Európai opciók árazása folytonos időhorizonton

A szenvedéseink első célja, az első csalódások

Medvegyev Péter

2009

Az alapfeladat, az árazási képlet

A származtatott termékek árazásának fő állítása, hogy megfelelő „matematikai és közgazdaság” feltételek teljesülése esetén ha H_T valamely $t = T$ időpontban esedékes követelés, akkor a $t = 0$ időpontban a követelés ára

$$\pi(H_T) = \mathbf{E}^{\mathbf{Q}}\left(\frac{H_T}{R_T}\right),$$

ahol R_T a diszkont tényező és $\mathbf{Q}$ az úgynevezett lokális martingál mérték. Emlékeztetünk, hogy diszkrét és véges időhorizonton a képlet a teljesség megkötése esetén, felhasználva a nincsen arbitrázs tulajdonságot, érvényes minden H_T-re. Ha a piac nem teljes, de arbitrázsmentes, akkor az egyenlőség teljesüléséhez elegendő, hogy a H_T „sztochasztikus integrálként” előállítható legyen az alaptermékekkel.

Az egyenlőség, szemben a diszkrét és véges időhorizonttal, folytonos időhorizont esetében általában nem teljesül. Az egyenlőség teljesüléséhez szükséges legfontosabb feltétel, hogy a H_T követelésnek és a piacot leíró kötvény és részvény folyamatoknak mérhetőnek kell lenni a véletlen forrást reprezentáló valamely Wiener-folyamat által generált filtrációra nézve. A megengedett filtrációra tett megszorítás az integrálreprezentációs tétel folyománya és lényegében a teljesség feltétele folytonos időhorizontra.

Lehetséges porfoliók

További probléma, hogy a sztochasztikus integrálok általában csak lokális martingálok és folytonos időhorizonton a lokális martingálok nem egyszerűen rosszul integrálható martingálok. Ennek fontos következménye, hogy az integrálreprezentációs tételben a konstans általában nem egyértelmű. Ugyancsak a lokális martingál tulajdonság következménye, hogy még véges időhorizonton is lehetséges a „duplázási stratégia”, így megengedett, lehetséges portfolió alatt az alulról korlátos portfoliókat értjük. Ezen két jelenség miatt folytonos időhorizonton az árazóképlet csak szigorú matematikai és közgazdasági megkötések teljesülése esetén alkalmazható.

Az értékfolyamat, önfinanszírozás

Az alábbiak során csak két termékkel foglalkozunk. Ez a gondolatmenetet, főleg a jelölést, jelentősen leegyszerűsíti. Az általános eset hasonlóan tárgyalható. Legyen (R, S) két kockázatos termék és jelölje (X, Y) a termékekből tartott mennyiségeket. Az opcióárazás szokásos modelljében R a kötvény, S a részvény ára. Az (R, S) folyamatokról feltesszük, hogy folytonos szemimartingálok, az (X, Y) portfolió súlyokból álló folyamatokról pedig tegyük fel, hogy az alábbi integrálok léteznek. Az (X, Y) mennyiségeket tartalmazó portfolió értéke értelemszerűen

$$V \circeq XR + YS.$$

Definition

Az (X, Y, S, R) vektorfolyamatot önfinanszírozónak mondjuk, ha

$$V - V(0) = X \bullet R + Y \bullet S.$$

Az értékfolyamat, önfinanszírozás

Az önfinanszírozás definíciója jobban érthető, ha az integrálokat a hagyományos jelöléssel írjuk fel. Az önfinanszírozás feltétele

$$V(t) - V(0) = \int_0^t X(s)\, dR(s) + \int_0^t Y(s)\, dS(s),$$

amely szerint a portfolió értékét a t időpontban úgy kapjuk, hogy a portfolió nulla időpontban vett értékéhez hozzáadjuk a portfolióban szereplő eszközök

$$X(s)\, dR(s) + Y(s)\, dS(s)$$

értékváltozásából származó nyereségek és veszteségek kumulált összegét. Hangsúlyozni kell, hogy a képlet a diszkrét időhorizonton tárgyalt egyenlőség formális átvételéből adódik. Ennek megfelelően folytonos időhorizonton az önfinanszírozás interpretációja nem annyira kézenfekvő, mint a diszkrét esetben.

