsúlyozni szokás, hogy nem arról van szó, hogy a növekmény várható értéke nulla. Hanem arról, hogy minden lehetséges módon kiválasztott eseménynek van tőle „elválaszthatatlan árnyoldala".

Egyszerű átrendezéssel az A halmazon

$$\alpha = 1 + \frac{\Delta B(t)}{\delta} = 1 + \frac{\Delta B(t)}{\Delta M(t)},$$

az A^c halmazon

$$\beta = 2 - \alpha = 1 + \frac{\Delta B(t)}{\Delta M(t)}.$$

Ezt némiképpen átalakítva egy igen kicsi időszak alatt

$$\frac{d\mathbf{Q}}{d\mathbf{P}}(t) \approx \frac{(\Delta B)(\Delta M)}{(\Delta M)^2} + 1 \approx 1 + \theta \Delta M,$$

ahol a θ azt adja meg, hogy a kvadratikus variáció egységnyi növekedésére nézve mennyivel növekszik az új trend, vagyis némi elnagyolással[12]

$$\theta = \frac{dB}{d\langle M\rangle}.$$

A klasszikus analízisben egy dt időszak alatt az $1+\ \theta\Delta M$ kifejezés közelítőleg éppen $\exp(\theta\Delta M)$, ugyanis a két kifejezés az elsőrendű tagok szintjén megegyezik. Az Itô-kalkulus szabályai miatt azonban a másodrendű tagok is számítanak, de a harmadrendűek már nem, ezért a

$$1 + \theta\Delta M \approx \exp\left(\theta\Delta M - \frac{1}{2}(\theta\Delta M)^2\right)$$

közelítés helyes. Valóban, az első két közelítő tagot felírva

$$\begin{aligned}\exp\left(\theta\Delta M - \frac{1}{2}(\theta\Delta M)^2\right) &\approx \\ \approx 1 + \theta\Delta M - \frac{1}{2}(\theta\Delta M)^2 + \frac{1}{2}\left(\theta\Delta M - \frac{1}{2}(\theta\Delta M)^2\right)^2 &= \\ = 1 + \theta\Delta M + \text{legalább harmadrendű} &\approx \\ \approx 1 + \theta\Delta M.&\end{aligned}$$

Ismételten a növekményekhez tartozó „csepegtetett” sűrűségfüggvényeket összeszorozva a teljes téren a mértékcsere

$$\begin{aligned}\frac{d\mathbf{Q}}{d\mathbf{P}}(T) &= \prod_t \exp\left(\theta(t)\Delta M(t) - \frac{1}{2}\theta(t)^2(\Delta M)(t)^2\right) = \\ &= \exp\left(\sum_t \theta(t)\Delta M(t) - \frac{1}{2}\sum_t \theta(t)^2(\Delta M)(t)^2\right) = \\ &= \exp\left(\sum_t \theta(t)\Delta M(t) - \frac{1}{2}\sum_t \theta^2(t)\Delta\langle M\rangle(t)\right) \approx \\ &\approx \exp\left(\int_0^T \theta(t)\,dM(t) - \frac{1}{2}\int_0^t \theta^2(t)\,d\langle M\rangle(t)\right).\end{aligned}$$

Ha az $\int_0^T \theta(t)\,dM(t)$ sztochasztikus integrálhoz tartozó lokális martingált L-lel jelöljük, akkor a

$$\frac{d\mathbf{Q}}{d\mathbf{P}} = \exp\left(L - \frac{1}{2}\langle L\rangle\right)(T)$$

[12] Joggal felvetheti valaki, hogy miért lesz a θ integrálható az M szerint. illetve miért lesz a B „deriválható” az $\langle B\rangle$ szerint? Természetesen nem kell annak lenni, de akkor a B trendet nem lehet mértékcserével megvalósítani. Vagyis nem minden trendet lehet mértékcserével létrehozni!! Nem ám, éppen ezt állítják a nincsen arbitrázs tételek.

mértékcsere az M martingálból egy B trenddel rendelkező szemimartingált csinált. Megfordítva az új mérték mellett az $\widehat{M} \circeq M - B$ folyamat martingál a $\mathbf{Q}$ alatt. Számoljuk ki az $\langle L, M\rangle$ kvadratikus kereszt variációt: A θ definíciója alapján

$$\begin{aligned}\langle L, M\rangle (t) &= \left\langle \int_0^t \theta dM, M \right\rangle = \int_0^t \theta d\langle M, M\rangle \approx \\ &\approx \sum_i \theta_i \Delta \langle M\rangle_i = \sum_i \frac{\Delta B_i}{\Delta \langle M\rangle_i} \Delta \langle M\rangle_i = \\ &= \sum_i \Delta B_i = B.\end{aligned}$$

Vagyis az új trend éppen $B \circeq \langle L, M\rangle$ módon írható fel.

4.7 Állítás. (Girszanov-transzformáció)
Ha M martingál a $\mathbf{P}$ mérték alatt és

$$\frac{d\mathbf{Q}}{d\mathbf{P}} = \exp\left(L - \frac{1}{2}\langle L\rangle\right)(T),$$

akkor az

$$\widehat{M} \circeq M - \langle L, M\rangle$$

folyamat martingál a $\mathbf{Q}$ alatt.

Természetesen a figyelmes olvasó felvetheti, hogy a bemutatott eljárás túl szigorú megkötéseket tartalmazott. Vajon más módon nem lehetne-e mértékcserét csinálni? Igen általános és természetes feltételek mellett megmutatható, hogy nem. Minden olyan B trendhez, amelyet mértékcserével meg lehet konstruálni, van olyan L lokális martingál, hogy $B = \langle L, M\rangle$.

4.8 Példa.
Wiener-folyamat és a mértékcsere.

A Wiener-folyamatok számos szempontból nem igazán különböznek a többi folytonos martingáltól. Talán az egyetlen speciális tulajdonságuk, hogy amennyiben a véletlen forrást egy w Wiener-folyamat adja meg, akkor minden L lokális martingál integrál alakban írható fel[13], vagyis ilyenkor mindig van olyan X, hogy minden t időpontra $L(t) = \int_0^t X dw$. Ezt az *integrálreprezentációs* tulajdonságot felhasználva a lehetséges trendekre

$$\begin{aligned}B(t) &= \langle L(t), w(t)\rangle = \left\langle \int_0^t X dw, w(t) \right\rangle = \int_0^t X d\langle w\rangle = \\ &= \int_0^t X(s)\, ds.\end{aligned}$$

Vagyis Wiener-folyamatok esetén mértékcserével csak deriválható trendeket lehet „csinálni”. Ennek van egy igen fontos következménye. Valamely $\mathbf{Q}$ mértékre azt mondjuk, hogy az X szemimartingál martingál mértéke, ha a $\mathbf{Q}$ alatt az X martingál. Az elmondottakból világos, hogy csak igen speciális szerkezetű szemimartingálok esetén lehet a trendet eltüntetni, vagyis csak bizonyos szerkezetű szemimartingáloknak van martingálmértéke.

□

[13] V.ö.: 5.3. állítás, 5.3. oldal.

5. fejezet

Kvadratikus variáció és arbitrázs

Ebben a fejezetben a sztochasztikus analízis és a derivatív árazás kapcsolatát mutatjuk be.

Miként a bevezetőben jeleztük a pénzügyi matematika közgazdaságilag a tökéletes piaci verseny hipotézisére épül. Az elmélet kiindulópontja, hogy a verseny tökéletessége miatt a piacon nincsen lehetőség arbitrázsra ugyanis az árak változását nem lehet a múlt alapján előrejelezni. Másoldalról az Itô-formula tárgyalásakor láttuk, hogy a „tökéletesen véletlen" folyamatok által indukált mozgások trajektóriái matematikailag igen sajátos tulajdonsággal rendelkeznek: a tökéletesen véletlen folyamat kvadratikus variációja pozitív. Mind az arbitrázs lehetetlensége, mind a kvadratikus variáció pozitivitása azt jelenti, hogy a folyamat „jövője rendkívül véletlen". Ebben a fejezetben az arbitrázs és a kvadratikus variáció kapcsolatát vizsgáljuk meg.

5.1. A Black–Scholes-formula

Első lépésként röviden emlékeztetünk a Black–Scholes képlet levezetésére. Legyen S egy részvény és legyen B egy kötvény. Tegyük fel, hogy a kötvény árát a

$$dB = \exp(rt)\,dt, \tag{5.1}$$

a részvény árát a

$$dS = \mu S dt + \sigma S dw \tag{5.2}$$

egyenlet írja le, ahol a μ a σ és az r kifejezések konstansok. Tegyük fel, hogy a T időpontban a $\Phi(S(T))$ kifizetéshez fogunk jutni. Mennyi ennek a fair ára a $t = 0$ időpontban?

5.1.1. Az árazási képlet levezetése parciális differenciálegyenlettel

A már bemutatott feltételek mellett tegyük fel továbbá, hogy a feladatban szereplő problémának van megoldása, amely tetszőleges $0 \leq t \leq T$ időpontban megadja a derivatíva árát. Tegyük fel továbbá még, hogy az árat megadó kifejezés csak a t időpont és az aktuális $S(t)$ ár függvénye. Vagyis tegyük fel, hogy adott egy $f(t,x)$ függvény, amelyre tetszőleges $0 \leq t \leq T$ időpont esetén az ár éppen $f(t, S(t))$. A kulcs feltevés, amely igencsak vitatható és amelyet hallgatólagosan felteszünk, hogy az ár nem függ egyéb paraméterektől. Például nem szerepel benne a piaci szereplők kockázati preferenciája, nem érdekes, hogy az ár lefelé mozdult, vagy felfelé az elmúlt időszakban, az S részvény mögötti vállalat éppen szárnyal vagy a csőd határán van stb. Mindez nem számít. A feltétel közgazdaságilag igen szigorú és lényegében azt állítja, hogy a közgazdaságtan[1] szokásos kategóriái a származtatott termék árának meghatározásakor nem játszik szerepet. Az f értékét a T időpontban ismerjük, ugyanis $f(T,x) = \Phi(x)$, de mi a $t = 0$ időpontban vett értékét szeretnénk megtudni, vagyis az $f(0,x)$ értékre vagyunk kiváncsiak. Tegyük fel, hogy az $f(t,x)$ függvény elég „jó", így az f függvényre alkalmazható az Itô-formula.

[1] És valljuk meg a józan ész.

A tett feltételek miatt az időtől függő Itô-formula szerint a derivatíva árát megadó f függvény kielégíti az

$$f(T.S(T)) - f(t.S(t)) = \int_t^T \frac{\partial f}{\partial s} ds + \int_t^T \frac{\partial f}{\partial x} dS + \frac{1}{2}\int_t^T \frac{\partial^2 f}{\partial^2 x} d\langle S\rangle$$

integrálegyenletet. A korábban már sokszor látott

$$\begin{aligned}\langle S\rangle &= \left\langle \mu \int S dt + \sigma \int S dw \right\rangle = \left\langle \sigma \int S dw \right\rangle = \sigma^2 \int S^2 d\langle w\rangle = \\ &= \sigma^2 \int S^2 ds\end{aligned}$$

összefüggést felhasználva az integrálegyenletet a szokásos differenciális alakba átírva

$$df = \left(\frac{\partial f}{\partial s} + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\sigma^2 S^2\right) ds + \frac{\partial f}{\partial x} dS.$$

Kivonva belőle a (5.2) sor $\partial f / \partial x$-szeresét a jobb oldalon megszabadulhatunk a misztikus dS tagtól[2].

$$df - \frac{\partial f}{\partial x} dS = \left(\frac{\partial f}{\partial s} + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\sigma^2 S^2\right) ds.$$

Persze ezt sem tűnik jobbnak. Most a dS tag átkerült a bal oldalra. A probléma megoldása egy remek közgazdasági észrevétel!! A jobb oldalon álló kifejezés minden időpontban ismert, ugyanis nem tartalmazza a dS és így a dw tagot! A df az f megváltozása, a dS az S megváltozása, így a

$$df - \frac{\partial f}{\partial x} dS$$

felfogható, mint egy 1 darab derivatíva és $-\partial f / \partial x$ darab részvényből álló portfolió rövid idő alatt bekövetkező értékváltozása. Az így kapott portfolió értéke

$$V(t) = 1 \cdot f(t, S(t)) - \frac{\partial f}{\partial x}(t, S(t)) \cdot S(t).$$

Mivel a portfolió értékének megváltozása nem függ a dw-től, ezért a portfolió értékváltozása nem tartalmaz kockázatot, ugyanis a modellben a bizonytalanságot a dw tag adja[3]. Így a portfolió hozama éppen az r kockázatmentes hozam. Vagyis

$$dV = rV ds.$$

A V konkrét értékét visszaírva

$$df - \frac{\partial f}{\partial x} dS \circeq dV = rV ds \circeq r\left(f - \frac{\partial f}{\partial x} S\right) ds.$$

Ezt visszaírva és a ds kifejezéssel osztva és az egyenletet rendezve a

$$\frac{\partial f}{\partial s} + r\frac{\partial f}{\partial s} S + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\sigma^2 S^2 = rf \tag{5.3}$$

parciális differenciálegyenletet kapjuk. Emlékeztetünk, hogy teljesülni kell az

$$f(T, S(T)) = \Phi(S(T))$$

[2] A dolog lényege, hogy persze a μ is kiesik.

[3] A t időpontban az aktuális kimenetel megadja, hogy éppen mennyi a portfolió értéke, de az értékének rövid idő alatti megváltozása, legalábbis infinitezimálisan determinisztikus.

feltételnek is. A parciális differenciálegyenletet a bemutatott módon megoldva azonnal látható, hogy a tett feltételek mellett a $t = 0$ időpontban az ár

$$f(0, S(0)) = \exp(-rT)\,\mathbf{M}(\Phi(X(T))), \tag{5.4}$$

ahol az X folyamat a (5.3) egyenlethez rendelt

$$\begin{aligned} dX &= rXdt + \sigma X dw \\ X(0) &= S(0) \end{aligned} \tag{5.5}$$

sztochasztikus differenciálegyenlet megoldása. Vegyük észre, hogy az X-re felírt egyenlet hasonlít az S-re felírt egyenletre. Az egyetlen eltérés, hogy a μ helyébe az r konstans került. Mivel a μ alapvetően a részvény kockázatát jellemzi, szokás azt mondani, hogy a (5.4) várható értéket a kockázatsemleges világban kell venni. Ez azonban a levezetés alapján nem pontos, ugyanis most a várható értéket az eredeti, ha úgy tetszik a statisztikailag megfigyelt mező felett is vehetjük[4], de a folyamat, aminek a várható értékét venni kell nem az S, hanem az X, és a két folyamat általában különböző[5]. Némi elnagyolással azt mondhatnánk, hogy nem a mértéket, hanem az alapul vett folyamatot kell kicserélni.

5.1.2. Az árazási formula levezetése mértékcserével

Az imént látott gondolatmenet minden nagyszerűsége ellenére igen vitatható. Talán a leginkább problémás feltétel, hogy már eleve feltételezzük, hogy létezik egy árazó képlet és megköveteltük, hogy az egyedül csak az aktuális ártól, illetve az időtől függjön. Igencsak heurisztikus a kockázatmentes portfolió indoklása, illetve az a gondolat, hogy ha a portfolió értékváltozása nem függ a dw-től, akkor a kockázatmentes hozamot kell hogy hozza. Arról nem is beszélve, hogy az f viszonylag szigorú analitikus tulajdonságait is megköveteltük. Nem világos továbbá, hogy miért csak egy megoldása van a parciális differenciálegyenletnek stb. Az alábbiakban egy másik indoklást mutatunk be.

Némiképpen általánosabban eljárva tekintsünk egy n darab kockázatos eszközből álló pénzügyi rendszert. Az egyes eszközök árát a t időpontban jelölje

$$(S_1(t), S_2(t), \ldots, S_n(t)).$$

Most is feltesszük, hogy az S_k folyamatok folytonosak. Tegyük fel, hogy az n darab eszközből álló portfolióban a t időpontban a

$$(\theta_1(t), \theta_2(t), \ldots, \theta_n(t))$$

vektorral megadott mennyiségű eszköz van. A t időpontban a portfolió értéke az érték egyenlő egységár szorozva mennyiség elv alapján

$$V(t) \mathrel{\hat=} \sum_{k=1}^{n} \theta_k(t)\, S_k(t).$$

A portfolió értékének megváltozása a megszokott módon, teleszkópikus összegként számolható: Ha (t_l) a $[t, T]$ időtartam tetszőleges felbontása, akkor

$$\begin{aligned} V(T) - V(t) &= \sum_l (V(t_l) - V(t_{l-1})) = \\ &= \sum_{k=1}^{n} \sum_l (\theta_k(t_l)\, S_k(t_l) - \theta_k(t_{l-1})\, S_k(t_{l-1})). \end{aligned}$$

[4] Természetesen bármilyen olyan mező felett vehetjük a várható értéket, amely mellett a (5.5) feladat felírható és megoldható.

[5] Nem beszélve arról, hogy az X tetszőleges olyan valószínűségi mező felett vehető, amely esetén a (5.4) egyenlet megoldható.

Az elemi számolással ellenőrizhető

$$\begin{aligned} a_2b_2 - a_1b_1 &= a_1(b_2-b_1) + b_1(a_2-a_1) + \\ &+ (a_2-a_1)(b_2-b_1) \end{aligned}$$

képlet miatt a belső

$$\sum_l \left(\theta_k(t_l) S_k(t_l) - \theta_k(t_{l-1}) S_k(t_{l-1})\right)$$

összeg éppen az

$$\int_t^T \theta dS + \int_t^T S d\theta + \langle \theta, S \rangle$$

közelítő összege. Általában, ha ξ és η két sztochasztikus folyamat, akkor

$$\xi(b)\eta(b) - \xi(a)\eta(a) = \int_a^b \xi d\eta + \int_a^b \eta d\xi + \langle \xi, \eta \rangle_a^b$$

feltéve, hogy az integrálok, illetve a kvadratikus keresztvariáció létezik[6]. Ezt a formulát szokás *parciális integrálás* formulájának is mondani. A parciális integrálás formulája természetesen a többdimenziós Itô-formula segítségével is megkapható. A későbbiekben azonban a formulát igen általános körülmények között fogjuk alkalmazni és a gondolatmenettel a formula általános jellegére szerettünk volna utalni.

A parciális integrálás formuláját felhasználva a portfolió értékváltozása

$$\begin{aligned} V(T) - V(t) &= \sum_{k=1}^n \int_t^T \theta_k dS_k + \sum_{k=1}^n \int_t^T S_k d\theta_k + \\ &+ \sum_{k=1}^n \langle \theta_k, S_k \rangle_t^T . \end{aligned}$$

Az egyenlőséget sztochasztikus differenciákkal felírva:

$$dV = \sum_{k=1}^n \theta_k dS_k + \sum_{k=1}^n S_k d\theta_k + \sum_{k=1}^n d\langle \theta_k, S_k \rangle .$$

5.1 Definíció.
A $(\theta_k)_{k=1}^n$ portfolió súlyokat az $(S_k)_{k=1}^n$ árak mellett önfinanszírozónak mondjuk, ha

$$dV = \sum_{k=1}^n \theta_k dS_k,$$

vagyis önfinanszírozó portfolió esetén a V értékfolyamat megváltozása csak az árak dS_k megváltozásából származik. A sztochasztikus differenciálokat integrálalakban kiírva az önfinanszírozás feltétele azt jelenti, hogy tetszőleges $t < T$ időpontok esetén

$$V(T) - V(t) = \sum_{k=1}^n \int_t^T \theta_k dS_k.$$

Fontos hangsúlyozni, hogy az önfinanszírozás tulajdonsága nem függ az ármércétől, vagyis nem függ attól, hogy milyen egységben fejezzük ki az árakat. Ez intuitíve nyilvánvaló, és formális számolással is igazolható. Hogy a technikai részletek ne vegyék el az olvasó kedvét, csak akkor látjuk be az állítást, amikor az új ármérce egy

$$B(t) = \exp(rt)$$

[6] A $\langle \xi, \eta \rangle_a^b$ jelölésen értelemszerűen a ξ és az η $[a, b]$ szakaszon vett keresztvariációját értjük.

alakú kötvény[7]. A parciális integrálás formulája szerint tetszőleges t-re

$$\overline{V}(t) \circeq \frac{V(t)}{B(t)} = \overline{V}(0) + \int_0^t \frac{1}{B(s)} dV(s) + \int_0^t V(s)\, d\frac{1}{B(s)} + \left\langle V, \frac{1}{B} \right\rangle (t).$$

A megadott formula szerint a B korlátos változású, a V az S_k folyamatok folytonossága miatt folytonos, így a kvadratikus keresztvariáció nulla[8]. A portfolió önfinanszírozó, így

$$dV = \sum_{k=1}^{n} \theta_k dS_k.$$

Ezt beírva, az asszociativitási szabály szerint az első integrál a

$$\int_0^t \frac{1}{B} dV = \sum_{k=1}^{n} \int_0^t \frac{\theta_k}{B} dS_k$$

módon írható. Vagyis

$$\overline{V}(t) - \overline{V}(0) = \sum_{k=1}^{n} \int_0^t \frac{\theta_k}{B} dS_k + \int_0^t V d\frac{1}{B}. \tag{5.6}$$

Ugyanakkor, ismételten a parciális integrálás formulája szerint[9]

$$\overline{S}_k \circeq \frac{S_k}{B} = \frac{S_k(0)}{B(0)} + \int_0^t \frac{1}{B} dS_k + \int_0^t S_k d\frac{1}{B}.$$

Ebből az asszociativitási szabály alkalmazásával[10]

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n} \int_0^t \theta_k d\overline{S}_k &\circeq \sum_{k=1}^{n} \int_0^t \theta_k d\frac{S_k}{B} = \sum_{k=1}^{n} \int_0^t \frac{\theta_k}{B} dS_k + \sum_{k=1}^{n} \int_0^t \theta_k S_k d\frac{1}{B} = \\
&= \sum_{k=1}^{n} \int_0^t \frac{\theta_k}{B} dS_k + \int_0^t \sum_{k=1}^{n} \theta_k S_k d\frac{1}{B} = \\
&= \sum_{k=1}^{n} \int_0^t \frac{\theta_k}{B} dS_k + \int_0^t V d\frac{1}{B}.
\end{aligned}$$

Ezt a (5.6) sorral összevetve

$$\overline{V}(t) - \overline{V}(0) = \sum_{k=1}^{n} \int_0^t \theta_k d\overline{S}_k,$$

vagyis a (θ_k) az új ármérce esetén is önfinanszírozó.