Kumulált árfolyamnyereségek

Az interpretációval kapcsolatos legnagyobb nehézség abból ered, hogy az önfinanszírozást diszkrét időhorizonton az

$$Y(t)S(t)+R(t)X(t)=Y(t+1)S(t)+X(t+1)R(t)$$

képletből definiáltuk, amely tartalmilag tényleg az önfinanszírozást jelenti és az integrálalakot ennek következményeként definiáltuk. A definícióból ugyancsak nem világos, hogy az $(X(s), Y(s))$ „időpontja” miként viszonyul a $(dR(s), dS(s))$ időpontjához. Ha azonban az Itô-integrálásnál megszokott konvenciót vesszük, akkor a megváltozások az s időpont „után” következnek be. Az önfinanszírozás elnevezés némiképpen félrevezető, talán jobb lenne költségmenetes kumulált árfolyamnyereségről beszélni.

Az értékfolyamat szemimartingál

Az önfinanszírozás feltétele miatt a V értékfolyamat szemimartingál. Vegyük észre, hogy az, hogy a V szemimartingál egyedül az önfinanszírozás feltételéből következik, ugyanis ilyenkor a V sztochasztikus integrálok összege. Mivel az X és az Y nem feltétlenül szemimartingálok, általában az $XR + YS$ szorzat nem lesz automatikusan szemimartingál.

Az ármérce, diszkontált porfoliók

Legyen U egy további folytonos szemimartingál. Ha $U \neq 0$, akkor az S és R termékek árát kifejezhetjük az U-ben is, vagyis ha $U \neq 0$, akkor az U válaszható ármércének. Mivel a megengedett portfolióknak alulról korlátosnak kell lenni, így fel kell tenni, hogy $U > 0$. Az $1/x$ függvény az $x > 0$ halmazon tetszőlegesen sokszor deriválható, így az Itô-formula miatt az $\overline{U} \mathrel{\hat{=}} S/U$ és az $\overline{R}/U$ szintén szemimartingál és az új ármérce mellett a portfolió értéke

$$\overline{V} \mathrel{\hat{=}} X\frac{R}{U} + Y\frac{S}{U} \mathrel{\hat{=}} X\overline{R} + Y\overline{S}.$$

Kézenfekvően merül fel a kérdés, hogy vajon az $\left(X, Y, \overline{S}, \overline{R}\right)$ vektorfolyamat önfinanszírozó marad vagy sem, vagyis érvényes-e a

$$\overline{V} - \overline{V}(0) = X \bullet \overline{R} + Y \bullet \overline{S},$$

egyenlőség?

Az ármérce, diszkontált porfoliók

A V szemimartingál tulajdonság miatt alkalmazható a parciális integrálás formulája, amely szerint

$$\overline{V} \circeq \frac{V}{U} = \overline{V}(0) + V \bullet \frac{1}{U} + \frac{1}{U} \bullet V + \left[V, \frac{1}{U}\right].$$

Vegyük észre, hogy a formula felírásakor kihasználtuk, hogy a V és az U folytonos. A portfolió definícióját beírva

$$\begin{aligned} V \bullet \frac{1}{U} &\circeq (XR + YS) \bullet \frac{1}{U} = \\ &= XR \bullet \frac{1}{U} + YS \bullet \frac{1}{U} = \\ &= X \bullet \left(R \bullet \frac{1}{U}\right) + Y \bullet \left(S \bullet \frac{1}{U}\right). \end{aligned}$$

Az ármérce, diszkontált porfoliók

Mivel a V önfinanszírozó, a második integrál az önfinanszírozás definíciója alapján

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{U} \bullet V &\circeq \frac{1}{U} \bullet (V(0) + X \bullet R + Y \bullet S) = \\
&= \frac{1}{U} \bullet (X \bullet R + Y \bullet S) = \\
&= \frac{1}{U} \bullet (X \bullet R) + \frac{1}{U} \bullet (Y \bullet S) = \\
&= \frac{1}{U} X \bullet R + \frac{1}{R} Y \bullet S = \\
&= X \bullet \left(\frac{1}{U} \bullet R\right) + Y \bullet \left(\frac{1}{U} \bullet S\right).
\end{aligned}
$$