Legyen H_T egy tetszőleges a T időszakban esedékes kifizetés. A kérdés továbbra is az: Mit ér ez a jövőbeli kifizetés a $t = 0$ időpontban? Természetesen minden további megfontolás nélkül a kérdés nem válaszolható meg. Ahhoz, hogy valamit mondani tudjunk egy alkalmas közgazdasági feltételt kell szabni. Ez a közgazdasági feltétel a következő: Ha van olyan $(\theta_k)_{k=1}^n$ önfinanszírozó portfolió, amelyre

$$H_T = V(T) \circeq \sum_{k=1}^{n} \theta_k(T) S_k(T) = V(0) + \sum_{k=1}^{n} \int_0^T \theta_k dS_k,$$

akkor a H_T ára a $t = 0$ időpontban éppen

$$\pi(H_T) = V(0).$$

[7] Ezt is csak azért tesszük, hogy a sztochasztikus kalkulus számolási szabályait egy kicsit „gyakoroljuk".
[8] Valójában a B konkrét alakjából csak ezt kell használni.
[9] És természetesen a már említett okok miatt elhagyva a keresztvariációt.
[10] Vegyük észre, hogy az $S_k(0)/B(0)$ konstanst elhagyjuk, ugyanis a d-je nulla.

Vagyis, ha egy követelést replikáltunk egy önfinanszírozó portfolióval, akkor a követelés értéke éppen az önfinanszírozó portfolió kezdőértéke[11]. Természetesen a kérdést evvel nem oldottuk meg, csak átalakítottuk: Hogyan határozható meg a $V(0)$ értéke? Amennyiben az önfinanszírozó portfolióban szereplő integrálok martingálok, akkor a válasz egyszerű:

$$\pi(H_T) = \mathbf{M}(H_T),$$

ugyanis mivel a martingálok szerint vett sztochasztikus integrálok várható értéke nulla[12], ezért

$$\begin{aligned} \mathbf{M}(H_T) &= \mathbf{M}\left(V(0) + \sum_{k=1}^{n} \int_0^T \theta_k dS_k\right) = \\ &= \mathbf{M}(V(0)) = V(0). \end{aligned}$$

A gond csak az, hogy az S_k folyamatok nem martingálok! Ez azonban nem jelent problémát, a Girszanov-formulával[13] ki fogjuk cserélni a mértéket, és az új mérték alatt az $(S_k)_{k=1}^n$ folyamatok már martingálok lesznek, így a gondolatmenet már alkalmazható lesz.

A tárgyalás jobb áttekinthetősége céljából tegyünk fel, hogy csak két eszközünk van: egy kötvényünk és egy részvényünk. Tegyük fel továbbá, hogy ezek időben való mozgását a (5.1) és (5.2) egyenletek írják le. Ekkor az egyenleteket megoldva

$$\begin{aligned} B(t) &= \exp(rt) \\ S(t) &= \exp\left(\left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right)t + \sigma w(t)\right). \end{aligned}$$

Vegyük észre, puszta mértékcserével nem tudjuk a két folyamatot egyszerre martingállá alakítani. A B determinisztikus és így ha $r \neq 0$, akkor nincs olyan mértékcsere, amely mellett martingál lesz! Ezt a gondot azonban az ármérce alkalmas megválasztásával megoldhatjuk. Tegyük fel, hogy az eredeti ármérce helyett a B folyamatot vezetjük be mint ármércét. Ekkor az új ármérce mellett[14]

$$\begin{aligned} \overline{H}_T &= \frac{H_T}{B_T} \\ \overline{B}(t) &= 1 \\ \overline{S}(t) &= \exp\left(\left(\mu - r - \frac{\sigma^2}{2}\right)t + \sigma w(t)\right). \end{aligned}$$

Ebben a felírásban, vagyis az új ármérce esetén, ez első eszköz, a B, amelynek ára az új ármérce mellett $\overline{B} \equiv 1$ már martingál, és ami ennél sokkal fontosabb minden más mérték esetén is martingál marad, ugyanis konstans. Így elegendő a mértéket úgy kicserélni, hogy a második folyamat az $\overline{S}$ is martingál legyen. Vegyük továbbá észre, hogy mivel $B(0) = 1$, ezért $V(0) = \overline{V}(0)$.

De milyen mérték esetén lesz az $\overline{S}$ martingál? Az exponenciális martingálokkal kapcsolatos korábban már látott megfontolásokból tudjuk, hogy ehhez az szükséges, hogy az új $\mathbf{Q}$ mérték esetén alkalmas $\widehat{w}$ Wiener-folyamattal a diszkontált árfolyam

$$\overline{S}(t) = \exp\left(\sigma\widehat{w}(t) - \frac{\sigma^2}{2}t\right)$$

[11] Ugyanis az önfinanszírozás miatt, új pénz az induló időponttól eltekintve nincsen befektetve, így bárki által végrehajtható, aki a kezdő pénz mennyiséggel rendelkezik. A gondolatmenet gyenge pontja nyilván az önfinanszírozás szó értelmezésén és közgazdasági interpretálásán van. Diszkrét időhorizonton az önfinanszírozás közgazdaságilag jól értelmezhető, a folytonos időhorizontra való formális átvitel azonban igencsak kérdéses.

[12] Ez miként tudjuk nem mindig van így, itt lép be a lokális martingálok és a martingálok közötti eltérés, de mint említettük kicsire nem adunk.

[13] Illetve, miként látni fogjuk még az ármércét is cserélni kell!

[14] Általában a felülvonás mindig a diszkontált változóra utal.

alakú legyen. Ilyenkor ugyanis, felhasználva, hogy a $\widehat{w}$ független növekményű

$$\begin{aligned}
\mathbf{M}^{\mathbf{Q}}\left(\overline{S}(t) \mid \mathcal{F}_s\right) \overset{\circ}{=} \mathbf{M}^{\mathbf{Q}}\left(\exp\left(\sigma\widehat{w}(t)-\frac{\sigma^2 t}{2}\right) \mid \mathcal{F}_s\right) = \\
= \exp\left(-\frac{\sigma^2 t}{2}\right)\mathbf{M}^{\mathbf{Q}}\left(\exp\left(\sigma\widehat{w}(t)\right) \mid \mathcal{F}_s\right) = \\
= \exp\left(-\frac{\sigma^2 t}{2}\right)\mathbf{M}^{\mathbf{Q}}\left(\exp\left(\sigma\left(\widehat{w}(t)-\widehat{w}(s)\right)\right)\exp\left(\sigma\widehat{w}(s)\right) \mid \mathcal{F}_s\right) = \\
= \exp\left(-\frac{\sigma^2 t}{2}\right)\exp\left(\sigma\widehat{w}(s)\right)\mathbf{M}^{\mathbf{Q}}\left(\exp\left(\sigma\left(\widehat{w}(t)-\widehat{w}(s)\right)\right) \mid \mathcal{F}_s\right) = \\
= \exp\left(-\frac{\sigma^2 t}{2}\right)\exp\left(\sigma\widehat{w}(s)\right)\mathbf{M}^{\mathbf{Q}}\left(\exp\left(\sigma\left(\widehat{w}(t)-\widehat{w}(s)\right)\right)\right) = \\
= \exp\left(-\frac{\sigma^2 t}{2}\right)\exp\left(\sigma\widehat{w}(s)\right)\mathbf{M}^{\mathbf{Q}}\left(\exp\left(N\left(0,\sigma\sqrt{t-s}\right)\right)\right) = \\
= \exp\left(-\frac{\sigma^2 t}{2}\right)\exp\left(\sigma\widehat{w}(s)\right)\exp\left(\frac{\sigma^2(t-s)}{2}\right) = \\
= \exp\left(\sigma\widehat{w}(s)-\frac{\sigma^2 s}{2}\right) \overset{\circ}{=} \overline{S}(s).
\end{aligned}$$

Másképpen olyan mértéket kell választanunk, amely mellett a

$$\frac{\mu-r}{\sigma}t+w(t) \overset{\circ}{=} \widehat{w}(t)$$

folyamat Wiener-folyamat. Ezt meg is tehetjük. Ehhez elegendő a Girszanov-formulát a

$$\theta \overset{\circ}{=} -\frac{\mu-r}{\sigma} = \frac{r-\mu}{\sigma}$$

konstans esetén alkalmazni. Az így kapott mértéket $\mathbf{Q}$-val jelölve

$$\boldsymbol{\pi}(H_T) = \mathbf{M}^{\mathbf{Q}}\left(\overline{H_T}\right) \overset{\circ}{=} \mathbf{M}^{\mathbf{Q}}\left(\frac{H_T}{B(T)}\right).$$

De mit is jelent ez? Milyen alakuak lesznek a mértékcsere után az egyes folyamatok? A B determinisztikus így a mértékcssre során semmilyen formában nem változik, így a B-re vonatkozó egyenlet a mértékcsere után is

$$dB = \exp(rt)\,dt$$

marad. A Girszanov-formula miatt a

$$w(t) = \widehat{w}(t)+\theta t = \widehat{w}(t)-\frac{\mu-r}{\sigma}t.$$

Amit beírva

$$\begin{aligned}
S(t) &= \exp\left(\left(\mu-\frac{\sigma^2}{2}\right)t+\sigma w(t)\right) = \\
&= \exp\left(\left(\mu-\frac{\sigma^2}{2}\right)t+\sigma\left(\widehat{w}(t)-\frac{\mu-r}{\sigma}t\right)\right) = \\
&= \exp\left(\left(r-\frac{\sigma^2}{2}\right)t+\sigma\widehat{w}(t)\right).
\end{aligned}$$

Vagyis a mértékcsere után az μ helyébe r kerül a w helyébe pedig $\widehat{w}$. Az új mérték alatt a μ eltűnt! Másképpen a mértékcserével kapott új $\mathbf{Q}$ mérték esetén az S kielégíti a

$$dS = rSdt + \sigma Sd\widehat{w}$$

egyenletet. Ezt úgy is fogalmazhatjuk, hogy a mértékcserével explicite módon megkonstruáltunk egy olyan Wiener-folyamatot és egy olyan valószínűségi mezőt, amelyek segítségével az előző alfejezetben szereplő X folyamat felírható. Ebben a felírásban $S = X$.

5.1.3. A nincsen arbitrázs elv

A formula levezetésekor némiképpen homályosan fogalmaztunk. Ebben az alpontban az alkalmazott gondolatmenetet pontosítjuk.

5.2 Definíció.
Azt mondjuk, hogy a $(\theta_k)_{k=1}^n$ önfinanszírozó portfolió súlyok arbitrázst alkotnak, ha $(\theta_k)_{k=1}^n$ súlyokkal képzett V értékfolyamatra $V(0) = 0$ és van olyan T, hogy minden kimenetelre $V(T) \geq 0$ és egy pozitív valószínűséggel rendelkező halmazon a $V(T)$ pozitív[15].

Az arbitrázs közgazdasági interpretációja a következő: mivel a $(\theta_k)_{k=1}^n$ súlyok önfinanszírozóak, ezért a kezdeti $V(0) = 0$ értékből a $(\theta_k)_{k=1}^n$ stratégiát megjátszva a T időpontban pozitív valószínűséggel nyereséget lehet csinálni anélkül, hogy a veszteség lehetőségével számolni kellene. Ha van mód arbitrázsra, akkor a piac nem működhet tökéletesen, ami ellentmond a piac tökéletességéről szóló kiinduló közgazdasági alapfeltételnek. Az árazási formula levezetése arra alapult, hogy feltettük, hogy a piacon nem lehet arbitrázs. Az arbitrázs mentesség követelménye miatt a H_T kifizetést replikáló önfinanszírozó portfolió létezése esetén az ár csak a $V(0)$ lehet, ugyanis ellenkező esetben triviálisan lenne arbitrázs.

5.1.4. A piac teljessége, az integrálreprezentációs tétel

Vegyük észre, hogy a gondolatmenet még mindig nem tökéletes, ugyanis nem tudjuk, hogy miért létezik a H_T követelést előállító önfinanszírozó portfolió? A válasz kulcsa a következő állítás, amelyet szokás Itô-féle *integrálreprezentációs* tételnek is nevezni:

5.3 Állítás. (Integrálreprezentáció)
Tegyük fel, hogy a modellben a véletlent valamilyen w Wiener-folyamat definiálja. Ha a T időpontban megfigyelhető ξ_T valószínűségi változónak létezik szórása, akkor található, mégpedig egyetlen olyan X folyamat amelyre

$$\xi_T = \mathbf{M}(\xi_T) + \int_0^T X dw.$$

Az X folyamat olyan, hogy az előállításban szereplő sztochasztikus integrál valódi martingál.

Az integrálreprezentációs tétel szigorúan a Wiener-folyamatokhoz kötött tulajdonság. Nagyon fontos megkötés, hogy a T időpontban elvileg megfigyelhető események által definiált $\mathcal{F}_T$ valószínűségi mező egy Wiener-folyamat megfigyeléseiből származik[16]. Általában martingálok esetén a reprezentációs tulajdonság nem teljesül, vagyis ha a véletlen tényező pusztán egy martingál, akkor a T időpontban megfigyelhető változók nem feltétlenül írhatók fel várható érték plusz sztochasztikus integrál alakban. Vagyis ha a véletlen faktor egy absztrakt martingál, akkor a lehetséges származtatott termékek nem feltétlenül fedezhetők önfinanszírozó portfoliókkal. Ebből következően a Black–Scholes típusú modellezésből a Wiener-folyamat nem hagyható ki.

5.4 Példa.
Opciók árazása és az Itô-féle integrálreprezentációs tétel.

Vegyük például a call opció kifizetési függvényét, vagyis legyen

$$H_T = \max(0, S(T) - K).$$

[15] A definíció nem tökéletes, ugyanis nem zárja ki a duplázó stratégiát amely a végtelen sok lehetséges t időpont miatt előfordulhat. Éppen ezért folytonos időhorizont esetén az arbitrázs definíciójában fel szokás tenni, hogy az értékfolyamat alulról korlátos, ahol az alsó korlát közgazdaságilag a kereskedést megvalósító személy vagyona, illetve teljes hitelkerete.

[16] A techikai kifejezés az, hogy a ξ mérhető legyen a Wiener-folyamat által generált filtrációra nézve.

Természetesen az árazást tekinthetjük a B ármérce mellett, ekkor az önfinanszírozó portfólió létezésével kapcsolatos kérdés az, hogy van-e olyan (ψ, θ) portfólió, amelyre

$$\begin{aligned}\frac{H_T}{B(T)} &= \overline{V}(0) + \int_0^T \psi d\overline{B} + \int_0^T \theta d\overline{S} = \\ &= \overline{V}(0) + \int_0^T \theta d\overline{S}?\end{aligned}$$

Vegyük észre, hogy közvetlenül az Itô-féle integrálreprezentációs tétel nem alkalmazható, ugyanis most a T időszakban esedékes követelést az $\overline{S}$ folyamattal kell előállítani, és nem egy Wiener-folyamattal, miként az a tételben szerepel. Ez azonban könnyen orvosolható. A kockázatsemleges mérték mellett

$$d\overline{S} = \sigma\overline{S}d\widehat{w}, \tag{5.7}$$

ugyanis az r a diszkontálással eltüntethető ugyanis ha

$$S(t) = \exp\left(\left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right)t + \sigma\widehat{w}(t)\right)$$

akkor

$$\overline{S}(t) = \frac{S(t)}{\exp(rt)} = \exp\left(-\frac{\sigma^2}{2}t + \sigma\widehat{w}(t)\right),$$

vagyis

$$\overline{S}(t) = \exp\left(\sigma\widehat{w}(t) - \frac{\sigma^2 t}{2}\right),$$

ami az Itô-formula miatt éppen az említett (5.7) egyenlet megoldása. Ezt beírva, az asszociativitási szabály szerint

$$\int_0^T \theta d\overline{S} = \int_0^T \sigma\theta\overline{S}d\widehat{w},$$

ahol a $\widehat{w}$ már Wiener-folyamat. Így alkalmas Y folyamattal, ha

$$\theta \circeq \frac{Y}{\sigma\overline{S}},$$

akkor

$$\frac{H_T}{B(T)} = \overline{V}(0) + \int_0^T Y d\widehat{w} = \int_0^T \theta\sigma\overline{S}d\widehat{w} = \int_0^T \theta d\overline{S}.$$

Ahhoz, hogy a reprezentációs tételt alkalmazni tudjuk, elég azt megjegyezni, hogy a lognormális eloszlásnak van szórása, így az $S(T)$-nek van szórása, így triviálisan a $\overline{H}_T$ változónak is van szórása. A gondolatmenet minden olyan opcióra alkalmazható, amelynek létezik a második momentuma a kockázatsemleges mérték mellett.

$\square$

A piac teljessége nélkül az árazás problémája még a nincsen arbitrázs elv teljesülése esetén sem oldható meg. A dolgok megértéséhez egy kicsit vissza kell mennünk az alapokhoz. Mi határozza meg az árakat és persze az árakon keresztül a jövedelmeket és végső soron az egész gazdaság szerkezetét? A közgazdaságtan válasza igen egyszerű: a kereslet és a kínálat[17]. A válasz nem kétséges, hogy helyes, de van vele egy alapvető probléma: Semmitmondó. A gond az, hogy egy tudományos elméletet végső soron csak mérhető, adatokkal alátámasztható fogalmakra lehet építeni. A kereslet és a kínálat azonban, szemben az árral, általában közvetlenül nem figyelhető meg. Mind a kettő a gazdasági szereplők szándékait és vágyait tükrözi. Ezek a vágyak azonban nem jelennek meg mérhető formában. Csak a szereplők fejében léteznek. E miatt két kérdés merül fel: miként mérjük a kereslet és a kínálat nagyságát, illetve milyen ugyancsak mérhető fogalmak

[17] Persze, ha sok a hús a hentes köszön előre, ha kevés akkor a vevő.

határozzák meg a keresletet és a kínálatot. Minden tőzsde egy szervezett piac, amely pontosan azért jött létre, hogy a keresletet és a kínálatot átlátható és dokumentálható, és így végső soron mérhető módon megjelenítse. Éppen ezért a tőzsdei folyamatok megértése lényegében az absztrakt közgazdasági piacfogalom viselkedésének megértését jelenti, és így minden tőzsde, végső soron, a közgazdaságtan alapfelvetéseinek laboratóriumi modellje. A tőzsdék és általában a pénzügyi világ az a laboratórium, ahol a közgazdasági elméletek, természettudományos értelemben, megfigyelhetőek. Sokszor elhangzó érv, hogy a közgazdaságtan nem rendelkezik adatokkal, vagy hogy nincsen mód kísérletekre, vagy a környezeti feltételek alkalmas beállítására stb. Ebben van igazság, de számos természettudományos terület a pénzügyeknél jóval kevesebb adattal és sokkal korlátozottabb kísérleti lehetőséggel bír. Nem véletlen, hogy a tőzsdei rendszerek vizsgálata a fizikusok és a matematikusok számára teljesen elfogadott terület, amely tudományos jellegét elvi, filozófiai alapon senki sem kérdőjelezte meg. Sőt. A pénzügyi matematika célja tehát pontosan az, ami a mikoökonómia célja: megmagyarázni az árak alakulását. Az egyetlen különbség csak az, hogy ezt nem papíron, hanem az absztrakció egy jóval alacsonyabb szintjén, szinte már a rögvalósághoz közelálló praktikum szintjén próbálja megtenni. Ez akkor is igaz, ha a matematikai modell, a köntös, amibe a pénzügyi elméletet felöltöztetjük, jóval bonyolultabb mint a két egymást keresztező egyenes vonal mikroökonómiai modellje. A bonyolult sztochasztikus modellek csak mint praktikus, közelítő modellek foghatók fel, ahol a modellezést egyetlen szempont hajtotta: a tevékenység kézzelfogható végeredménye. Pénzt akarunk keresni, pontosabban sok pénzt akarunk keresni[18]. A matematikai pénzügyeken nem kérhető számon a nyilvánvalóan lényegi kérdés: Van-e olyan értékteremtési folyamat, ami indokolja ezt? A pénzügyi elmélet minden gondolata a szokványos közgazdasági gondolkodás része. Csak a valóság könnyű megragadhatósága, a vizsgált rendszerek pontosan definiált szabályai, és az ebből értelemszerűen következő nagyfokú számszerűsíthetőség emeli ki a pénzügyi elméletet a szokásos közgazdasági modellek köréből, amelyek esetén sem az adatbőség, sem a közvetlen megfigyelhetőség, sem az egyszerűség luxusa nem adott[19].

A pénzügyi termékeket két csoportba oszthatjuk: Vannak alaptermékek és vannak származtatott termékek. Az alaptermékek viselkedését nagyrészt statisztikai úton lehet feltérképezni[20]. Az alaptermék, származtatott termék megkülönböztetésről érdemes úgy gondolkodni, ahogyan az elemi lineáris algebra leírja a véges dimenziós vektorterek elemeit. Vannak vektorok a bázisban és vannak vektorok a bázison kívül. A bázisban levő termékek az alaptermékek, a bázison kívül levő termékek a származtatott termékek. Mivel a bázisból a vektorok ki-be vihetők, ezért az alaptermék származtatott termék megkülönböztetés viszonylagos. A bázison kívül levő vektorok a bázisvektorok lineáris kombinációi. Vagyis a koordinátáik által tökéletesen determináltak. Ha tudjuk a koordinátáikat mindent tudunk róluk. Például ha tudjuk az alaptermékek árát, akkor tudjuk, hogy mibe kerülnek a származtatott termékek. Egyszerűen venni kell az alaptermékek árának koordinátákkal súlyozott összegét. Ezért is hívják az elméletet ketchup elméletnek. Ha az egy literes ketchup ára 100 forint, akkor a két literes ára 200 forint[21]. Miért? Hát az ellenkező esetben létrejövő arbitrázs lehetőség miatt. Ha ugyanis nem így lenne, akkor a drágábbat eladva, az olcsóbbat megvéve és az ingyenes átcsomagolás lehetőségét kihasználva kockázat nélkül pénzt kereshetnénk. Az arbitrázs elmélet lényege, hogy a származtatott termékek ára az alaptermékek árának lineáris kombinációja[22]. Másképpen fogalmazva az arbitrázselmélet szerint a pénzügyek

[18]Vagyis maximalizálni akarjuk a hasznossági függvényünket az adott korlátok között.

[19]És tegyük hozzá, éppen ez a pénzügyi folyamatok hozzáadott értéke: olyan tükör, amely bár homályos, de mégis valamit visszatükröz. A jelenség, amely a lényeget takarja és megjeleníti egyidejűleg. A társadalomtudományok mindegyike egy súlyos lelki betegségtől szenved: a fizika iránti féltékenységtől. A pénzügyi matematika korlátai a társadalomtudományok korlátai. Ha a pénzügyi matematikának nem sikerült, akkor senkinek sem fog sikerülni. A pénzügyi matematika jutott a társadalomtudományok közül a legközelebb a természettudományokhoz. Úgy látszik azonban, hogy a tükrön levő homály nagyobb mint gondoltuk. (És tegyük hozzá, hála istennek.)

[20]Alaptermméknek azokat a termékeket szokás tekinteni, amelynek önálló, más termékektől független piaca van. Mivel a különböző termékek piaca nagyon nehezen különíthető el, ezért az alaptermék fogalma távolról sem olyan egyszerű, mint gondolnánk.

[21]Ebben a példában az egy literes a bázisban van, vagyis alaptermék, a két literes a származtatott termék és a lineáris függést megadó koordináta éppen kettő.

[22]Természetesen a bonyolultabb műveletekre mint például a szorzás a dolog már nem működik. Vagyis például az alaptermék négyzetének az ára nem az ár négyzete. Éppen arról szól a származtatott termékek elmélete, hogy ilyenkor mit kell tenni, hogyan kell meghatározni a nem lineáris transzformációkkal létrehozott termékek árát.

lényege, hogy a termékek között egyrészt redundacia van, másrészt a pénzügyi összefüggések a lineáris algebra és a konvex analízis szabályai szerint alakulnak[23]. Mindenki számára nyilvánvaló, hogy ez nincsen így. Vannak tranzakciós költségek, oszthatatlanságok stb. De miként említettük a tőzsde egy laboratórium, egy olyan mesterségesen létrehozott piac, ahol a kísérleti feltételeket úgy állítottuk be, hogy lényegében költség nélkül az egyébként oszthatatlan atomerőmű akár tizenkét és fél százalékát is meg lehet venni.

A származtatott termékek fogalma, elmélete és gyakorlati használhatósága arra az igencsak megkérdőjelezhető[24] koncepcióra épül, hogy a piacon megfigyelhető termékek között redundancia van, és jórészt a pénzügyi matematikai eszköztár ennek a redundanciának a feltérképezését és kihasználását kívánja megvalósítani. Ahhoz, hogy bizonyos vektorok között redundancia legyen sok vektor kell és alacsony dimenzió. Vagyis sok termék és a termékekhez képest kevés mögöttes faktor, tényező, amely a bizonytalanságért, a termékek változékonyságáért felelős. A redundancai lehetősége egyáltalában nem nyilvánvaló, ha a vektorokat hordozó vektortér dimenziója nagy, pláne nem, ha a tér dimenziója végtelen. A pénzügyek egyik alapvető feltevése, hogy a pénzügyi termékek, szemben az imént vázolt lineáris algebrai modellel, nem egy véges dimenziós vektortér vektorai, hanem egy végtelen dimenziós vektortérben vannak, ugyanis az értékük valószínűségi változó. Végtelen dimenziós vektorterekben a lineáris kombináció nem igazán használható fogalom. Sem a koordináta fogalma, sem az előállíthatóság és így a redundancia fogalma ténylegesen nem kézenfekvő. Az nyilvánvaló, hogy hogyan kell árazni az alaptermékek véges lineáris kombinációit, különösen akkor, ha a bázisvektorok száma igen alacsony, és ezért a kapcsolat közvetlenül áttekinthető. De hogyan kell árazni egy végtelen sor összegét? Intuitíve a válasz nem triviális. Különösen azért nem, mert nem tudjuk, hogy milyen módon kell értenünk a konvergenciát? Mikor mondjuk, hogy az alaptermékek közelítő összege közel van a származtatott termékhez pénzügyi értelemben. Ha a szórásuk közel azonos? Ha az információ tartalmuk közel azonos? Bizonyos egyszerűbb szituációkban az alaptermék-származtatott termék előállítás igen kézenfekvő és átlátható, de például az opciók esetén a közvetlen előállíthatóság egyszerű koncepciója nem működik. A Black–Scholes féle megközelítésben az előállíthatóságot, a dinamikus replikálást, a matematikai modell definiálja és az integrálreprezentációs tétel biztosítja. Vagyis a replikálhatóság nagyrészt a matematikai modell speciális tulajdonságainak következménye, és nem egy a piaci szereplők által megérzett, kitalált, feltárt összefüggés matematikai tükörképe. Replikálhatóság fogalmát azért vezeti be a pénzügyi elmélet, hogy meg tudja kerülni a hasznossági függvényekre való közvetlen hivatkozást, miközben a piaci szereplőket valójában a megfigyelhetetlen hasznossági függvényeik motiválják.

Gyakran felmerül a kérdés, hogy az újabb pénzügyi eszközök bevezetése, a pénzügyi innováció, miként érinti a valóságos piacok teljességet. Ha újabb terméket vezetünk be, akkor a piac teljesebb lesz vagy sem? A válasz természetesen az, hogy nem. Ennek oka, hogy a valós piacok eredendően végtelen dimenziósak[25]. Végtelen dimenziós vektortér esetén nincsen értelme teljes és kevésbé teljes piacokról beszélni, véges számú termékkel csak egy véges dimenziós alteret lehet kifeszíteni és függetlenül attól, hogy hány dimenziós az altér, a komplementere mindig végtelen dimenziós marad.

Mi történik akkor, ha a modellben szereplő véletlent megadó folyamatosztályra nem teljesül az integrálreprezentációs tulajdonság. Ilyenkor valamely H_T követelés esetleg nem lesz replikálható egy önfinanszírozó portfolióval, így a bemutatott megközelítés nem lesz használható. Ilyenkor

[23] Némiképpen leegyszerűsítve a származtatott termékek árazása lényegében lineáris egyenletrendszerek megoldása. Valahol valóban erről van szó, miközben a matematikai alapmodellt a végtelenségig bonyolítottuk és ezért az „anyja sem ismer rá”.

[24] A redundancia azért kérdőjelezhető meg, mert a legtöbb formailag származtatott termék, önálló piaccal rendelkezik, és ezt a piacot a származtatott termék alaptermékétől független erők is mozgatják. Vagyis nagyon gyakran, miközben két termék elméletileg redundáns, számos okból a piaci szereplők, legalábbis bizonyos korlátok között, mégis önálló termékként kezelik őket. Ennek oka, hogy a származtatott termékek kockázatát valójában nem tudják az elmélet által leírt módon kiküszöbölni.

[25] A valóság mindig végtelen dimenziós. Csak az emberi elme készít a valóságról véges dimenziós modelleket. A valós személyre a nagy felbontású digitális fénykép hasonlít, vagy esetleg nagyon hasonlít. A kép számos fontos és lényegtelen részletet tartalmaz, de hát nem azonos az eredeti személlyel.

az ár meghatározásához, még a modell szintjén is, szükséges a hasznossági függvények explicit vagy implicit megadása, a részvények pénzügyi és egyéb hátterének ismerete, a monetáris politika ismerete, és minden más, amit a közgadasági elmélet az áralakulás kapcsán megemlít.

5.2. Többdimenziós eszközárazás

Ezidáig csak az egyváltozós esettel foglalkoztunk. Tegyük fel, hogy nem egy, hanem két eszközünk van, amelyek áralakulását a

$$\begin{aligned} dS_1 &= \mu_1 S_1 dt + \sigma_1 S_1 dw_1 \\ dS_2 &= \mu_2 S_2 dt + \sigma_2 S_2 dw_2 \end{aligned}$$

egyenletek írnak le. Feltesszük, hogy a w_1 és a w_2 Wiener-folyamatok korreláltak, vagyis minden t esetén a $w_1(t)$ és a $w_2(t)$ valószínűség változók korrelációja ρ. Ebből következően a kvadratikus keresztvariáció nem nulla, mint a független esetben, hanem

$$\langle w_1, w_2 \rangle (t) = \rho t.$$

A lehetséges származtatott termékek köre például lehet a $(\max(S_1, S) - X)^+$, vagyis egy call opció az S_1 és S_2 közül a drágábbra, vagy hasonlóan vehetjük például a $(\min(S_1, S) - X)^+$ opciót is.

Az árazáshoz hasonlóan kell eljárni mint az egyváltozós esetben. Jelölje $V(S_1, S_2, t)$ a származtatott termék árát a t időpontban. A fedező portfolió legyen

$$\pi \mathrel{\hat{=}} V - \Delta_1 S_1 - \Delta_2 S_2,$$

ahol Δ_1 és Δ_2 a dinamikus fedezéshez használt konstansok nagysága. A többdimenziós Itô-formula szerint

$$\begin{aligned} dV &= \left(\frac{\partial V}{\partial t} + \frac{1}{2}\sigma_1^2 S_1^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S_1^2} + \rho\sigma_1\sigma_2 S_1 S_2 \frac{\partial^2 V}{\partial S_1 \partial S_2} + \frac{1}{2}\sigma_2^2 S_2^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S_2^2} \right) dt + \\ &\quad + \frac{\partial V}{\partial S_1} dS_1 + \frac{\partial V}{\partial S_2} dS_2. \end{aligned}$$

Természetesen a

$$\Delta_1 = \frac{\partial V}{\partial S_1}, \Delta_2 = \frac{\partial V}{\partial S_2}$$

választással a dS_1 és dS_2 tagok kiesnek, így a π portfolióban nem lesz Wiener-folyamat, így a hozama r lesz.

$$d\pi = r\pi = r\left(V - \frac{\partial V}{\partial S_1} S_1 - \frac{\partial V}{\partial S_2} S_2\right).$$

Következésképpen az egyenlet éppen

$$\begin{gathered} \frac{\partial V}{\partial t} + \frac{1}{2}\sigma_1^2 S_1^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S_1^2} + \rho\sigma_1\sigma_2 S_1 S_2 \frac{\partial^2 V}{\partial S_1 \partial S_2} + \frac{1}{2}\sigma_2^2 S_2^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S_2^2} + \\ + r\frac{\partial V}{\partial S_1} S_1 + r\frac{\partial V}{\partial S_2} S_2 = rV \end{gathered}$$

lesz. Ha az S_1 és S_2 részvények q_1 és q_2 folytonos osztalékrátával rendelkeznek, akkor az egyenlet

$$\begin{gathered} \frac{\partial V}{\partial t} + \frac{1}{2}\sigma_1^2 S_1^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S_1^2} + \rho\sigma_1\sigma_2 S_1 S_2 \frac{\partial^2 V}{\partial S_1 \partial S_2} + \frac{1}{2}\sigma_2^2 S_2^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S_2^2} + \\ + (r - q_1) \frac{\partial V}{\partial S_1} S_1 + (r - q_2) \frac{\partial V}{\partial S_2} S_2 = rV \end{gathered}$$

lesz, ugyanis ilyenkor a fedező egyenletben az S_i helyébe $S_i(t) \exp(-q_i t)$ írandó.

Az egyenlet megoldása azonosan történik, mint korábban, egyedül egyszeres integrálok helyett többszörös integrálokat kell kiszámolni.

5.5 Példa.
Részvénycsere árazása.

Bizonyos esetekben azonban a többszörös integrálok használata elkerülhető. Példaként tekintsük a $V(S_1, S_2, T) = (S_1 - S_2)^+$ kifizetést. A kifizető függvény fontos tulajdonsága, hogy

$$V(S_1, S_2, T) = (S_1 - S_2)^+ = S_2\left(\frac{S_1}{S_2} - 1\right)^+$$

módon írható. Ennek alapján a V függvényt

$$V = S_2 H(Z, t)$$

alakban keressük, ahol $Z \triangleq S_1/S_2$. Írjuk fel a parciális deriváltakat a H segítségével. Az első rendű deriváltak

$$\begin{aligned}
\frac{\partial V}{\partial S_1} &= S_2 \frac{\partial H}{\partial Z}\frac{1}{S_2} = \frac{\partial H}{\partial Z}, \\
\frac{\partial V}{\partial S_2} &= H + S_2 \frac{\partial H}{\partial Z}\left(-\frac{S_1}{S_2^2}\right) = H - Z\frac{\partial H}{\partial Z}, \\
\frac{\partial V}{\partial t} &= S_2 \frac{\partial H}{\partial t}.
\end{aligned}$$

A másodrendűek

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 V}{\partial S_1^2} &= \frac{\partial^2 H}{\partial Z^2}\frac{1}{S_2} \\
\frac{\partial^2 V}{\partial S_2^2} &= \frac{\partial H}{\partial Z}\left(-\frac{S_1}{S_2^2}\right) - \frac{\partial H}{\partial Z}\left(-\frac{S_1}{S_2^2}\right) + Z\frac{\partial^2 H}{\partial Z^2}\left(\frac{S_1}{S_2^2}\right) = \\
&= \frac{Z^2}{S_2}\frac{\partial^2 H}{\partial Z^2} \\
\frac{\partial^2 V}{\partial S_1 \partial S_2} &= \frac{\partial^2 H}{\partial Z^2}\left(-\frac{S_1}{S_2^2}\right).
\end{aligned}$$

Ezt beírva az eredeti egyenletbe

$$\begin{aligned}
S_2\frac{\partial H}{\partial t} + \frac{1}{2}\sigma_1^2 S_1^2 \frac{\partial^2 H}{\partial Z^2}\frac{1}{S_2} + \rho\sigma_1\sigma_2 S_1 S_2 \frac{\partial^2 H}{\partial Z^2}\left(-\frac{S_1}{S_2^2}\right) + \frac{1}{2}\sigma_2^2 S_2^2 \frac{Z^2}{S_2}\frac{\partial^2 H}{\partial Z^2} + \\
+ (r - q_1)\frac{\partial H}{\partial Z} S_1 + (r - q_2)\left(H - Z\frac{\partial H}{\partial Z}\right) S_2 = rV
\end{aligned}$$

Majd S_2-vel osztva

$$\begin{aligned}
\frac{\partial H}{\partial t} + \frac{1}{2}\sigma_1^2 \frac{S_1^2}{S_2^2}\frac{\partial^2 H}{\partial Z^2} - \rho\sigma_1\sigma_2 \frac{S_1^2}{S_2^2}\frac{\partial^2 H}{\partial Z^2} + \frac{1}{2}\sigma_2^2 Z^2 \frac{\partial^2 H}{\partial Z^2} + \\
+ (r - q_1)\frac{\partial H}{\partial Z}\frac{S_1}{S_2} + (r - q_2)\left(H - Z\frac{\partial H}{\partial Z}\right) = rH
\end{aligned}$$

amely

$$\begin{aligned}
\frac{\partial H}{\partial t} + \frac{1}{2}\sigma_1^2 Z^2 \frac{\partial^2 H}{\partial Z^2} - \rho\sigma_1\sigma_2 Z^2 \frac{\partial^2 H}{\partial Z^2} + \frac{1}{2}\sigma_2^2 Z^2 \frac{\partial^2 H}{\partial Z^2} + \\
+ (r - q_1)\frac{\partial H}{\partial Z} Z - (r - q_2) Z\frac{\partial H}{\partial Z} = q_2 H
\end{aligned}$$

Tehát

$$\frac{\partial H}{\partial t} + \left(\frac{1}{2}\sigma_1^2 - \rho\sigma_1\sigma_2 + \frac{1}{2}\sigma_2^2\right) Z^2 \frac{\partial^2 H}{\partial Z^2} + (q_2 - q_1) Z\frac{\partial H}{\partial Z} = q_2 H$$

alakra egyszerűsödik. Ha bevezetjük a

$$\sigma' \circeq \sqrt{\sigma_1^2 - 2\rho\sigma_1\sigma_2 + \sigma_2^2}$$

konstanst, akkor egy közönséges Black–Scholes típusú egyenletet kapunk, amelyet már a szokásos módon árazhatunk be[26].

□

A többdimenziós árazási formula egy fontos esete a quantok árazása. A quantok olyan származtatott termékek, amelyek értékét egy másik devizában, mondjuk dollárban kell kifizeni. Legyen az alapul vett forint termék egyenlete

$$dS = \mu S dt + \sigma S dw,$$

a dollár árfolyama legyen

$$dS_d = \mu_d S_d dt + \sigma_d S_d dw_d.$$

Mivel az S forintban van, ezért az S_d mértékegysége dollár/forint. Ismét tegyük fel, hogy a két Wiener-folyamat korrelációs együtthatója ρ. A fedezésre az alapterméket, az alaptermék devizáját és a származtatott terméket használjuk. A portfolió most

$$\pi \circeq V - \Delta_d \cdot S_d - \Delta \cdot S \cdot S_d.$$

Vegyük észre, hogy az egyenletben mind a három kifejezés dollárban kell hogy legyen[27]. Ehhez a Δ-nak nem szabad, hogy legyen mértékegysége, ugyanis az SS_d szorzat már dollár. A Δ_d mértékegysége forint[28], ugyanis az S_d mértékegysége dollár/forint. Vegyük ugyancsak észre, hogy az S_d nem kereskedett mennyiség, ezért közvetlenül a π portfolióban nem is használható. Ugyanakkor a $\Lambda_d S_d$ mennyiségű dollár már kereskedésben használható termék.

A $d\pi$ egyenlete

$$\begin{aligned} d\pi &= \left(\frac{\partial V}{\partial t} + \frac{1}{2}\sigma_d^2 S_d^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S_d^2} + \rho\sigma_d\sigma S_d S \frac{\partial^2 V}{\partial S_d \partial S} + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2}\right) dt + \\ &\quad + \frac{\partial V}{\partial S_d} dS_d + \frac{\partial V}{\partial S} dS - \\ &\quad - \Delta_d dS_d - \Delta_d S_d r_{ft} dt - \\ &\quad - \Delta S_d dS - \Delta S dS_d - \rho\sigma\sigma_d \Delta S S_d dt. \end{aligned}$$

Az egyenlet levezetéséhez először is vegyük figyelembe a

$$dXY = XdY + YdX + d\langle X, Y\rangle$$

parciális integrálási szabályt[29], illetve az

$$\langle S, S_d\rangle = \langle \sigma S dw, \sigma_d S_d dw_d\rangle = \sigma\sigma_d S S_d \langle dw_d, dw\rangle = \sigma\sigma_d S S_d \rho dt$$

szabályt, amelyek alapján az utolsó sor már nyilvánvaló. Az előtte levő sor megértéséhez azt kell figyelembe venni, hogy a Δ_d valójában forintban adott, vagyis egy a fedezéshez használt forint összeg, így az egyenlete[30]

$$d\Delta_d = r_{ft}\Delta_d dt.$$

[26]Persze a peremfeltétel $(z-1)^+$ lesz.
[27]Ugyanis a V dollárban van.
[28]Illetve írhatnánk $\Delta_d \cdot S_d \cdot B_{ft}$-t is ahol a B_{ft} az r_{ft} kamatlábbal növekvő kockázatmentes forint kötvény.
[29]Amely a többdimenziós Itô-formula speciális esete.
[30]Illetve, ha a Δ_d nem rendelkezik mértékegyéggel, akkor a $d(\Delta_d B_{ft}) = \Delta_d dB_{ft} = r_{ft}\Delta_d B_{ft} dt$ egyenletet kell használni.

Mivel ez a dt miatt korlátos változású, a keresztvariáció a parciális integrálás formulájában nulla. Az összevonás után a dS és a dS_d együtthatója rendre

$$\frac{\partial V}{\partial S} - \Delta \cdot S_d,$$
$$\frac{\partial V}{\partial S_d} - \Delta_d - \Delta \cdot S.$$

Ebből

$$\Delta = \frac{1}{S_d}\frac{\partial V}{\partial S}, \quad \Delta_d = \frac{\partial V}{\partial S_d} - \Delta \cdot S = \frac{\partial V}{\partial S_d} - \frac{S}{S_d}\frac{\partial V}{\partial S}.$$

Ezt visszahelyettesítve és figyelembe véve, hogy a dollárban felírt kockázatmentes portfolió hozama r így

$$\begin{aligned} d\pi &= r\left(V - \Delta_d S_d - \Delta S S_d\right) dt = \\ &= r\left(V - \left(\frac{\partial V}{\partial S_d} - \frac{S}{S_d}\frac{\partial V}{\partial S}\right) S_d - \frac{1}{S_d}\frac{\partial V}{\partial S} S S_d\right) dt = \\ &= r\left(V - \left(\frac{\partial V}{\partial S_d} S_d - S\frac{\partial V}{\partial S}\right) - \frac{\partial V}{\partial S} S\right) dt = \\ &= r\left(V - \frac{\partial V}{\partial S_d} S_d\right) dt. \end{aligned}$$

Ezt és a további dt-és tagokat beírva, majd a dt-vel osztva

$$\begin{gathered} \frac{\partial V}{\partial t} + \frac{1}{2}\sigma_d^2 S_d^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S_d^2} + \rho\sigma_d\sigma S_d S \frac{\partial^2 V}{\partial S_d \partial S} + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} + \\ + \frac{\partial V}{\partial S_d} r S_d - \\ - \left(\frac{\partial V}{\partial S_d} - \frac{S}{S_d}\frac{\partial V}{\partial S}\right) S_d r_{ft} - \\ -\rho_d \sigma\sigma_d \frac{1}{S_d}\frac{\partial V}{\partial S} S S_d = rV. \end{gathered}$$

Ezt tovább rendezve

$$\begin{gathered} \frac{\partial V}{\partial t} + \frac{1}{2}\sigma_d^2 S_d^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S_d^2} + \rho\sigma_d\sigma S_d S \frac{\partial^2 V}{\partial S_d \partial S} + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} + \\ + \left(r - r_{ft}\right) S_d \frac{\partial V}{\partial S_d} + \\ \left(r_{ft} - \rho\sigma\sigma_d\right) S \frac{\partial V}{\partial S} = rV. \end{gathered}$$

Vegyük észre, hogy ez éppen a

$$\begin{aligned} dS_d &= \left(r - r_{ft}\right) S_d dt + \sigma_d S_d dw_d \\ dS &= \left(r_{ft} - \rho\sigma\sigma_d\right) S dt + \sigma S dw \end{aligned}$$

kockázatsemleges egyenleteknek felel meg[31].

5.6 Példa.
A forward quato ára.

[31] Valójában mint folytonos osztalékrátával rendelkező folyamatok foghatók fel. ($q_1 \circeq r_{ft}$, illetve $q_2 \circeq r - r_{ft} - \rho\sigma\sigma_d$.) Ilyenkor a két drift tag $r - q_1$, illetve $r - q_2$.

Ebből következően az S-re kiírt forward ára éppen az a K, amelyre a $K-S$ ára nulla lesz. Vagyis[32]

$$K=\mathbf{E}^{\mathbf{Q}}\left(S\left(T\right)\right)=S\left(t\right)\exp\left(\left(r_{ft}-\rho\sigma\sigma_{d}\right)\left(T-t\right)\right).$$

Ha az S alaptermék q folytonos osztalékrátával bír, akkor az r_{ft} helyébe $r_{ft}-q$ írandó és ilyenkor

$$K=\mathbf{E}^{\mathbf{Q}}\left(S\left(T\right)\right)=S\left(t\right)\exp\left(\left(r_{ft}-q-\rho\sigma\sigma_{d}\right)\left(T-t\right)\right).$$

□

5.3. Frakcionális Wiener-folyamat

Tegyük fel, hogy a parciális integrálás formulájában a ξ és az η folyamatok „nem elég véletlenek". Ezen most azt a matematikai tulajdonságot értjük, hogy a két folyamat trajektóriái elég regulárisak ahhoz, hogy a $\langle\xi,\eta\rangle$ kvadratikus keresztvariáció nulla legyen. Ilyenkor a parciális integrálás formulája a jóval egyszerűbb

$$\xi\left(b\right)\eta\left(b\right)-\xi\left(a\right)\eta\left(a\right)=\int_{a}^{b}\xi d\eta+\int_{a}^{b}\eta d\xi$$

alakot ölti. Speciálisan ha $\xi=\eta$, akkor

$$\xi^{2}\left(b\right)-\xi^{2}\left(a\right)=2\int_{a}^{b}\xi d\xi.$$

Másképpen fogalmazva, ha a ξ „nem elég véletlen", vagyis a trajektóriái elég regulárisak, akkor érvényes a

$$d\xi^{2}=2\xi d\xi$$

deriválási szabály. Tegyük fel, hogy $\langle\xi\rangle=0$ és tekintsük a ξ segítségével megfogalmazható legegyszerűbb (B,S) kötvény-részvény modellt: $B\left(t\right)\overset{\circ}{=}1$ és $S\left(t\right)\overset{\circ}{=}1+\xi\left(t\right)$. A B folyamat alatt természetesen a kötvényt értjük, az S alatt pedig a részvényt[33]. Legyen

$$\theta_{B}\left(t\right)\overset{\circ}{=}-\left(\xi\left(t\right)\right)^{2}-2\xi\left(t\right),\quad\theta_{S}\left(t\right)\overset{\circ}{=}2\xi\left(t\right).$$

a beruházási stratégia. A megfelelő értékfüggvény

$$\begin{aligned}V\left(t\right)&=\theta_{B}\left(t\right)\cdot B\left(t\right)+\theta_{S}\left(t\right)\cdot S\left(t\right)=\\&=-\left(\xi\left(t\right)\right)^{2}-2\xi\left(t\right)+2\xi\left(t\right)\left(1+\xi\left(t\right)\right)=\left(\xi\left(t\right)\right)^{2}.\end{aligned}$$

Ha a $\xi\left(t\right)$ nem azonosan nulla, akkor a (θ_{B},θ_{S}) pár a (B,S) modellben arbitrázs, ugyanis

$$\begin{aligned}dV&=d\left(\xi\right)^{2}=2\xi d\xi=\theta_{B}\cdot0+\theta_{S}d\xi=\\&=\theta_{B}dB+\theta_{S}dS,\end{aligned}$$

egyenlőség miatt a portfolió önfinanszírozó. Ugyanez közvetlenül megmutatható a parciális integrálás formulájából is. Felhasználva, hogy mind a két keresztvariáció nulla

$$dV=\theta_{B}dB+Bd\theta_{B}+\theta_{S}dS+Sd\theta_{S}.$$

Ugyanakkor

$$\begin{aligned}Bd\theta_{B}+Sd\theta_{S}&=-d\xi^{2}-d\left(2\xi\right)+\left(\xi+1\right)d\left(2\xi\right)=\\&=-d\xi^{2}-2d\xi+2\xi d\xi+2d\xi=\\&=-d\xi^{2}+d\xi^{2}=0.\end{aligned}$$

[32]Ami nem más, mint $S\left(t\right)\exp\left(\left(r-q_{2}\right)\left(T-t\right)\right)$.

[33]Miként alább látni fogjuk, a gondolatmenet az exponenciális ármozgásokra is alkalmazható.

Másképpen fogalmazva egy piacon akkor van lehetőség arbitrázsra, ha a a piacon a pénzügyi folyamatok nem elég véletlenek, amely egyik megjelenési formája a kvadratikus variáció nulla volta.

A bemutatott jelenségre a legjobb és legismertebb példa az úgynevezett *frakcionális Wiener-folyamat*.

5.7 Definíció.
Legyen $0 < H \leq 1$, *és vezessük be az*

$$R_H(t,s) \triangleq \frac{1}{2}\left\{|t|^{2H} + |s|^{2H} - |t-s|^{2H}\right\}$$

kovarianciafüggvényt[34]. *Frakcionális Wiener-folyamaton olyan* B_H *sztochasztikus folyamatot értünk, amelyre*

1. $B_H(0) = 0$,
2. *a* B_H *növekményei stacionáriusak,*
3. *a növekmények eloszlása normális nulla várható értékkel,*
4. *a* B_H *trajektóriái folytonosak, és*
5. $\operatorname{cov}(B_H(t), B_H(s)) = \mathbf{M}(B_H(t)B_H(s)) = R_H(t,s)$, *speciálisan*

$$\mathbf{M}\left([B_H(t) - B_H(s)]^2\right) = |t-s|^{2H}.$$

Ha $H = 1/2$, akkor B_H Wiener-folyamat. Számoljuk ki a frakcionális Wiener-folyamat kvadratikus variációját az $[a,b]$ szakaszon.

$$\begin{aligned}\mathbf{M}\left(\sum_k [B_H(t_{k+1}) - B_H(t_k)]^2\right) &= \sum_k \mathbf{M}\left([B_H(t) - B_H(s)]^2\right) \\ &= \sum_k |t_{k+1} - t_k|^{2H}.\end{aligned}$$

Ha $2H - 1 > 0$, vagyis ha $H > 1/2$, akkor

$$\begin{aligned}\sum_k |t_{k+1} - t_k|^{2H} &\leq \max_k |t_{k+1} - t_k|^{2H-1} \sum_k |t_{k+1} - t_k| = \\ &= \max_k |t_{k+1} - t_k|^{2H-1}(b-a) \to 0.\end{aligned}$$

A Markov-egyenlőtlenség miatt

$$\mathbf{P}\left(\sum_k [B_H(t_{k+1}) - B_H(t_k)]^2 \geq \varepsilon\right) \leq \frac{1}{\varepsilon}\max_k |t_{k+1} - t_k|^{2H-1}(b-a) \to 0,$$

vagyis a kvadratikus variáció sztochasztikusan nullához tart. Ha $H < 1/2$, akkor a kifejezés határértéke végtelen, ugyanis ha véges lenne, akkor $1 - 2H > 0$, és ezért

$$b - a = \sum_k |t_{k+1} - t_k| \leq \max_k |t_{k+1} - t_k|^{1-2H} \sum_k |t_{k+1} - t_k|^{2H} \to 0$$

lenne. Ennek megfelelően a frakcionális Wiener-folyamat kvadratikus variációja a $H \neq 1/2$ esettől eltekintve vagy nulla, vagy végtelen.

[34] Csak a H-ra megadott tartományban definiálható a frakcionális Brown-mozgás, egyébként az R_H nem lehet kovarianciafüggvény.

5.3.1. Itô-lemma frakcionális Wiener-folyamat esetén

Tegyük fel, hogy $H > 1/2$. Ilyenkor a B_H kvadratikus variációja nulla. Az Itô-formula bizonyítását megismételve, ha $F'' \in C^2$, akkor

$$F(B_H(t)) - F(B_H(s)) \doteq \sum_k [F(B_H(t_{k+1})) - F(B_H(t_k))].$$

A Taylor-formula alapján

$$F(x) = F(y) + F'(y)[x-y] + \int_y^x F''(u)[x-u]\,du.$$

$$F(B_H(t)) - F(B_H(s)) = \sum_k F'(B(t_k))[B_H(t_{k+1}) - B_H(t_k)] + R^{(n)}.$$

ahol

$$R^{(n)} = \sum_k \int_{B_H(t_k)}^{B_H(t_{k+1})} F''(u)[B_H(t_{k+1}) - u]\,du.$$

Mivel az $F''(B_H(t))$ korlátos, ezért

$$\begin{aligned} |R_n| &\leq \sup_t F''(B_H(t)) \sum_k \int_{B_H(t_k)}^{B_H(t_{k+1})} [B_H(t_{k+1}) - u]\,du = \\ &= \sup_t F''(B_H(t)) \frac{1}{2} \sum_k [B_H(t_{k+1}) - B_H(t_k)]^2 \xrightarrow{\mathbf{P}} 0. \end{aligned}$$

Ha tehát $1 \geq H > 1/2$, akkor

$$\boxed{dF = F' dB_H,}$$

Ha persze $H = 1/2$, akkor

$$\boxed{dF = F' dB + \tfrac{1}{2} F'' dt.}$$

5.3.2. Black–Scholes-modell frakcionális Wiener-folyamat esetén

Miként korábban, tekinstük az (B, S) kötvény-részvény[35] modellt, ahol

$$B(t) \equiv 1, \quad S(t) = 1 + B_H(t),$$

és $1/2 < H \leq 1$. Ez az úgynevezett frakcionális Bachelier-modell. Legyen ismét

$$\theta_B(t) \doteq -(B_H(t))^2 - 2B_H(t), \quad \theta_S(t) \doteq 2B_H(t)$$

a beruházási stratégia. A megfelelő értékfüggvény

$$\begin{aligned} V(t) &= \theta_B(t) \cdot B(t) + \theta_S(t) \cdot S(t) = \\ &= \theta_B(t) \cdot 1 + \theta_S(t) S(t) = \\ &= -(B_H(t))^2 - 2B_H(t) + 2B_H(t)(1 + B_H(t)) = (B_H(t))^2. \end{aligned}$$

Ugyanakkor az Itô-formula szerint

$$\begin{aligned} dV(t) &= d(B_H(t))^2 = \\ &= 2B_H(t)\,dB_H(t) = \theta_S(t)\,dS(t) = \\ &= \theta_B(t)\,dB(t) + \theta_S(t)\,dS(t), \end{aligned}$$

[35] A B most a bond kötvény szóra utal B_H a frakcionális Brown-mozgás.

következésképpen a (θ_B, θ_S) stratégia önfinanszírozó. Mivel $V(0) = 0$, és $V(t) > 0$, ezért a frakcionális Bachelier-modellben van arbitrázs.

Most tekintsük az Black–Scholes típusú ármozgást, vagyis tekintsük a lognormális modellel analóg modellt. Tegyük fel, hogy.

$$\begin{aligned} B(t) &= \exp(rt), \quad S(t) = \exp(rt + \sigma B_H(t)). \\ dB(t) &= r\exp(rt), \quad dS = rSdt + \sigma S dB_H. \end{aligned}$$

A $dB(t) = r\exp(rt)$ egyenlet triviális, ugyanis semmi más, mint a

$$\frac{d\exp(rt)}{dt} = r\exp(rt)$$

deriválási szabály (sztochasztikus) differenciálokkal való felírása. Az többdimenziós Itô-formula képlete szerint

$$dS = rS \cdot dt + \sigma S \cdot dB_H$$

ugyanis a kvadratikus variációkat tartalmazó tagok mind nullák. Vegyük észre, hogy a kvadratikus variációk nulla volta miatt szemben a közönséges Wiener-folyamattal most az S ár képletében a t változó r együtthatója közvetlenül megegyezik az ármozgást leíró egyenlet Sdt tagjának együtthatójával. Ha a befektetési stratégia

$$\theta_B(t) \triangleq 1 - \exp(2\sigma B_H(t)), \quad \theta_S(t) \triangleq 2(\exp(\sigma B_H(t)) - 1),$$

akkor az értékfüggvény

$$\begin{aligned} & V(t) = \\ = \;& B(t) \cdot \theta_B(t) + S(t) \cdot \theta_S(t) = \\ = \;& \exp(rt)\left[1 - \exp(2\sigma B_H(t)) + \exp(\sigma B_H(t)) \cdot 2(\exp(\sigma B_H(t)) - 1)\right] = \\ = \;& \exp(rt)\left[1 + \exp(2\sigma B_H(t)) - 2\exp(\sigma B_H(t))\right] = \\ = \;& B(t)(1 - \exp(\sigma B_H(t)))^2 \end{aligned}$$

szigorúan pozitív. A frakcionális Wiener-folyamatra vonatkozó parciális integrálás, illetve az Itô-formula szerint

$$\begin{aligned} dV(t) &= (1 - \exp(\sigma B_H(t)))^2 dB(t) + B(t)\, d(1 - \exp(\sigma B_H(t)))^2 = \\ &= (1 - \exp(\sigma B_H(t)))^2 dB(t) + \\ &\quad + B(t) \cdot 2 \cdot (\exp(\sigma B_H(t)) - 1) \cdot \exp(\sigma B_H(t)) \cdot \sigma dB_H(t) \\ &= (1 - \exp(\sigma B_H(t)))^2 dB(t) + \\ &\quad + 2\sigma \cdot S(t) \cdot (\exp(\sigma B_H(t)) - 1)\, dB_H(t) \\ &= (1 - \exp(\sigma B_H(t)))^2 dB(t) + \sigma \cdot \theta_S(t) \cdot S(t)\, dB_H(t) = \\ &= \theta_B(t)\, dB(t) + \\ &\quad + \left((1 - \exp(\sigma B_H(t)))^2 - 1 + \exp(2\sigma B_H(t))\right) dB(t) + \\ &\quad + \sigma\theta_S(t) S(t)\, dB_H(t) \\ &= \theta_B(t)\, dB(t) + \\ &\quad + (2\exp(2\sigma B_H(t)) - 2\exp(\sigma B_H(t)))\, dB(t) \\ &\quad + \sigma\theta_S(t) S(t)\, dB_H(t) \\ &= \theta_B(t)\, dB(t) + \\ &\quad + 2(\exp(\sigma B_H(t)) - 1)\exp(\sigma B_H(t))\, dB(t) \\ &\quad + \sigma\theta_S(t) S(t)\, dB_H(t) \\ &= \theta_B(t)\, dB(t) + r\theta_S(t) S(t)\, dt + \sigma\theta_S(t) S(t)\, dB_H(t) = \\ &= \theta_B(t)\, dB(t) + \theta_S(t)\, dS(t), \end{aligned}$$

tehát a stratégia önfinanszírozó, így a frakcionális Black–Scholes-modell szintén tartalmaz arbitrázst.

6. fejezet

Függelék: A feltételes várható érték

A függelékben emlékeztetőül összefoglaljuk a valószínűségszámítás néhány alapfogalmát. Miképpen korábban, most is nagyvonalúan kezeljük az analízis tényeit és a szemléletes megfontolásokat a pontos megfogalmazás elé helyezzük.

6.1. Valószínűségi változók várható értéke

A valószínűségszámítás talán legfontosabb fogalma a várható érték. Legyen $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$ tetszőleges valószínűségi mező, ξ valószínűségi változó. Emlékeztetünk, hogy első közelítésben[1] a valószínűségi változó az Ω téren értelmezett függvény. Miként korábban jeleztük az ω argumentumot általában elhagyjuk és a $\xi(\omega)$ jelölés helyett az egyszerűbb ξ jelölést alkalmazzuk. A ξ valószínűségi változó $\mathbf{M}(\xi)$ várható értékén definíció szerint az $\int_\Omega \xi(\omega)\, d\mathbf{P}(\omega)$ integrált értjük. Felmerül azonban a kérdés, hogy az említett körülmények között mit értünk integrálon, ugyanis az Ω tér absztrakt elemekből áll, így a számegyenesen való integrálás során követett eljárásból nem lehet közvetlenül kiolvasni, hogy hogyan kell az integrált absztrakt körülmények között értelmezni. Az absztrakt integrál definíciója lényegében azonos a számegyenesen követettel: Először egyszerű objektumokra definiáljuk az integrált, majd a definíciót kiterjesszük a közelítő összegek határértékére.

1. Először az „egyszerű" valószínűségi változókat definiáljuk: Tekintsük az Ω egy $\mathcal{A}$-beli eseményekből álló partícióját, vagyis bontsuk fel az Ω teret (A_k) események diszjunkt egyesítésére. Ha a ξ valószínűségi változó diszkrét, vagyis az értéke az egyes A_k eseményeken egy-egy c_k konstans, akkor a várható érték, illetve az integrál definíciója kézenfekvő módon

$$\sum_k c_k \mathbf{P}(A_k). \tag{6.1}$$

A definíció szempontjából teljesen mindegy, hogy az (A_k) partícióban szereplő halmazok száma véges, vagy megszámlálhatóan végtelen, de az egyszerűség kedvéért kiindulhatunk abból, hogy az (A_k) az Ω véges számú eseményből álló felbontása. A véges számú eseményekből álló particiókhoz tartozó diszkrét értéket felvevő valószínűségi változókat szokás lépcsős függvényeknek nevezni. Vegyük észre, hogy ha F a ξ valószínűségi változó eloszlásfüggvénye, valamint ha (c_k) olyan monoton növekedő sorozat amelyre $[c_{k-1}, c_k)$ diszjunkt intervallumok egyesítése lefedi a ξ értékkészletét, akkor az

$$A_k \stackrel{\circ}{=} \{\omega : c_{k-1} \le \xi(\omega) < c_k\}$$

halmazok az Ω partícióját adják és a (6.1) közelítő összeg éppen

$$\sum_k c_k \mathbf{P}(A_k) = \sum_k c_k \left(F(c_k) - F(c_{k-1})\right)$$

[1] Miképpen látni fogjuk, van második megközelítés is. Az alpont legfontosabb célja, hogy indokolja, hogy miért van szükség második megközelítésre.

az $\int_{-\infty}^{\infty} x dF(x)$ Stieltjes-integrál egy közelítő összege[2].

2. A várható érték definíciójával kapcsolatos legfontosabb kérdés, hogy hogyan „sűrítjük" a felbontást. Az Ω absztrakt objektumokból áll, így nem világos, hogy mit jelent az, hogy az (A_k) partíciókat végtelenül finomítjuk. A kiutat a következő megfontolás jelenti: Ha $0 \leq \xi_1 \leq \xi_2$, akkor az integrál, illetve a várható érték intuitív tartalma miatt

$$\mathbf{M}(\xi_1) \leq \mathbf{M}(\xi_2).$$

Ha ξ_1 és ξ_2 lépcsős függvények, akkor ez a tulajdonság a megadott definíció miatt automatikusan teljesül. Kézenfekvő tehát a következő: Ha $\xi \geq 0$, akkor

$$\mathbf{M}(\xi) \triangleq \sup\{\mathbf{M}(\eta) : \eta \leq \xi,\ \eta \text{ lépcsős}\}.$$

Szavakban kifejezve: a monotonitás elve miatt egy nem negatív valószínűségi változó várható értéke biztos nem kisebb a változónál nem nagyobb lépcsős függvények várható értékénél, vagyis valamely valószínűségi változó várható értéke szükségszerűen felső korlátja a változónál nem nagyobb lépcsős függvények várható értékének. A várható érték definíció szerint a lehetséges felső korlátok közül a legkisebb. Ha a lépcsős függvények integráljaiból álló halmaz nem korlátos, akkor a várható értéket értelemszerűen végtelennek tekintjük. Triviális módon a várható érték továbbra is monoton operáció marad, vagyis ha $0 \leq \xi_1 \leq \xi_2$, akkor $\mathbf{M}(\xi_1) \leq \mathbf{M}(\xi_2)$.

3. Sajnos evvel a várható érték definícióját még nem adtuk meg. Ennek oka, hogy nem tisztáztuk, hogy milyen függvényekre érdemes értelmezni a várható értéket. A kulcs probléma, hogy az imént megadott definíció esetén nem tudjuk garantálni, hogy a várható érték additív lesz, vagyis nem tudjuk garantálni, hogy érvényes lesz az

$$\mathbf{M}(\xi_1 + \xi_2) = \mathbf{M}(\xi_1) + \mathbf{M}(\xi_2)$$

szabály. Ahhoz, hogy ezt biztosítani tudjuk be kell vezetni a mérhető függvények fogalmát és le kell szűkíteni a várható érték definícióját a mérhető függvények halmazára. A mérhetőséggel kapcsolatos probléma abból ered, hogy elképzelhető, hogy az Ω téren értelmezett ξ függvény nem közelíthető, nem írható le az Ω-án értelmezett $\mathcal{A}$ események segítségével. Ennek lehet tisztán matematikai oka[3], de helyesebb ha arra gondolunk, hogy a megfigyelhető eseményekkel, a rendelkezésünkre álló információkkal bizonyos függvények, szabályok összefüggések nem írhatók le[4].

6.1 Definíció.
A $0 \leq \xi$ függvényt az $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$ téren mérhetőnek mondjuk, ha van (ξ_n) lépcsős függvényekből álló sorozat, amelyre $0 \leq \xi_1 \leq \xi_2 \leq \ldots \leq \xi_n \nearrow \xi$. A ξ függvény mérhető, ha a $\xi^+ = \max(0, \xi)$ és a $\xi^- = \max(0, -\xi)$ függvények mérhetőek. Az $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$ téren értelmezett mérhető függvényeket valószínűségi változóknak mondjuk[5].

6.2 Példa.
A várható érték csak a mérhető függvényeken additív.

[2] V.ö.: (2.1) sor, 32. oldal.

[3] A függvény túl általános fogalom.

[4] Mi a jelenlegi tudásunk alapján egy kifejlett klingon harcos átlagos testmagassága? Na és a jelenlegi tapasztalataink alapján mennyi a romulán nők átlagos inteligenciaszintje? Mennyi a két érték összege? A megfigyelt statisztikai adatok alapján átlagban a klingonok vagy a romulánok matematikai tudása nagyobb?

[5] Megmutatható, hogy a mérhetőség definíciója ekvivalens avval, hogy minden c konstans esetén a $\{\xi < c\}$ halmazok események, vagyis tetszőleges c esetén $\{\xi < c\} \in \mathcal{A}$, így az $\{\xi < c\}$ halmazok rendelkeznek valószínűséggel, tehát értelmes a ξ változó $F(x) \triangleq \mathbf{P}(\xi < x)$ eloszlásfüggvénye. A mérhetőséggel kapcsolatos tételekre a tárgyalás intuitív jellege miatt nincsen igazán szükségünk. Az egyetlen dolog, amit érdemes megjegyezni, hogy mivel az $\mathcal{A}$ eseménytér nem azonos az Ω összes részhalmazával, ezért az összes Ω-án értelmezett függvénynek nem tudunk várható értéket definiálni, ugyanakkor minden nem negatív mérhető függvénynek van várható értéke, bár előfordulhat, hogy a várható érték végtelen.

Az Ω tér álljon a 0 és az 1 jelekből, $\mathcal{A}$ eseménytér álljon az Ω és az $\varnothing$ halmazokból. A lépcsős függvények egyedül a konstans függvények[6]. Ha

$$\xi_1(\omega) \stackrel{\circ}{=} \begin{cases} 0 & \text{ha} \quad \omega = 0 \\ 1 & \text{ha} \quad \omega = 1 \end{cases}, \quad \xi_2(\omega) \stackrel{\circ}{=} \begin{cases} 1 & \text{ha} \quad \omega = 0 \\ 0 & \text{ha} \quad \omega = 1 \end{cases},$$

akkor $\mathbf{M}(\xi_1) = \mathbf{M}(\xi_2) = 0$, de $\mathbf{M}(\xi_1 + \xi_2) = 1$. A probléma természetesen az, hogy a ξ_1 és a ξ_2 nem mérhető függvények.

□

A várható értéket a monotonitáson keresztül definiáltuk. A monotonitás miatt a definíciókból könnyen látható, hogy ha ξ nem negatív valószínűségi változó és $\xi_n \nearrow \xi$ a ξ-t a mérhetőség definíciója alapján közelítő lépcsős függvények sorozata, akkor $\mathbf{M}(\xi_n) \nearrow \mathbf{M}(\xi)$. Ebből nem túl meglepő, hogy érvényes a következő úgynevezett *monoton konvergencia tétel*, amely a monotonítás és az additivitás mellett a várható érték legfontosabb tulajdonsága:

6.3 Állítás.
Ha $0 \leq \xi_1 \leq \xi_2 \leq \ldots \leq \xi_n \nearrow \xi$, *akkor* $\mathbf{M}(\xi_n) \nearrow \mathbf{M}(\xi)$.

4. A monotonitás mellett az additivitás a várható érték másik kulcs tulajdonsága. Ezt tükrözi a várható érték definíciója is.

6.4 Definíció.
Ha ξ valószínűségi változó, akkor

$$\mathbf{M}(\xi) \stackrel{\circ}{=} \mathbf{M}(\xi^+) - \mathbf{M}(\xi^-)$$

feltéve, hogy a kifejezés értelmes, vagyis nem $\infty - \infty$ alakú.

6.2. Regressziós függvény

A valószínűségszámítás legalapvetőbb és intuitíve leginkább problémás fogalma a feltételes várható érték. A feltételes várható értékkel kapcsolatos probléma nem matematikai, logikai természetű. A gond leginkább abból ered, hogy a definíció bár rendkívül elegáns és matematikai, esztétikai szempontból lényegében optimális, az alkalmazások szempontjából túl absztrakt és ezért nehezen köthető a feltételes várható érték, illetve a feltételes valószínűség intuitív fogalmához. A matematika legfőbb eszköze az absztrakció és a sikeres matematikai fogalmak mindegyike, a feltételes várható értékhez hasonlóan igen absztrakt. Ugyanakkor a valószínűségszámítás alkalmazott matematika, amely szorosan összekapcsolódik az intuícióval, így egy absztrakt definíció csak akkor elfogadható, ha világosan látható az absztrakt fogalom intuitív tartalma. Megítélésem szerint a feltételes várható érték megértésének kulcs a regressziós függvény, ugyanis míg az absztrakt σ-algebra szerinti feltételes várható érték intuitív tartalma nehezen ragadható meg, a regressziós függvény tartalma intuitíve evidens. Ennek megfelelően először a regressziós függvény fogalmát mutatjuk be.

A feltételes valószínűség fogalma világos és egyszerű, ha a feltétel valószínűsége pozitív. Miként az elemi valószínűségszámításból ismert, ha a B esemény valószínűsége pozitív és A tetszőleges esemény, akkor a feltételes valószínűség, definíció szerint

$$\mathbf{P}(A \mid B) \stackrel{\circ}{=} \frac{\mathbf{P}(A \cap B)}{\mathbf{P}(B)}. \tag{6.2}$$

[6] A lépcső alapjának mindig megengedett eseménynek kell lenni, a lépcső magassága tetszőleges szám lehet. Ha a lépcső A alapja nem megengedett esemény, akkor a $\mathbf{P}(A)$ szám értelmetlen.

A feltételes valószínűség legnagyobb haszna, hogy segítségével az $\mathcal{A}$ eseményeinek valószínűségét esetenként könnyen ki tudjuk számolni. Ha (B_n) az Ω tér $\mathcal{A}$ elemeiből álló, legfeljebb megszámlálható partíciója, akkor tetszőleges $A \in \mathcal{A}$-ra $A = \cup_n (A \cap B_n)$, így

$$\mathbf{P}(A) = \sum_n \mathbf{P}(A \cap B_n) \stackrel{\circ}{=} \sum_n \mathbf{P}(A \mid B_n)\,\mathbf{P}(B_n), \tag{6.3}$$

ahol az összegzés az olyan n indexekre terjed ki, amelyekre $\mathbf{P}(B_n) > 0$. A (6.3) egyenlőség kiemelkedő szerepet játszik az elemi valószínűségszámításban, ahol a teljes valószínűség tétele elnevezéssel szokás hivatkozni rá. A $\mathbf{P}(A \mid B_n)$ definíció szerint olyan számok, amelyekre teljesül a (6.3) felbontás. Természetesen a $\mathbf{P}(A \mid B_n)$ értékek hasznos intuitív tartalommal bírhatnak, ami segít a nagyságuk „megsejtésében”. Ez különösen akkor van így, ha a B_n halmazok valamilyen paraméter rögzítése mellett kaphatók, így egy eredendően „kétváltozós” probléma n darab „egyváltozós” problémára bontható.

6.5 Példa.
Egy urnában két fehér és három piros golyó van. Két golyót egymás után kihúzunk. Mi a valószínűsége annak, hogy a második golyó fehér?

A feladat megoldása a következő: Ha elsőre fehéret húzunk, akkor a második húzásra 1/4 a fehér húzásának valószínűsége, ha elsőre pirosat, akkor a fehér húzásának valószínűsége 2/4. Ebből a teljes valószínűség tétele szerint a keresett valószínűség

$$\frac{1}{4} \cdot \frac{2}{5} + \frac{2}{4} \cdot \frac{3}{5}.$$

Vegyük észre, hogy a feladat megoldása pontatlan, illetve nem specifikált rejtett feltételekre épül. A teljes valószínűség tétele egy triviális azonosság, ami önmagában semmire sem használható. A teljes valószínűség segítségével a $\mathbf{P}(A)$ valószínűsége csak akkor számolható ki, ha ismerjük a $\mathbf{P}(A \mid B_n)$ feltételes valószínűségeket, amelyeket definíció szerint elvileg csak akkor ismerhetünk, ha már ismerjük az $(\Omega, \mathcal{A})$ eseménytéren értelmezett $\mathbf{P}$ valószínűséget, így ismerjük már a $\mathbf{P}(A)$ értéket is. Miért alkalmazható a példában a teljes valószínűség tétele? Ha az első golyó piros, miért lesz a második húzásra a fehér golyó húzásának valószínűsége 2/4? Mi történik, ha a fehér golyók „egyenlő erőviszonyok” esetén fellázadnak és megeszik a piros golyókat? Vagy mi történik akkor, ha az egyedül maradt piros golyó menekülésre fogja a dolgot és kiugrik az urnából? Miért gondoljuk azt, hogy ez nem történik meg? Természetesen a feladat intuitív tartalma alapján úgy gondoljuk, hogy a megadott számolás helyes, vagyis az urnában levő golyók valóban golyóként viselkednek és például nem eszik meg egymást. Vegyük azonban észre, hogy a példa megoldásakor előbb definiáltuk a feltételes valószínűséget és ebből „vezettük le” a tényleges valószínűséget. A feltételes valószínűség kiszámolásakor nem a feltételes valószínűség definíciójára támaszkodtunk, hanem a feltételes valószínűség intitív tartalomából indultunk ki. Miként említettük, a valószínűségszámítás alkalmazott matematika, ahol az intuíció, a modellépítés alapvető szerepet játszik. A teljes valószínűség tétele egy azonosság, amit általában „kifordítva” használunk: A feladat tartalma alapján meghatározzuk a feltételes valószínűségeket, majd a teljes valószínűség tétele által rögzített azonosság alapján definiáljuk a $\mathbf{P}(A)$ értéket. A feltételes valószínűség ismerete esetén a valószínűség definiálásának egyedül lehetséges módját a természetesen a teljes valószínűség tétele adja meg. Azonosság levezetésekor azonban éppen fordítva jártunk el: A $\mathbf{P}$ valószínűséget rögzítettük, majd definiáltuk a $\mathbf{P}(A \mid B_n)$ feltételes valószínűségeket. A teljes valószínűség tételét tekinthetjük állításnak és tekinthetjük konstrukciós eljárásnak is. A feltételes valószínűséggel kapcsolatos szemléleti problémák egyik forrása, hogy általában explicite nem tisztázzuk, hogy a feladatban mikor milyen irányban használjuk az összefüggést. Általános ökölszabály: feladatmegoldáskor a feltételes valószínűséget, illetve feltételes várható értéket mindig külső paraméternek tekintjük és értékét explicite vagy implicite a modellépítés során rögzítjük.

□

Pozitív feltételi valószínűség esetén a feltételes várható érték a feltételes valószínűséghez hasonlóan evidens. Mi történik azonban akkor, ha a B feltétel valószínűsége nulla?

6.6 Példa.
Határozzuk meg annak a „valószínűségét”, hogy az egységsugarú körlapon véletlenszerűen választott pont a pozitív térnegyedben a körívre esik, feltéve hogy tudjuk, hogy a körívre esik.

A keresett valószínűséget 1/4-nek „érezzük”. Egy lehetséges indoklás a következő: Legyen $A \circeq \{(x,y) : x, y \geq 0\}$, vegyük a $B_r \circeq \left\{(x,y) : r \leq \sqrt{x^2+y^2} \leq 1\right\}$ eseményt, és tekintsük a $\mathbf{P}(A \mid B_r) = \mathbf{P}(A \cap B_r)/\mathbf{P}(B_r) = 1/4$ feltételes valószínűséget, amiből $\lim_{r\to 1} \mathbf{P}(A \mid B_r) = 1/4$.

□

Vegyük azonban észre, hogy valójában nem kiszámoltuk, hanem most is az intuíciónk segítségével definiáltuk a feltételes valószínűséget. Az intuíció, mint igen gyakran a matematikában, némiképpen félrevezető! Először is vegyük észre, hogy amit kaptunk az nem „valószínűség”. A „valószínűség” intuitív fogalma erősen kötődik a nagy számok törvényéhez, vagyis ahhoz, hogy a relatív gyakoriságok a valószínűséghez tartanak. A feltételes valószínűség miért lesz a relatív gyakoriságok határértéke? Ha kísérleteket végzünk, mennyi lesz a kedvező per összes hányados? Az előre rögzített körvonalat lényegében sohasem találjuk el! Ez a teljesen evidens észrevétel is aláhúzza, hogy nem szabad a feltételes valószínűséget mint „valószínűséget” felfogni. A második megjegyzés sokkal lényegesebb, és jóval kevésbé evidens. Az ismertetett gondolatmenet lényege a következő: Ha a B valószínűsége nulla, közelítsük a B halmazt valamilyen B_n sorozattal, és

$$\mathbf{P}(A \mid B) \circeq \lim_{n\to\infty} \mathbf{P}(A \mid B_n) = \lim_{n\to\infty} \frac{\mathbf{P}(A \cap B_n)}{\mathbf{P}(B_n)},$$

feltéve persze, hogy a definícióban minden korrekt. A probléma éppen az, hogy általában ez a definíció nem korrekt, ugyanis az $(\Omega, \mathcal{A})$ eseménytér természetes módon nem „topologizálható”, vagyis nem világos, hogy mit jelent az, hogy a B_n eseménysorozat a B eseményhez tart! Akkor mit jelent az, hogy a B_n közelíti a B-t? Ha különböző B_n sorozatokkal közelítjük a B-t ugyanazt az eredményt kapjuk? Milyen B_n halmazok megengedettek, és miért pont ezek?

6.7 Példa.
Nulla valószínűségű események feltételes valószínűsége.

Legyen ξ a $[0,1]$ szakaszon egyenletes eloszlású. Próbáljuk meg értelmezni

$$\mathbf{P}(\xi = 0 \mid \xi = 0)$$

feltételes valószínűséget! Intuitív alapon a feltételes valószínűség 1. Ha azonban a $\{\xi = 0\}$ feltételt a $|\xi| \leq h$ eseménnyel közelítjük, majd $h \to 0$, akkor evidens módon a

$$\begin{aligned} \mathbf{P}(\xi = 0 \mid \xi = 0) &\circeq \lim_{h\searrow 0} \frac{\mathbf{P}(\{\xi = 0\} \cap \{|\xi| \leq h\})}{\mathbf{P}(|\xi| \leq h)} = \\ &= \lim_{h\searrow 0} \frac{\mathbf{P}(\xi = 0)}{\mathbf{P}(|\xi| \leq h)} = 0. \end{aligned}$$

□

6.8 Példa.
Legyen $\Omega \circeq \{(x,y) : |x| \leq 1, |y| \leq 1\}$, és $\mathbf{P}$ legyen az egyenletes eloszlás. Határozzuk meg annak a „valószínűségét”, hogy egy véletlenszerűen választott (ξ, η) pontra $\xi^2 \leq \eta$, feltéve ha $\xi = \eta = 0$.

Ha $\xi = \eta = 0$, akkor $\eta = \xi^2$, ezért a feltétel része az eseménynek, vagyis úgy érezzük, hogy $\mathbf{P}(A \mid B) = 1$. A $\mathbf{P}(A \mid B) \circeq \mathbf{P}(A \cap B)/\mathbf{P}(B)$ definícióval azonban nem megyünk semmire ugyanis mind a számláló, mind a nevező nulla. Ha a $B \circeq \{(0,0)\}$-át a $B_h \circeq \{(x,y) : |x| \leq h, |y| \leq h\}$ halmazzal közelítjük, akkor

$$\frac{\mathbf{P}(A \cap B_h)}{\mathbf{P}(B_h)} \circeq \frac{\left(2h^2 - \int_{-h}^{h} x^2 dx\right)}{4h^2} = \frac{1}{2} - \frac{h^3/6}{h^2} \to \frac{1}{2}.$$

Ha a közelítő téglalapok $B_h \doteq \{(x,y) : -h \leq x \leq 0, -h \leq y \leq 0\}$, akkor a kapott határérték nulla, ha pedig $B_h \doteq \{(x,y) : 0 \leq x \leq h, 0 \leq y \leq h\}$, akkor pedig 1. Ugyanakkor, ha $B_h \doteq \left\{(x,y) : |x| \leq h, |y| \leq h^2\right\}$, akkor

$$\frac{\mathbf{P}(A \cap B_h)}{\mathbf{P}(B_h)} \doteq \frac{2h^3 - \int_{-h}^{h} x^2 dx}{4h^3} = \frac{1}{2} - \frac{1}{6} = \frac{1}{3}.$$

□

Az elmondottak alapján evidens, hogy a feltételes valószínűség fogalma nulla valószínűségű esemény esetén általában nem definiálható! Akkor mégis mit lehet tenni? A „nyerő válasz" megtalálása céljából a 6.6. példát némiképpen általánosítva az egyszerűség kedvéért induljunk ki abból, hogy a B esemény egy η változó nívóhalmaza, vagyis $B \doteq \{\eta = y\}$ és a $\mathbf{P}(A \mid B) = \mathbf{P}(A \mid \eta = y)$ feltételes valószínűséget akarjuk értelmezni. Tegyük, fel hogy az y érték az η értékkészletének „sűrűsödési" pontja, vagyis tegyük fel, hogy bár $\mathbf{P}(\{\eta = y\}) = 0$, de bármely $h > 0$ számra a

$$B(h) \doteq \{\omega : |\eta(\omega) - y| \leq h\}$$

esemény valószínűsége már pozitív, tehát értelmezhető a

$$\mathbf{P}(A \mid B(h)) \doteq \frac{\mathbf{P}(A \cap B(h))}{\mathbf{P}(B(h))}$$

hányados. A

$$\mathbf{P}(A \mid B) \doteq \lim_{h \searrow 0} \frac{\mathbf{P}(A \cap B(h))}{\mathbf{P}(B(h))} = \lim_{h \searrow 0} \mathbf{P}(A \mid B(h)) \tag{6.4}$$

definíció igen kézenfekvő, feltéve persze, hogy a határérték egyáltalában létezik. Vegyük észre, hogy egy fajta deriváltról van szó, ugyanis a $\mathbf{P}(A \mid B)$ két nullához tartó sorozat hányadosának határértéke.

Megmutatható, hogy lényegében az η értékkészletének minden pontjában létezik a határérték.

A „lényegében" szót szándékosan nem definiáljuk, pontosítjuk. A „lényegében" kitételre azért van szükség mert az η változó értékkészletének nem minden pontja megfelelő „sűrűsödési pont". Az idézett állítás azt jelenti, hogy az esetlegesen létező rossz pontok halmaza nem befolyásolja azt, hogy teljesüljön a teljes valószínűség tételének megfelelő Newton–Leibniz-szabály. A lényeges észrevétel az, hogy a deriválási gondolat alapján intuitíve „megérezhetjük" a feltételes valószínűséget, amelyre viszont alkalmazható az integrálás formájában megadott teljes valószínűség tétele, amellyel az általános esetben definiálni fogjuk a feltételes valószínűséget, illetve a feltételes várható értéket.

6.9 Definíció.
Legyen $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$ valószínűségi mező, $A \in \mathcal{A}$ tetszőleges esemény. Az

$$y \mapsto \mathbf{P}(A \mid \eta = y) \doteq \lim_{h \searrow 0} \mathbf{P}(A \mid y - h \leq \eta \leq y + h) \tag{6.5}$$

függvényt az A esemény η szerinti regresszív feltételes valószínűségének mondjuk.

A definícióból evidens, hogy a regresszív feltételes valószínűség alapvetően derivált típusú objektum. Deriváltakra mindig felvethető, hogy érvényes-e a Newton–Leibniz-formula, vagyis a deriválás integrálással visszacsinálható-e vagy sem?

Jelölje G az η eloszlásfüggvényét. Megmutatható, tetszőleges $a < b$ számok esetén

$$\mathbf{P}(A \cap \{a \leq \eta < b\}) = \int_a^b \mathbf{P}(A \mid \eta = y)\, dG(y). \tag{6.6}$$

Vegyük észre, hogy az egyenlőség intuitíve a teljes valószínűség tételének általánosítása, ugyanis a $dG(y)$ infinitezimálisan tekinthető annak a valószínűségének, hogy az η éppen az y értéket veszi fel. Megjegyezzük, hogy az integrálegyenlet és a deriválási formula kölcsönösen megfeleltethető egymásnak. A deriválás alapján való megközelítés és az integrálegyenlet azonossága a feltételes valószínűséggel kapcsolatos legfontosabb állítás[7]. Ez indokolja és köti össze a feltételes valószínűség szokásos[8], és legyünk őszinték, első látásra igen nehezen emészthető definícióját a fogalom intuitív tartalmával. Bizony, bizony, ismét a Newton–Leibniz-formula! A két öreg filozófus nélkül mire jutnánk? Nincs Newton–Leibniz-szabály nincs Itô-formula, így nincs sztochasztikus analízis, de a feltételes várható érték fogalmát sem értenénk.

Kézenfekvő kérdés azonban, hogy miért szokás a kevésbé intuitív integrálegyenletből kiindulni. Ennek több oka van: Egyrészt általában a konkrét példákban az integrálegyenlet teljesülését praktikusan egyszerűbb ellenőrizni, másrészt az integrálegyenlet esetén a „lényegében” kitételre nincsen szükség, és minden olyan függvény tekinthető feltételes valószínűségnek amely minden a és b esetén kielégíti az integrálegyenletet, harmadrészt a regresszív feltételes valószínűség integrálos definícióját könnyebb a bonyolultabb esetekre kiterjeszteni[9].

Az integrálos szemlélet legnagyobb előnye, hogy azonnal látható, hogy a regresszív feltételes valószínűség nem egyértelműen értelmezett függvény. A $\mathbf{P}(A \mid \eta = y)$ tetszőleges olyan függvény lehet, amely kielégíti a (6.6) integrálegyenletet. Ennek fontos következménye, amit nyomatékosan hangsúlyozni kell, hogy nem az egyedi y értékekhez tartozó feltételes valószínűségeket definiáltunk. Ha ugyanis valamely y esetén az $\{\eta = y\}$ esemény valószínűsége nulla, akkor az integrálegyenlet szempontjából a $\mathbf{P}(A \mid \eta = y)$ értéke az adott y esetén érdektelen, így a regresszív feltételes valószínűség sem értelmezhető egyetlen olyan y esetén sem amelyre $\mathbf{P}(\{\eta = y\}) = 0$. Pontosabban, ha valamely $B \subseteq \mathbb{R}$ halmaz $\mathbf{P}(\eta \in B) = 0$, akkor a B halmazon a $\mathbf{P}(A \mid \eta = y)$ mint y függvénye tetszőlegesen előírható. Ezt úgy szokás mondani, hogy a feltételes valószínűség csak a feltétel eloszlásában nulla valószínűségű halmaz erejéig meghatározot. Másképpen a $\mathbf{P}(A \mid \eta = y)$ nem az y függvénye, hanem az y-tól függő függvények egy osztálya, ahol az azonos függvényosztályba eső függvények az η feltétel eloszlása szerint egy valószínűségű halmazon megegyeznek. Ez némiképpen meglepő és paradoxnak tűnő tulajdonság, de sajnos így van[10]. A $g(y) \doteq \mathbf{P}(A \mid \eta = y)$ értéke a legtöbb[11] y pontban külön-külön érdektelen, de természetesen nem az összes y esetén érdektelen. A legtöbb y pontban a g értékét szabadon megváltoztathatjuk, de ez nem jelenti azt, hogy a g-hez tartozó függvényosztályt is megváltoztathatjuk[12]. Egy függvényosztály nem minden tulajdonsága meghatározott a függvényosztályba eső függvények értékei alapján, feltéve természetesen, hogy a függvényértékeket csak egy-egy pontban módosíthatjuk. Tipikusan ilyen tulajdonság a függvények integrálja. Mivel a regresszív feltételes valószínűséget a (6.6) integrálegyenlettel értelmezzük, ezért a regresszív feltételes valószínűség nem függvényként, hanem függvényosztályként[13] értelmes, így az értéke a „legtöbb” pontban értelmetlen.

6.10 Állítás.
Ha a (ξ, η) pár eloszlásának van $f(x, y)$ együttes sűrűségfüggvénye, akkor a ξ-nek létezik az η-ra vonatkozó feltételes sűrűségfüggvénye, vagyis a $\mathbf{P}(\xi < x \mid \eta = y)$ feltételes eloszlásnak „lényegében”

[7]Természetesen nem vagyunk meglepve, hogy a deriválás és az integrálás felcserélhető. Bár az állítás intuitíve nem tűnik nehéznek, sőt inkább kézenfekvőnek látszik, megjegyezzük, hogy nem egyszerű tételről van szó. Mivel a tétel pontos indoklása nehéz, ezért általában el is szokás hagyni, így nem túl meglepő, hogy a feltételes valószínűséget gyakran motiválatlan fogalomnak szokás tartani.

[8]A szokásos, vagyis az irodalomban követett megközelítés az integrálegyenletre alapul, és a feltételes valószínűséget mint a teljes valószínűség tételében szereplő súlyokat definiálja.

[9]Feltehetően azonban egyszerű lustaságról van szó. Egy valószínűségszámítási kurzus során nincs idő az úgynevezett mértékderiválás és az absztrakt, úgynevezett Radon–Nikodym-féle deriválás kapcsolatának tárgyalására. Az absztrakt tételek mindig gyorsabban igazolhatóak.

[10]A dolog kulcsa, hogy a h szerinti közelítés módjától függ, hogy a „lényegében” jó pontok hol vannak és mely pontok rosszak a „lényegében” való közelítés miatt.

[11]Ha az $\{\eta = y\}$ esemény valószínűsége pozitív, akkor az y pontban a regressziós függvény értéke nem módosítható. A legtöbb jelző az olyan y értékekre utal, amelyekre $\mathbf{P}(\{\eta = y\}) = 0$.

[12]A g függvényt természetesen módosítjuk, de a függvényosztályt nem.

[13]A függvényosztályba azok a függvények tartoznak, amelyek kielégítik az integrálegyenletet.

minden y-ra van $f(x \mid y)$ feltételes sűrűségfüggvénye

$$f(x \mid y) = \begin{cases} f(x,y)/g(y) & ha \quad g(y) \neq 0 \\ 0 & ha \quad g(y) = 0 \end{cases}, \tag{6.7}$$

ahol g az η sűrűségfüggvénye, vagyis

$$g(y) \circeq \int_{\mathbb{R}} f(u,y)\,du.$$

Az

$$F(x \mid y) \circeq \mathbf{P}(\xi < x \mid \eta = y)$$

feltételes eloszlásfüggvény felírható

$$F(x \mid y) = \int_{-\infty}^{x} f(t \mid y)\,dt$$

módon.

Megjegyezzük, hogy ha $g(y) = 0$, akkor a számegyenesen minden x-re $f(x,y) = 0$. Vegyük észre, hogy ha

$$g^{\ominus}(y) \circeq \begin{cases} g^{-1}(y) & \text{ha} \quad g(y) \neq 0 \\ 0 & \text{ha} \quad g(y) = 0 \end{cases},$$

akkor

$$f(x \mid y) = f(x,y)\,g^{\ominus}(y).$$

Ha $A \circeq \{\xi < x\}$ és G jelöli az η eloszlását, akkor

$$\begin{aligned} \mathbf{P}(A \cap \{a \leq \eta < b\}) &= \mathbf{P}(\{\xi < x\}, \{a \leq \eta < b\}) = \\ &= \int_a^b \int_{-\infty}^{x} f(x,y)\,dxdy = \\ &= \int_a^b \int_{-\infty}^{x} f(x,y)\,g^{\ominus}(y)\,g(y)\,dxdy = \\ &= \int_a^b \int_{-\infty}^{x} f(x,y)\,g^{\ominus}(y)\,dxg(y)\,dy \circeq \\ &\circeq \int_a^b \int_{-\infty}^{x} f(x \mid y)\,dxg(y)\,dy = \\ &= \int_a^b \int_{-\infty}^{x} f(x \mid y)\,dxdG(y), \end{aligned}$$

amiből a (6.6) definiáló egyenlet alapján

$$\int_{-\infty}^{x} f(x \mid y)\,dx = \mathbf{P}(\xi < x \mid \eta = y) \circeq F(x \mid y).$$

□

6.11 Példa.
Legyen a (ξ, η) pár együttes sűrűségfüggvénye

$$f(x,y) \circeq \begin{cases} \exp(-y) & ha & 0 < x < y \\ 0 & egyébként & \end{cases}.$$

Számoljuk ki az $\mathbf{M}(\xi \mid \eta = y)$ és az $\mathbf{M}(\eta \mid \xi = x)$ regressziós függvényeket!

Számoljuk ki a feltételes sűrűségfüggvényeket!

$$\begin{aligned}
g(y) &\stackrel{\circ}{=} \int_{\mathbb{R}} f(x,y)\,dx = \int_0^y e^{-y}dx = ye^{-y}, \\
f(x) &\stackrel{\circ}{=} \int_{\mathbb{R}} f(x,y)\,dy = \int_x^\infty e^{-y}dy = \left[-e^{-y}\right]_x^\infty = e^{-x}. \\
f(x \mid y) &= \frac{f(x,y)}{g(y)} = \frac{e^{-y}}{ye^{-y}} = \frac{1}{y}, \quad 0 < x < y, \\
f(y \mid x) &= \frac{f(x,y)}{h(x)} = \frac{e^{-y}}{e^{-x}} = e^{x-y}, \quad 0 < x < y.
\end{aligned}$$

Ekkor

$$\begin{aligned}
\mathbf{M}(\xi \mid \eta = y) &= \int_{\mathbb{R}} xf(x \mid y)\,dx = \int_0^y x\frac{1}{y}dx = \\
&= \frac{1}{y}\int_0^y xdx = \frac{y}{2}, \\
\mathbf{M}(\eta \mid \xi = x) &= \int_{\mathbb{R}} yf(y \mid x)\,dy = \int_x^\infty ye^{x-y}dy = \\
&= e^x \int_x^\infty ye^{-y}dy = e^x\left(\left[-ye^{-y}\right]_x^\infty + \int_x^\infty e^{-y}dy\right) = \\
&= e^x\left(xe^{-x} + e^{-x}\right) = x + 1.
\end{aligned}$$

Vegyük észre, hogy a bemutatott számolás csak az $x > 0$, illetve az $y > 0$ tartományokon érvényes. Ugyanakkor a feltételi változók eloszlásában az $x \leq 0$, illetve az $y \leq 0$ tartományok nulla valószínűségűek. Emlékeztetünk, hogy a regressziós függvény csak a feltétel eloszlásában nulla valószínűségű halmaz erejéig meghatározott, vagyis az $x \leq 0$, illetve az $y \leq 0$ halmazokon a regressziós függvény tetszőleges lehet, így feltehetjük, hogy minden x esetén

$$\mathbf{M}(\eta \mid \xi = x) = x + 1,$$

de az

$$\mathbf{M}(\eta \mid \xi = x) = (x+1)\,\chi(x > 0)$$

függvény is megfelelő. Hasonlóan az $\mathbf{M}(\xi \mid \eta = y) = \eta/2$, illetve az $\mathbf{M}(\xi \mid \eta = y) = \eta^+/2 \stackrel{\circ}{=} \max(0,y)/2$ egyenlőség is érvényes. A látszólagos ellentmondás magyarázata, hogy a regresszív feltételes valószínűség, illetve a várható érték miként említettük nem függvény, hanem függvényosztály ahol két függvény azonos osztályba esik, ha egy a feltétel szerint nulla valószínűségű halmaztól eltekintve megegyeznek.

□

Miként a példa szövegében is már jeleztük az $\mathbf{M}(\xi \mid \eta = y)$ függvényt a ξ η szerinti regressziós függvényének mondjuk. Definíció szerint

$$\mathbf{M}(\xi \mid \eta = y) \stackrel{\circ}{=} \lim_{h \searrow 0} \mathbf{M}(\xi \mid y - h \leq \eta \leq y + h).$$

Megjegyezzük, hogy ismételten „lényegében” az η értékészletének minden y elemére a definíció értelmes, vagyis az η értékészletének „majdnem minden” elemére az

$$\{\omega : y - h \leq \eta(\omega) \leq y + h\}$$

közelítő események valószínűsége pozitív és a h szerinti határérték létezik. Mivel ismét derivált típusú kifejezésről van szó, ezért nem túl meglepő, hogy most is igaz az

$$\begin{aligned}
\mathbf{M}(\xi\chi_B) &= \int_\Omega \xi\chi_B d\mathbf{P} = \int_B \xi d\mathbf{P} = \\
&= \int_a^b \mathbf{M}(\xi \mid \eta = y)\,dG(y)
\end{aligned}$$

egyenlőség, ahol G az η eloszlásfüggvénye és

$$B \doteq \{\omega : a \leq \eta(\omega) < b\} \subseteq \Omega.$$

Megjegyezzük, hogy a regressziós függvény elnevezés indoka a következő: általában regresszív okoskodáson az okozatból az okra való visszakövetkeztetést szokás érteni. Az y érték okozat, ugyanis az ok, az $\omega \in \Omega$ kimenetel, amit a ξ és az η megfigyelésekor közvetlenül nem ismerünk. Az $y = \eta(\omega)$ érték az ω ok η összefüggés szerinti okozata. A regressziós függvényben az y okozatból próbálunk a ξ várható értékére visszakövetkeztetni. Ha $\xi = \chi_A$, akkor a regressziós függvény

$$\mathbf{M}(\xi \mid \eta = y) = \mathbf{M}(\chi_A \mid \eta = y) = \mathbf{P}(A \mid \eta = y),$$

vagyis ilyenkor a regressziós függvény segítségével az y okozatból próbálunk az $\omega \in A$ ok valószínűségére visszakövetkeztetni.

6.3. Feltételes várható érték

A feltételes valószínűség, illetve a feltételes várható érték általános definíciójában a feltétel nem egy η valószínűségi változó értékfelvétele, hanem egy $\mathcal{F}$ eseménytér. Ennek oka, hogy ha a feltételt végtelen sok valószínűségi változó adja meg, akkor a derivált típusú szemlélet, amikor is a nulla valószínűségű eseményeket pozitív valószínűségű eseményekkel közelítjük, nem igazán működik. Természetesen a probléma az, hogy végtelen változóból álló feltételrendszer esetén mit tekintünk egy esemény jó közelítésének? Ilyenkor egyszerűbb, ha a regressziós függvény helyett a feltételes várható értéket használjuk. A feltételes várható érték értelmezési tartománya az Ω alaptér és nem a feltételként adott változók értékkészlete, vagyis a feltételes várható érték nem regresszív objektum, vagyis nem az okozatokon, hanem magukat az okokat tartalmazó Ω absztrakt téren értelmezett függvény. A kiinduló gondolat, hogy a *feltételes valószínűség, illetve a feltételes várható érték olyan függvényosztály, amely elemei kielégítik a teljes valószínűség, illetve a teljes várható érték tételét.* Ugyanakkor az $\mathbf{M}(\xi \mid \mathcal{F})$ feltételes várható értéket szokás a ξ $\mathcal{F}$ szerinti becsléseként interpretálni. Másképpen fogalmazva kézenfekvő feltenni, hogy az $\mathbf{M}(\xi \mid \mathcal{F})$ súlyok kiszámításakor csak olyan információkat tudunk használni, amelyeket az $\mathcal{F}$ feltétel tartalmaz. Ebből következően az $\mathbf{M}(\xi \mid \mathcal{F})$ feltételes várható értéket az $\mathcal{F}$ segítségével akarjuk leírni, vagyis a pontos matematikai terminológiát használva megköveteljük, *hogy az $M(\xi \mid \mathcal{F})$ függvény $\mathcal{F}$-mérhető legyen*[14]. A pontos definíció a következő:

6.12 Definíció.
Legyen adva egy $\mathcal{F}$ eseménytér és egy ξ valószínűségi változó. A ξ változó $\mathbf{M}(\xi \mid \mathcal{F})$ módon jelölt $\mathcal{F}$-re vonatkozó feltételes várható értékén az olyan $\mathcal{F}$-mérhető függvények családját értjük, amelyekre minden $F \in \mathcal{F}$ esemény esetén teljesül az

$$\int_F \xi d\mathbf{P} = \int_F \mathbf{M}(\xi \mid \mathcal{F})\, d\mathbf{P} \tag{6.8}$$

integrálegyenlet. Ha $\xi = \chi_A$, akkor az $\mathbf{M}(\chi_A \mid \mathcal{F})$ feltételes várható érték helyett feltételes valószínűségről beszélünk, amit $\mathbf{P}(A \mid \mathcal{F})$ módon szokás jelölni.

6.13 Állítás.
Ha a ξ változónak létezik véges várható értéke, akkor tetszőleges $\mathcal{F}$ feltételi eseménytér esetén létezik az $\mathbf{M}(\xi \mid \mathcal{F})$ feltételes várható érték. Speciálisan tetszőleges A eseményre létezik a $\mathbf{P}(A \mid \mathcal{F})$ feltételes valószínűség. Az $\mathbf{M}(\xi \mid \mathcal{F})$, illetve a $\mathbf{P}(A \mid \mathcal{F})$ függvényosztályokban szereplő függvények nulla valószínűségű halmaz erejéig egyértelműen meghatározottak, vagyis ha az Ω téren értelmezett két függvény kielégíti a feltételes várható értékkel szemben támasztott követelményeket, akkor egy nulla valószínűségű halmaztól eltekintve megegyeznek[15].

[14] Az $\mathcal{F}$ feltétel szerinti mérhetőség a definíció fontos eleme.

[15] A valószínűségszámításban szokás azt mondani, hogy ha két függvény csak nulla valószínűségű halmazon különbözik, akkor mint valószínűségi változók ekvivalensek.

A feltételi eseménytér esetén megadott definíció igen absztrakt. A definíciót a következőképpen szemléltethetjük: Tegyük fel, hogy az $F \in \mathcal{F}$ esemény valószínűsége pozitív. Ekkor

$$\frac{1}{\mathbf{P}(F)} \int_F \xi d\mathbf{P} = \frac{1}{\mathbf{P}(F)} \int_F \mathbf{M}(\xi \mid \mathcal{F})\, d\mathbf{P}.$$

Vagyis a ξ átlaga az F halmazon azonos az $\mathbf{M}(\xi \mid \mathcal{F})$ átlagával az F halmazon. Átlag szintjén a két változó azonos információt tartalmaz, de az $\mathbf{M}(\xi \mid \mathcal{F})$ kevésbé pontos. Tegyük fel, hogy nagy felbontású fényképezőgéppel készítettünk egy fényképet. A kép tekinthető egy ξ valószínűségi változónak, amelyet bizonyos jelek sorozata kódol. Mivel a kép nagyon részletes, ezért weblapokon való felhasználása nagyon nehéz, ugyanis sok ideig tart a letöltése. Valamiképpen a képet tömöríteni akarjuk. A tömörítés információvesztéssel jár. Tegyük fel, hogy a még elégséges információk halmazát az $\mathcal{F}$ eseménytér írja le. Az $\mathcal{F}$ azokat az információkat tartalmazza, amelyeket a weblapról ki akarunk a képről olvasni. A legegyszerűbb tömörítési mód, ha bizonyos részleteket kiátlagolunk. Ha a kép valamelyik része nagyon sok piros és kevés fehér pontot tartalmaz, akkor a kevésbé részletes képen ezt a tartományt egyetlen piroshoz közeli ponttal helyettesítjük. Általában, a részletes képet a tömörített képen bizonyos tartományi átlagokkal helyettesítjük. Ha az eredeti képen az 1 mm-es részek is kivehetők voltak, az új képen pedig csak a 10 cm-es részek vehetők ki, akkor feltehetőleg az 1 cm-es területeket az ott levő átlagos értékkel érdemes helyettesíteni. Pontosan ezt az átlagban való helyettesítést adja meg a (6.8) egyenlet. A $\mathcal{F}$ által előírt felbontás mellett az új kép átlagban azonos a régi pontosabb képpel és ez az összes résztartományra igaz.

Konkrét példákban az $\mathcal{F}$ feltételt legtöbbször bizonyos $(\eta_\alpha)_\alpha$ változók megfigyelése határozza meg. Tipikusan a ξ valamely sztochasztikus folyamat értéke egy t időpontban és az $(\eta_\alpha)_\alpha$ feltételi valószínűségi változók ennek a folyamatnak korábbi, már megfigyelt értékei. Mivel a folyamat korábbi megfigyeléseinek száma végtelen, ezért a folyamat információs struktúráját a feltételes várható értékkel célszerű leírni. Az $\mathcal{F}$ eseménytér ilyenkor tartalmazza azokat az eseményeket, amelyek szükségesek ahhoz, hogy az összes korábbi megfigyelés valószínűségi változó legyen[16].

6.14 Példa.
Partíció által definiált feltétel szerinti feltételes várható érték.

Ha a ξ változónak van várható értéke és $\mathcal{F} = \{\emptyset, \Omega, A, A^c\}$, ahol $\mathbf{P}(A) > 0$, akkor az A halmazon

$$\mathbf{M}(\xi \mid \mathcal{F}) = \frac{1}{\mathbf{P}(A)} \int_A \xi d\mathbf{P}.$$

Ha $(A_n)_n$ az Ω egy pozitív valószínűségű halmazokból álló, megszámlálható partíciója, $\mathcal{F}$ az $(A_n)_n$ események által meghatározott eseménytér, akkor

$$\mathbf{M}(\xi \mid \mathcal{F})(\omega) = \frac{1}{\mathbf{P}(A_n)} \int_{A_n} \xi d\mathbf{P} = \mathbf{M}(\xi \mid A_n), \quad \omega \in A_n,$$

tehát

$$\begin{aligned} \mathbf{M}(\xi) &= \sum_{n=1}^{\infty} \mathbf{M}(\xi \mid A_n)\, \mathbf{P}(A_n), \\ \mathbf{P}(A) &= \sum_{n=1}^{\infty} \mathbf{P}(A \mid A_n)\, \mathbf{P}(A_n), \end{aligned}$$

ahol értelemszerűen, ha B egy pozitív valószínűségű halmaz, akkor

$$\mathbf{M}(\xi \mid B) \doteq \frac{1}{\mathbf{P}(B)} \int_B \xi d\mathbf{P}, \quad \mathbf{P}(A \mid B) \doteq \frac{\mathbf{P}(A \cap B)}{\mathbf{P}(B)}.$$

[16] Emlékeztetünk, hogy nem minden függvény valószínűségi változó, csak azok, amelyek lépcsős függvények határértékeként előállíthatóak.

Az említett szabályok indoklása a következő: Mivel az $\mathbf{M}(\xi \mid \mathcal{F})$ függvény $\mathcal{F}$-mérhető, ezért a feltételi eseményteret generáló A és A^c halmazokon konstans, amiből

$$\int_A \xi d\mathbf{P} = \int_A \mathbf{M}(\xi \mid \mathcal{F})\, d\mathbf{P} = \mathbf{M}(\xi \mid \mathcal{F}) \int_A d\mathbf{P} = \mathbf{M}(\xi \mid \mathcal{F})\, \mathbf{P}(A).$$

Az általános esetben elég azt meggondolni, hogy minden $\mathcal{F}$-mérhető függvény az A_n generáló halmazokon konstans.

□

6.15 Definíció.
Ha az $\mathcal{F}$ eseményteret egyetlen η változó lehetséges megfigyelései határozzák meg[17]*, akkor a feltételes várható értéket $\mathbf{M}(\xi \mid \eta)$ módon szokás jelölni.*

Vegyük észre, hogy az

$$\mathbf{M}(\xi \mid \eta)$$

és az

$$\mathbf{M}(\xi \mid \eta = y)$$

jelölések bár hasonlóak, de nem azonosak. Az $\mathbf{M}(\xi \mid \eta)$ az η értelmezési tartományán, vagyis az Ω alaptéren van értelmezve az $\mathbf{M}(\xi \mid \eta = y)$ pedig az y függvénye és az η értékkészletén van értelmezve. A két fogalom szoros kapcsolatban van.

6.16 Állítás.
Ha $\mathcal{F}$ az η valószínűségi változó megfigyelése által meghatározott eseménytér, vagyis $\mathcal{F}$ az a legszűkebb eseménytér amelyre nézve az η mérhető[18]*, akkor az $\mathbf{M}(\xi \mid \eta)$ feltételes várható érték az η változónak az $\mathbf{M}(\xi \mid \eta = y)$ regressziós függvénybe való behelyettesítésével kapható, vagyis ha $g(y) \triangleq \mathbf{M}(\xi \mid \eta = y)$, akkor*

$$\mathbf{M}(\xi \mid \eta) = g(\eta).$$

A feltételes várható érték, illetve a feltételes valószínűség, sok szempontból hasonlít a közönséges várható értékre, illetve valószínűségre[19].

6.17 Állítás. (A feltételes várható érték tulajdonságai)
A feltételes várható értékre teljesülnek a következő összefüggések:

1. *Ha a ξ valószínűségi változó és az $\mathcal{F}$ feltételi eseménytér függetlenek, akkor $\mathbf{M}(\xi \mid \mathcal{F}) = \mathbf{M}(\xi)$.*

2. *A feltételes várható érték monoton, vagyis ha $\xi \leq \eta$, akkor*

$$\mathbf{M}(\xi \mid \mathcal{F}) \leq \mathbf{M}(\eta \mid \mathcal{F}),$$

speciálisan

$$0 \leq \mathbf{P}(A \mid \mathcal{F}) \leq 1.$$

3. *Teljesül a kiemelési szabály, vagyis ha az η változó $\mathcal{F}$-mérhető, akkor*

$$\mathbf{M}(\eta\xi \mid \mathcal{F}) = \eta\mathbf{M}(\xi \mid \mathcal{F}).$$

Speciálisan tetszőleges a konstansra

$$\mathbf{M}(a\xi \mid \mathcal{F}) = a\mathbf{M}(\xi \mid \mathcal{F}).$$

[17] Vagyis az $\mathcal{F}$ az $\eta^{-1}(B) \subseteq \Omega$ alakú halmazok családja.
[18] Vgyis miként az imént éppen $\mathcal{F} = \left\{A \subseteq \Omega : A = \eta^{-1}(B)\right\}$.
[19] Feltesszük, hogy az állításban szereplő objektumok értelmesek, vagyis például az összes változónak van várható értéke, így a feltételes várható értéke létezik.

4. *A feltételes várható érték additív, vagyis*

$$\mathbf{M}(\xi + \eta \mid \mathcal{F}) = \mathbf{M}(\xi \mid \mathcal{F}) + \mathbf{M}(\eta \mid \mathcal{F}).$$

Speciálisan, ha A és B diszjunkt halmazok, akkor

$$\mathbf{P}(A \cup B \mid \mathcal{F}) = \mathbf{P}(A \mid \mathcal{F}) + \mathbf{P}(B \mid \mathcal{F}),$$

amiből, ha $A \subseteq B$, akkor

$$\mathbf{P}(B \setminus A \mid \mathcal{F}) = \mathbf{P}(B \mid \mathcal{F}) - \mathbf{P}(A \mid \mathcal{F}).$$

5. *Teljesül a teljes várható érték két tétele, vagyis ha $\mathcal{G} \subseteq \mathcal{F}$, akkor*

$$\mathbf{M}(\mathbf{M}(\xi \mid \mathcal{F}) \mid \mathcal{G}) = \mathbf{M}(\xi \mid \mathcal{G}).$$

Speciálisan

$$\mathbf{M}(\mathbf{M}(\xi \mid \mathcal{F})) = \mathbf{M}(\xi),$$

illetve ha $\mathcal{G} \subseteq \mathcal{F}$, akkor

$$\mathbf{M}(\mathbf{M}(\xi \mid \mathcal{G}) \mid \mathcal{F}) = \mathbf{M}(\xi \mid \mathcal{G}).$$

Emlékeztetünk, hogy a két szabályt torony szabályoknak is szokás mondani.

6. *A feltételes várható értékre teljesül a monoton konvergencia tétele, vagyis ha*

$$0 \leq \xi_n \nearrow \xi,$$

akkor

$$0 \leq \mathbf{M}(\xi_n \mid \mathcal{F}) \nearrow \mathbf{M}(\xi \mid \mathcal{F}).$$

Speciálisan, ha $A_n \nearrow A$, akkor

$$\mathbf{P}(A_n \mid \mathcal{F}) \nearrow \mathbf{P}(A \mid \mathcal{F}).$$

Ha az A_n halmazok diszjunktak és $A = \cup_n A_n$, akkor

$$\sum_{n=1}^{\infty} \mathbf{P}(A_n \mid \mathcal{F}) = \mathbf{P}(A \mid \mathcal{F}).$$

Az állításban szereplő tulajdonságok pozitív valószínűséggel rendelkező partíciókból álló eseményterek esetén egyszerűen ellenőrizhetőek és igen ajánlatos, hogy az olvasó ezt meg is tegye. Az egyes tulajdonságok általános esetben való indoklása messze vezetne. Ugyanakkor igen fontos, hogy az olvasó ezeket a szabályokat jól megértse és alkalmazni tudja. A legfontosabb három szabály az *additivitás*, a *kiemelési szabály* illetve a *teljes várható érték tételei*, másnéven a *toronyszabályok*. Az említett három alapvető szabály intitív tartalma elég evidens. A „becslés" linearitása igen természetes megkötés. Gondoljunk csak arra, hogy ha egy összeg két tagját becsülni akarjuk, igen meglepődnénk, ha a becslés nem lenne külön-külön elvégezhető és az összeg becslése nem lenne a becslések összege[20]. A kiemelési szabály bizonyos értelemben a linearitásban is szereplő konstans

[20] A dolog annyira nyilvánvaló, hogy azok az esetek, amikor mégsem alkalmazható számos potenciális matematikai hiba forrása. A sztochasztikus folyamatok elmélete tele van rejtett „aknákkal". Ezen rejtett „aknák" legtöbbje a feltételes várható érték additivitásával függ össze. A leírás pontatlanságából eredően nem tisztáztuk pontosan, hogy milyen körben értelmezzük a feltételes várható értéket. Miként várható értéke, úgy feltételes várható értéke sincsen minden valószínűségi változónak. Ha valamely ξ változónak nincsen várható értéke akkor az $\mathbf{M}(\xi - \xi) = \mathbf{M}(\xi) - \mathbf{M}(\xi)$ azonosság értelmetlen. A bal oldali kifejezés értelmes, ugyanis nulla, a jobb oldali azonban nem, hiszen két értelmetlen különbsége nem nulla, hanem értelmetlen. Tessék az Excelben kipróbálni! Az ilyen természetű problémák elkerülése céljából fel szokás tenni, hogy egy változónak csak akkor van feltétles várható értéke, ha van közönséges várható értéke. Ilyenkor az additivitás minden további nélkül teljesül, ha feltesszük, hogy az egyenlőségben szereplő kifejezések mindegyike értelmes.

kiemelésének általánosítása. Ha már ismerjük a szorzat egyik tagját, akkor a szorzat becslésében az ismert tagot konstansnak tekinthetjük. Például, ha becsülni akarjuk az árbevétel alakulását és már ismerjük az árat, akkor intuitíve világos, hogy csak az eladott termékek számát kell becsülni és a becsült eladási mennyiséget kell az ismert árral beszorozni. A tornyszabály szintén igen szemléletes megkötés: Valamely becslés végső eredményét nem befolyásolják az „irreleváns" információk. Ha valamely gazdasági eseményt akarunk becsülni, felesleges figyelembe venni a csillagok állását. A csillagok állása és a gazdasági változók megfigyelésének együttese pontosan annnyi gazdasági információt tartalmaz, amennyit a gazdasági adatok tartalmaznak.

6.18 Példa.
A függetlenségre vonatkozó szabály indoklása.

Emlékeztetünk, hogy egy ξ valószínűségi változót és egy $\mathcal{F}$ eseményteret definíció szerint akkor nevezünk függetlennek, ha a ξ és minden $F \in \mathcal{F}$ esetén az F halmaz

$$\chi_F(\omega) \overset{\circ}{=} \begin{cases} 1 & \text{ha} \quad \omega \in F \\ 0 & \text{ha} \quad \omega \notin F \end{cases}$$

karakterisztikus függvénye mint valószínűségi változók függetlenek[21]. Független valószínűségi változókra igaz a szorzatszabály, vagyis a két változó szorzatának várható értéke a várható értékek szorzata. Az $\mathbf{M}(\xi)$ konstans függvény $\mathcal{F}$-mérhető, ugyanakkor a ξ és az $\mathcal{F}$ függetlensége miatt definíció szerint minden $F \in \mathcal{F}$ halmazra triviálian

$$\int_F \xi d\mathbf{P} = \mathbf{M}(\chi_F \xi) = \mathbf{M}(\chi_F)\,\mathbf{M}(\xi) = \int_F \mathbf{M}(\xi)\, d\mathbf{P}.$$

így az $\mathbf{M}(\xi)$ $\mathcal{F}$-mérhető függvény kielégíti a feltételes várható értéket definiáló (6.8) integrálegyenletet, tehát definíció szerint $\mathbf{M}(\xi)$ éppen az $\mathbf{M}(\xi \mid \mathcal{F})$ feltételes várható érték.

□

6.19 Példa.
Ha $\mathcal{F} = \{\emptyset, \Omega\}$, *akkor* $\mathbf{M}(\xi \mid \mathcal{F}) = \mathbf{M}(\xi)$.

Valóban az $\mathcal{F} = \{\emptyset, \Omega\}$ eseménytér független tetszőleges ξ változótól. De az indokláshoz erre sincsen szükség, elég megjegyezni, hogy az $\mathbf{M}(\xi)$ konstans értékű függvény $\mathcal{F}$-mérhető és ha $F = \varnothing$, vagy $F = \Omega$, akkor triviálisan teljesül a feltételes várható értéket definiáló (6.8) integrálegyenlet. Például

$$\int_\Omega \xi d\mathbf{P} \overset{\circ}{=} \mathbf{M}(\xi) = \int_\Omega \mathbf{M}(\xi)\, d\mathbf{P}.$$

□

6.20 Példa.
Ha ξ $\mathcal{F}$*-mérhető valószínűségi változó, akkor* $\mathbf{M}(\xi \mid \mathcal{F}) = \xi$.

Valóban a kiemelési szabály miatt

$$\mathbf{M}(\xi \mid \mathcal{F}) = \xi \cdot \mathbf{M}(1 \mid \mathcal{F}) = \xi.$$

□

[21] Az már más kérdés, hogy mikor nevezünk két változót függetlennek: Ha az együttes eloszlásuk a peremeloszlásaik szorzataként írható fel.

7. fejezet

Függelék:Hasznossági függvény és martingálmérték viszonya

Miként jeleztük a modern pénzügyi elmélet alapgondolata a termékek közötti redundancia, és az arbitrázsmentesség mellett a legfontosabb feltétel a teljesség, amely a redundaciát garantálja, vagyis amely feltétel garantálja, hogy a származtatott terméket kifejezzük az alaptermékek segítségével. Mi történik ha a piac nem teljes? Természetesen ha a piac arbitrázsmentes, akkor mindenképpen létezik martingálmérték, de a martingálmérték nem egyértelmű. Milyen kapcsolat van ilyenkor a martingálmérték és az árak, illetve a piaci szereplők hasznossági függvényei között? Másképpen ha a piac nem teljes, akkor pusztán az arbitrázs hiányára hivatkozva nem tudjuk az árakat megmondani. Ilyenkor szükségünk van a piaci szereplők hasznossági függvényeire és vissza kell térni a hagyományos egyensúlyelméleti megközelítéshez. Hogyan kapcsolható össze a matematikai pénzügyek árazási modellje a mikroökonómia árazási modelljével? Miként alább megmutatjuk egyensúlyi állapotban a helyettesítési határráták éppen a mértékcsere során létrejött kockázatsemleges valószínűségi arányokkal írhatók le.

A technikai bonyodalmak elkerülése céljából tegyük fel, hogy az időparaméter diszkrét, és az eseménytér végesen generált, vagy ami ugyanaz az S eszközárfolyam valamilyen fával írható le. A fának nem kell feltétlenül szabályosnak lenni, vagyis nem kell feltenni, hogy az egyes elágazások száma azonos legyen az eszközök számával. Például a hagyományos kötvény-részvény modell esetén a fa lehet három vagy akár száz elágazású is. Az egyszerűbb jelölés céljából tegyük fel, hogy a diszkonttényező éppen egy, így a különböző időpontokban keletkezett árfolyamnyereségeket össze lehet adni. Legyen u valamilyen befektető hasznossági függvénye. Az egyszerűség kedvéért tegyük fel, hogy az u deriválható, konkáv, szigorúan monoton nő[1] és a teljes számegyenesen értelmezett. A befektető haszonmaximalizációs problémája a következő:

$$\mathbf{M}^{\mathbf{P}}\left(u(f)\right) \to \max, \tag{7.1}$$
$$f = w_0 + \sum_{t=1}^{T} \Delta S\left(t\right) \theta\left(t\right).$$

Vagyis a feladat az, hogy adott w_0 kezdőkészletből kiindulva és T időszakon keresztül az S-sel kereskedve átlagban mennyi hasznosságot tudunk a T időszak végére maximum elérni[2]. Természetesen az átlagot a statisztikai, vagyis az „objektív” valószínűség mellett kell venni. Erre utal

[1] A feladat egyszerűen általánosítható több részvényre is. Ilyenkor az u monotonitása azt jelenti, hogy ha az $x \leq y$ és az y valamelyik koordinátája nagyobb, akkor $u\left(x\right) < u\left(y\right)$.

[2] Hasonló modell írható fel folytonos időhorizonton is, de annak matematikai kezelése már igen nehéz. A feladatban ilyenkor az összeg helyett egy sztochasztikus integrál szerepel. Vegyük észre, hogy az egyes időszakok árfolyamnyereségeit összeadjuk. Ez pénzügyi szempontból hibás. Ezt kiküszöbölendő az egyszerűség kedvéért tegyük fel, hogy a diszkonttényező éppen egy. Amennyiben az olvasó nincsen evvel a megoldással megelégedve, önfinanszírozó portfoliókkal is felírhatja a feladatot.

a $\mathbf{P}$ felső index. Mivel az u szigorúan monoton nő, ezért a feladat ekvivalens az

$$\mathbf{M}^{\mathbf{P}}\left(u(f)\right) \to \max,$$
$$f \leq w_0 + \sum_{t=1}^{T} \Delta S\left(t\right)\theta\left(t\right)$$

feladattal, ugyanis az optimális megoldásban a feltételek mindig egyenlőségre fognak teljesülni. Így az egyszerűség kedvéért az első feladatban feltehetjük, hogy az egyenlőség helyett egyenlőtlenség van.

Első lépésként belátjuk, hogy a fenti maximum probléma ekvivalens a

$$\begin{aligned} \mathbf{M}^{\mathbf{P}}\left(u(f)\right) &\to \max, \\ \mathbf{M}^{\mathbf{Q}}\left(f\right) &\leq w_0, \ \ \mathbf{Q} \in \mathbb{M} \end{aligned} \tag{7.2}$$

problémával, ahol $\mathbb{M} \doteq \mathbb{M}\left(S\right)$ jelöli az S martingálmértékeinek halmazát. Hangsúlyozni kell, hogy $\mathbb{M}$ a martingálmértékek és nem az ekvivalens martingálmértékek halmazát jelöli. Ha $\mathbb{P}$ jelöli a $\mathbf{P}$-vel ekvivalens mértékek halmazát, akkor az ekvivalens martingálmértékek halmaza $\mathbb{M} \cap \mathbb{P}$. A (7.2) feladat ismét könnyen interpretálható. Ha a diszkonttényező azonosan egy, akkor a $\mathbf{Q} \in \mathbb{M}$ mértékek a lehetséges árvektorok halmazával azonosíthatóak, ugyanis ilyenkor a $\mathbf{Q}\left(A\right)$ éppen a χ_A alakú T időszaki kifizetés ára. Világos, hogy az ilyen jószágok árának ismerete alapján az összes f kifizetés ára is megadható és a kifizetés ára éppen $\mathbf{M}^{\mathbf{Q}}\left(f\right)$ lesz. A feladat szerint meg kell keresni a maximális várható hasznosságot biztosító azon f fogyasztást, amelyre az összes lehetséges, számbajöhető árvektor mellett a költségvetési korlát teljesülni fog. Érdemes azonban ezen a ponton egy további megjegyzést tenni. Természetesen a $\mathbf{Q}\left(A\right)$ csak akkor tekinthető árnak, ha a T időszaki χ_A kifizetés fedezhető. Ha ezt implicite minden A esemény esetén elvárjuk, akkor a $\mathbf{Q}\left(A\right)$ árként való interpretációjával implicite feltételezzük, hogy a piac teljes, mi pedig éppen a nem teljes esetet vizsgáljuk, így a (7.2) feladat említett interpretációja némi csúsztatást tartalmaz.

Vegyük észre, hogy semmilyen a matematikai közgazdaságtanban szokatlan probléma nem merül fel. Mind a két feladat egy konkáv hasznossági függvény maximalizálása egy poliedrikus[3] halmaz felett. A két feladat között az a különbség, hogy az első feltételi halmazt a halmaz elemeivel, a második feltételi halmazt a határoló félterek metszeteként írtuk fel[4].

A nincsen arbitrázs feltétel szerint a

$$K \doteq \left\{ f \mid f = \sum_{t=1}^{T} \Delta S\left(t\right)\theta\left(t\right) \right\}$$

altér csak az origóban metszi a nem negatív vektorok P halmazát. C legyen a K-ból a díjmentes lomtalanítás feltételével kapható kifizetések halmaza, vagyis $C \doteq K - P$. Mivel a feltevés szerint a valószínűségi modell véges sok kimenetet tartalmaz, ezért a P egy véges dimenziós tér nem negatív vektorainak halmaza, így egy véges kúp. A K egy lineáris altér, így a C és a K halmazok véges kúpok, így a K és C zárt halmazt alkotnak[5]. Nyilvánvaló, hogy a $K \cap P = \{0\}$ és a $C \cap P = \{0\}$ feltételek ekvivalensek. A nincsen arbitrázs duális formában való megfogalmazása a következő:

7.1 Tétel. (Az eszközárazás alaptétele)
Valamely S eszközök által definiált piacon pontosan akkor nem létezik arbitrázs, ha az S rendelkezik ekvivalens martingálmértékkel[6].

[3] Vagyis véges számú lineáris feltétel által definiált feladatról van szó.

[4] A két feltételi halmaz nem azonos. Mivel a feltételek szerint az u monoton nő, az alább definiált C halmazon való maximalizálás ekvivalens az ugyancsak alább definiált K halmazon való maximalizálással.

[5] Megjegyezzük, hogy ezen a ponton erősen kihasználtuk a valószínűségi mező szerkezetére tett egyszerűsítő feltételeket. Az általános eset tárgyalásának nehézségei éppen a most tett észrevétel általában nem triviális voltából ered.

[6] Vegyük észre, hogy az úgynevezett Dalang–Morton–Willinger tételt igazoljuk egy speciális esetben.

Bizonyítás: Az itt bemutatott bizonyítás a lehetséges bizonyítások közül talán a legegyszerűbb és a véges kúpok közismert elméletére támaszkodik. Amennyiben az olvasót a matematikai bizonyítás nem érdekli, azt nyugodtan elhagyhatja. A bizonyítás egyedül érdekes része az, hogy standard első éves lineáris algebrára épül. A tétel általánosításai azonban a modern funkcionálanalízis kifejezetten nehéz részeit használják. A nehézségek azonban a folytonos időhorizont használatából erednek. A bizonyításra rátérve, valamely V véges kúp esetén a szokásos módon jelölje V^p a V negatív polárisát, vagyis

$$V^p \doteq \{u \mid (u,v) \leq 0, \text{ ha } v \in V\}.$$

A nincsen arbitrázs feltétel szerint $C \cap P = \{0\}$. Ha E jelöli az összes vektorok, vagyis az összes valószínűségi változók, halmazát, akkor[7]

$$E = \{0\}^p = (C \cap P)^p = C^p + P^p \doteq C^p - P,$$

ugyanis $P^p = -P$. Mivel $0 \in P$, ezért a C^p triviálisan tartalmaz egy M pozitív elemet. Megmutatjuk, hogy normalizálás után az M egy ekvivalens martingálmérték. Pontosabban megmutatjuk, hogy a C^p minden nem nulla eleme normalizálás után egy martingálmértéket definiál és fordítva a martingálmértékek mindegyike eleme a C^p kúpnak. Ez utóbbi indoklása egyszerű: Ha $\mathbf{Q}$ egy martingálmérték és

$$f \doteq k - z \doteq \sum_{t=1}^{T} \Delta S(t)\,\theta(t) - z \in C$$

tetszőleges, akkor a szokásos módon eljárva, felhasználva, hogy diszkrét időhorizonton az integrálható martingáltranszformációk valódi martingálok

$$\begin{aligned}\mathbf{M}^{\mathbf{Q}}(f) &\doteq \mathbf{M}^{\mathbf{Q}}\left(\sum_{t=1}^{T} \Delta S(t)\,\theta(t) - z\right) \leq \mathbf{M}^{\mathbf{Q}}\left(\sum_{t=1}^{T} \Delta S(t)\,\theta(t)\right) = \\ &= \sum_{t=1}^{T} \mathbf{M}^{\mathbf{Q}}\left(\mathbf{M}^{\mathbf{Q}}(\Delta S(t) \mid \mathcal{F}_t)\,\theta(t)\right) = 0,\end{aligned}$$

így $\mathbf{Q} \in C^p$. Megfordítva, ha $\mathbf{Q} \in C^p$, akkor a $\mathbf{Q}$ mértéket megadó vektor nyilván merőleges a K altérre. Mivel $-P \subseteq C$ ezért $\mathbf{Q} \geq \mathbf{0}$. Ha $\mathbf{Q} \neq \mathbf{0}$, akkor a $\mathbf{Q}$ normalizálás után tekinthető valószínűségi mértéknek. Nyilván minden $F \in \mathcal{F}_{t-1}$ esetén a $\chi_F(S(t) - S(t-1)) \in K$, ezért

$$\int_F S(t) - S(t-1)\, d\mathbf{Q} = 0,$$

amiből a feltételes várható érték definíciója miatt $\mathbf{M}^{\mathbf{Q}}(S(t) \mid \mathcal{F}_{t-1}) = S(t-1)$, vagyis az S valóban martingál a $\mathbf{Q}$ alatt.

□

A bizonyításból azonnal látszik a következő:

7.2 Következmény.
Ha nincsen arbitrázs, akkor $\mathrm{con}(\mathbb{M}) = C^p$. *Ilyenkor az ekvivalens martingálmértékek* $\mathbb{M} \cap \mathbb{P}$ *halmaza a* C^p *és a egységszimplex metszetének azon elemei, amelyek nem esnek a nem negatív vektorok kúpjának határára. Nyilvánvalóan mivel* $\mathbb{M} \cap \mathbb{P} \neq \emptyset$, *ezért* $\mathbb{M} = \mathrm{cl}(\mathbb{M} \cap \mathbb{P})$.

A (7.1) és (7.2) feladatok azonossága az előző dualitási tétel egyszerű következménye.

7.3 Tétel.
A (7.1) és (7.2) feladatok ekvivalensek.

[7] Emlékeztetünk, hogy véges kúpok esetén $(K_1 \cap K_2)^p = K_1^p + K_2^p$.

Bizonyítás: A második feladat lehetséges megoldásainak halmaza éppen az

$$\mathbf{M}^{\mathbf{Q}}(f-w_0)\leq 0, \quad \mathbf{Q}\in\mathbb{M}$$

halmaz. Nyilvánvaló módon ez ekvivalens[8] a

$$(\mathbf{Q},f-w_0)\doteq\sum_k q_k\left(f_k-w_0\right)\leq 0, \quad \mathbf{Q}\in\operatorname{con}(\mathbb{M})$$

feltétellel. Mivel az előző következmény miatt $\operatorname{con}(\mathbb{M})=C^p$, ezért $f-w_0\in C^{pp}$. Mivel a C zárt konvex kúp, ezért $C^{pp}=C$, így $f-w_0\in C$, vagy ami ugyanaz, $f\in w_0+C$, vagy ami ugyanaz

$$f\leq w_0+\sum_{t=1}^{T}\Delta S(t)\,\theta(t).$$

Miként megjegyeztük az u szigorú monotonitása miatt az optimumok szempontjából a K helyébe mindig C írható, ezért a második feladat lehetséges megoldásai egyúttal az elsőnek is lehetséges megoldásai. A fordított irányú tartalmazás nyilvánvaló, ugyanis ha $\mathbf{Q}\in\mathbb{M}$, akkor mivel a $(\theta(t))_{t=1}^{T}$ sorozat előrejelezhető $\mathbf{M}^{\mathbf{Q}}\left(\sum_{t=1}^{T}\Delta S(t)\,\theta(t)\right)=0$, következésképpen

$$\mathbf{M}^{\mathbf{Q}}(f)\leq w_0+\mathbf{M}^{\mathbf{Q}}\left(\sum_{t=1}^{T}\Delta S(t)\,\theta(t)\right)=0=w_0.$$

Vagyis a C-vel definiált első feladat minden lehetséges megoldása egyúttal lehetséges megoldása a második feladatnak is és fordítva. Így mivel a célfüggvények azonosak a két feladat optimális megoldása megegyezik[9]. Hasonlóan látható be, hogy a két feladatnak csak egyszerre nem lehet optimális megoldása.

□

A haszonmaximalizációs feladat megoldását a Lagrange-multiplikátor módszer segítségével szeretnénk megadni. A feladat második megfogalmazása majdnem alkalmas a módszer alkalmazására, az egyetlen gond, hogy a feltételi halmazt definiáló egyenlőtlenségek száma végtelen. A Lagrange-multiplikátor módszer használatához vegyük észre, hogy az $\mathbb{M}$ éppen a C^p kúp és az egységszimplex metszete. Mivel a C egy véges kúp, ezért a C^p polárisa is egy véges kúp, így az $\mathbb{M}$ egy korlátos poliéder, így az $\mathbb{M}$ az extremális pontjainak konvex kombinációja. Világos, hogy a második feladatban elegendő ezekre az extremális pontokra megkövetelni az egyenlőtlenség teljesülését. Jelölje tehát $\{\mathbf{Q}_1,...\mathbf{Q}_M\}$ az $\mathbb{M}$ extremális pontjainak halmazát. Jelöljük az egyes kimenetelek $\mathbf{P}$ szerinti valószínűségeit p_n-nel, a fenti $\{\mathbf{Q}_1,...\mathbf{Q}_M\}$ halmaz egy $\mathbf{Q}_m$ vektorának elemeit pedig q_n^m-nel. Ekkor a fenti (7.2) maximumprobléma Lagrange-függvénye

$$\begin{aligned} L(f_1,...f_N,\eta_1,...\eta_M) &= \sum_{n=1}^{N}p_n u(f_n)-\sum_{m=1}^{M}\eta_m\left(\sum_{n=1}^{N}q_n^m f_n-w_0\right)= \\ &= \sum_{n=1}^{N}p_n\left(u(f_n)-\sum_{m=1}^{M}\frac{\eta_m q_n^m f_n}{p_n}\right)+\sum_{m=1}^{M}\eta_m w_0. \end{aligned}$$

Vegyük észre, hogy mivel a feltételek lineárisak a célfüggvényhez tartozó szorzó választható nullától különbözőnek és mivel a célfüggvény konkáv ezért a feltételekhez tartozó együtthatókat negatívnak választottuk. Mivel a feltételi halmazok egyenlőtlenségek, ezért $\eta_m\geq 0$. Írjuk fel a feladatra a Kuhn–Tucker feltételeket! A Lagrange-multiplikátor módszer szerint alkalmas multiplikátorok esetén az L feltétel nélküli maximuma éppen megegyezik az eredeti függvény feltételes maximumával. A Lagrange-függvény stacionárius pontját felírva, felhasználva, hogy az u értelmezési tartománya nyílt, így a stacionárius pontban a derivált nulla

$$\frac{\partial L}{\partial f_n}=p_n\left(u'(\widehat{f}_n)-\sum_{m=1}^{M}\frac{\eta_m q_n^m}{p_n}\right)=0.$$

[8] Véges dimenzióban a várható érték éppen a valószínűségi vektorral való skaláris szorzat.
[9] A szigorú konkavitás miatt az optimális megoldás egyértelmű.

Mivel a feltétel szerint minden n-re $p_n > 0$, ezért

$$u'(f_n) = \sum_{m=1}^{M} \frac{\eta_m q_n^m}{p_n}.$$

Vezessük be a következő jelöléseket. Legyen $y \doteq \eta_1 + ... + \eta_M$. Ha $y = 0$, akkor az összes η_m is nulla. Ilyenkor az optimum szempontjából a feltételek mindegyike irreleváns, vagyis a feltételes optimum megegyezik a globális optimummal. De az u függvényre tett feltételek miatt a feltétel nélküli optimum nem létezik[10], így az $\mathbf{M}^{\mathbf{P}}(u(f))$ függvénynek nincsen globális optimuma. Így az általánosság megszoritása nélkül feltehetjük, hogy $y > 0$. Legyen $\mu_m \doteq \eta_m \backslash y$, $\mu \doteq (\mu_1, ...\mu_M)$ valamint

$$\mathbf{Q} \doteq \sum_{m=1}^{M} \mu_m \mathbf{Q}_m. \tag{7.3}$$

A definícióból evidens, hogy $\mathbf{Q}$ éppen az extremális pontok egy alkalmas konvex kombinációja[11], így $\mathbf{Q} \doteq (q_n) \in \mathbb{M}$. Az optimum feltétele tehát

$$u'(f_n) = y\frac{q_n}{p_n}.$$

Vegyük észre, hogy a q_n/p_n hányados éppen a $d\mathbf{Q}/d\mathbf{P}$ Radon–Nikodym derivált értéke az n-edik kimenetelen, így Lagrange-függvény stacionárius pontjára vonatkozó feltétel éppen

$$u'\left(\widehat{f}\right) = y\frac{d\mathbf{Q}}{d\mathbf{P}}.$$

Egyensúlyi állapotban a kereslet megegyezik a kínálattal. Ha a keresletet az u hasznossági függvény „generálja", akkor a mértékcsere éppen azt a $\mathbf{Q}$ mértéket adja, amelyre a Radon–Nikodym derivált arányos a határhasznokkal. Ennek megfelelően nem teljes piacon a hasznossági függvények egyértelműen kijelölik a martingálmértéket. Teljes piacon a hozzárendelés egyértelmű, vagyis ilyenkor a martingálmérték egyértelműen meghatározza az optimális fogyasztói döntést, vagyis a keresletet. De általános esetben a martingálmértékek által hordozott információ az egyensúlyi árakra nézve nem bír releváns tartalommal.

Az elmondottak azért lényegesek, mert a szokásos matematikai pénzügyi modellek azt sugalják, hogy a pénzügyi piacokon a származtatott termékek ára megmondható olyan kvázi-megfigyelhető adatok alapján mint a volatilitás vagy a kamatláb. További félrevezető momentum, hogy a martingálmértékről nem látszik közvetlenül, hogy szoros rokonságban van a klasszikus közgazdasági-matematikai elmélet duális változóival[12]. A pénzügyi irodalomban a mértékcserét olyan speciális tételekkel mint a Girszanov-tétel szokás megadni. Nem evidens azonban az, hogy ez a sajátos megközelítés csak a folytonos időhorizont miatt szükséges, ugyanis folytonos időhorizonton a dualitás technikája jóval bonyolultabb, mint az általunk tárgyalt véges esetben. Vagyis sokkal inkább a matematikai háttér és eszköztár, mint a tényleges pénzügyi probléma miatt szükséges a tételre hivatkozni. Folytonos időhorizonton a technikai nehézségek elkerülése céljából érdemes egy speciális, ám félrevezető kerülő utat választani. A Girszanov-tétel használata azért félrevezető, mert egyrészt némiképpen misztikus, és ezért a problémát mélyebbnek tünteti fel, mint amilyen az valójában, másrészt azt sugalja, mintha a pénzügyi elmélet más lenne, mint a standard közgazdasági elmélet. A sokat hangoztatott tudományos áttörés, miszerint a drift tagnak a származtatott termékek árazásában nincsen szerepe éppen azt jelenti, hogy a kockázati preferenciák nem játszanak ilyenkor szerepet. Még annyira sem, hogy az egyébként megfigyelhető alaptermékі hozamoknak sincsen szerepe a származtatott termék árazása során[13]. Döbbenetes tudományos

[10] A monotonitás miatt a feltétel nélküli optimum végtelen.

[11] A μ_m számok nem negatívak és az összegük egy.

[12] Lineáris programozás duális megoldása, Neuman-modell, lineáris tevékenységelemzés, Lagrange-multiplikátorok stb.

[13] Tegyük fel, hogy két alaptermék közül az egyik kétszer olyan gyorsan nő átlagban mint a másik. Ennek ellenére a call opciójuk ára az elmélet szerint azonos, feltéve persze, hogy a volatilitásuk azonos. Ez azonban igen kétséges, rendkívül félrevezető következtetés.

felfedezés! Hasonlóan mély mint az anyag kvantumos viselkedése. Nobel-díjat nekik! Ugyanakkor ez a következtetés nem a sokat hangsúlyozott nincsen arbitrázs feltétel következménye, hanem sokkal inkább a teljességet biztosító integrálreprezentációs tétel folyománya, és így erősen modellspecifikus eredmény. Akárhogyan is van, az impicit üzenet világos, bár rendkívül veszélyes és hamis: A derivatív üzletek területén lehet kockázat nélkül kockázatot vállalni!

8. fejezet

Ellenőrző feladatok

Az alábbiakban néhány egyszerű feladatot és kérdést fogalmazunk meg. A feladatokban a w Wiener-folyamat, a w_H frakcionális Wiener-folyamatot jelöl.

1. Mikor mondunk egy portfoliót önfinanszírozónak? Mikor van egy piacon arbitrázs?
2. Miért alapvető jelentőségű az integrálreprezentációs tétel?
3. Pénzügyi szempontból miért fontos a kvadratikus variáció?
4. Az
$$w^2(t), \sin w(t), \int_0^t w(s)\,ds, \int_0^t s\,dw(s), \int_0^t \sin w(s)\,dw(s),$$
$$w_H(t) + t^2, \int_0^t w_H(s)\,ds$$
folyamatok közül melyik martingál és melyik szemimartingál? Ha a folyamat szemimartingál, akkor adja meg a folyamat felbontását lokális martingálra és korlátos változású folyamatra!
5. Legyen
$$M(t) \circeq \exp\left(w(t) - \frac{t}{2}\right)$$
a $w(t)$ Wiener-folyamathoz tartozó exponenciális martingál! Teljesül-e az $dM = Mdt$, illetve az $dM = Mdw$ egyenlőség?
6. Igaz-e, hogy az
$$M(t) \circeq \exp\left(w(t) - \frac{t}{2}\right)$$
folyamat martingál? Indokolja a választ! Milyen a és b paraméterek mellett lesz az
$$M_{a,b}(t) \circeq \exp\left(a \cdot w(t) - \frac{b \cdot t}{2}\right)$$
folyamat martingál? Mi a helyzet, ha az a paraméter tiszta imaginárius komplex szám? Próbáljuk meg általánosítani a feladatot Lévy-folyamatokra? Lévy-folyamat esetén mit kell írni a $bt/2$ tag helyébe? Mi a helyzet valós és mi a helyzet tiszta imaginárius a paraméter esetén?
7. Adja meg az Itô-integrál konstrukcióját! Mutassa meg, hogy az integrál értéke ekvivalens mértékcsere esetén nem függ az alapul vett mértéktől.
8. Hasonlítsa össze az Itô-formulát Wiener-folyamat és frakcionális Wiener-folyamat esetén!

9. Mutassuk meg, hogy ha az M egy folytonos lokális martingál és az M trajektóriái korlátos változásúak, akkor az M trajektóriái konstansok.

10. Mikor mondunk egy sztochasztikus folyamatot martingálnak? Mit tudunk a folytonos martingálok kvadratikus variációjáról és teljes megváltozásáról? Mit tudunk mondani ha a folyamat nem folytonos?

11. Bizonyítsuk be, hogy ha az M folytonos lokális martingál, akkor az $M^2 - \langle M \rangle$ is lokális martingál!

12. Számolja ki az $\int_0^1 \exp(s)\, dw(s)$ integrál eloszlását!

13. Számolja ki az $\int_0^1 \sin s dw(s)$ integrál szórását!

14. Számolja ki az $\int_0^1 w(s)\, dw(s)$ integrál szórását!

15. Számolja ki az $\int_0^1 w^2(s)\, ds$ integrál várható értékét!

16. Számolja ki az $\mathbf{M}(\cos w(t))$ és az $\mathbf{M}(\langle \sin w \rangle (t))$ függvényeket!

17. Számolja ki az $\mathbf{M}(\langle w \rangle (t))$, $\mathbf{M}\left((\langle w \rangle)^2 (t)\right)$ és az $\mathbf{M}\left(\left\langle w^2 \right\rangle (t)\right)$ függvényeket!

18. Indokolja, hogy ha a ξ és az η függetlenek, akkor $\mathbf{M}(\xi \mid \eta) = \mathbf{M}(\xi)$!

19. Indokolja a feltételes várható értékre vonatkozó toronyszabályt!.

20. Indokolja a feltételes várható értékre vonatkozó kiemelési szabályt!

21. Legyen a ξ és az η egyenletes eloszlású az $\left\{x^2 + y^2 \leq 1\right\}$ egységkörön. Számolja ki az $\mathbf{M}(\xi \mid \eta = y)$ regressziós függvényt!

22. Legyen $X(t) \triangleq \pi(t) - \lambda t$ az úgynevezett kompenzált Poisson-folyamat. Számolja ki az X teljes megváltozását, illetve a kvadratikus variációját!

23. Számolja ki a $t^2, \sin t, \exp(t)$ folyamatok teljes megváltozását!

24. Számolja ki a $w^2, \sin w, \exp(w)$ folyamatok kvadratikus variációját!

25. Számolja ki a $w^2, \sin w, \exp(w)$ folyamatok teljes megváltozását!

26. Igaz-e a $dw^2 = dt$, illetve a $(dw)^2 = dt$ formula? Legyen S folytonos lokális martingál. Mikor igaz a $(dS)^2 = d\langle S \rangle$, illetve a $d\left(S^2\right) = d\langle S \rangle$ formula?

27. Milyen kapcsolat van az elemi analízisben tárgyalt parciális integrálási formula és az általunk tárgyalt parciális integrálási formula között?

Tárgymutató

Irodalomjegyzék

[1]

[2]

[3]