Az ármérce, diszkontált porfoliók

A képletben szereplő kvadratikus variáció a sztochasztikus integrál kvadratikus variációjának képletét, illetve a V önfinanszírozó voltát felhasználva

$$\begin{aligned}\left[V, \frac{1}{U}\right] &= \left[V(0) + X \bullet R + Y \bullet S, \frac{1}{U}\right] = \\ &= X \bullet \left[R, \frac{1}{U}\right] + Y \bullet \left[S, \frac{1}{U}\right].\end{aligned}$$

Az ármérce, diszkontált porfoliók

A három tagot visszahelyettesítve, elemi átrendezéssel

$$\begin{aligned}\overline{V}-\overline{V}(0) &= X\bullet\left(R\bullet\frac{1}{U}+\frac{1}{U}\bullet R+\left[R,\frac{1}{U}\right]\right)+\\ &\quad +Y\bullet\left(S\bullet\frac{1}{U}+\frac{1}{U}\bullet S+\left[S,\frac{1}{U}\right]\right).\end{aligned}$$

A zárójelekben ismételten a parciális integrálás formulája szerint

$$\begin{aligned}\overline{V}-\overline{V}(0) &= X\bullet\left(\frac{R}{U}-\frac{R(0)}{U(0)}\right)+Y\bullet\left(\frac{S}{U}-\frac{S(0)}{U(0)}\right)=\\ &= X\bullet\overline{R}+Y\bullet\overline{S}.\end{aligned}$$

Az ármérce, diszkontált porfoliók

A három tagot visszahelyettesítve, elemi átrendezéssel

$$\begin{aligned}\overline{V}-\overline{V}(0) &= X\bullet\left(R\bullet\frac{1}{U}+\frac{1}{U}\bullet R+\left[R,\frac{1}{U}\right]\right)+\\ &\quad +Y\bullet\left(S\bullet\frac{1}{U}+\frac{1}{U}\bullet S+\left[S,\frac{1}{U}\right]\right).\end{aligned}$$

A zárójelekben ismételten a parciális integrálás formulája szerint

$$\begin{aligned}\overline{V}-\overline{V}(0) &= X\bullet\left(\frac{R}{U}-\frac{R(0)}{U(0)}\right)+Y\bullet\left(\frac{S}{U}-\frac{S(0)}{U(0)}\right)=\\ &= X\bullet\overline{R}+Y\bullet\overline{S}.\end{aligned}$$

Az ármérce, diszkontált porfoliók

A gondolatmenet nem teljesen hibátlan, ugyanis hallgatólagosan, például az integrálok additivitásakor, kihasználtuk, hogy többek között az $XR \bullet U^{-1}$ integrál létezik. Ha például

$$R(t) = U(t) \stackrel{\circ}{=} \exp(\int_0^t r(s)\, ds,$$

ahol az $r \geq 0$ esetleg véletlen is lehet, akkor

$$\left(XR \bullet U^{-1}\right)(t) = \int_0^t X(s) R(s) r(s) R^{-1}(s)\, ds = \int_0^t X(s) r(s)\, ds.$$

Mivel az önfinanszírozás definíciója miatt az

$$(X \bullet R)(t) = \int_0^t X(s) r(s) \exp\left(\int_0^s r(u)\, du\right) ds$$

integrál véges, ezért, felhasználva, hogy $\exp\left(\int_0^s r(u)\, du\right) \geq 1$ az $XR \bullet U^{-1}$ is véges.

Az ármérce, diszkontált porfoliók

Hasonló a helyzet, ha valamilyen mérték mellett az $U = S$ lokális martingál. Ilyenkor az $S > 0$ miatt $S = \exp(L - (1/2)[L])$ és így $S^{-1} = \exp((1/2)[L] - L)$, így az Itô-formula miatt

$$dS^{-1} = -S^{-1}dL, \quad dS = SdL.$$

Tehát

$$\left(YS \bullet U^{-1}\right)(t) = \left(YS \bullet S^{-1}\right)(t) = -\left(YSS^{-1} \bullet L\right)(t) = -(Y \bullet L)(t).$$

Ugyanakkor mivel az $Y \bullet S$ integrál létezik, ezért

$$\infty > Y^2 \bullet [S] = Y^2 S^2 \bullet [L].$$

Ugyanakkor az $S > 0$ és az S folytonossága miatt az $1/S^2$ lokálisan korlátos, lokalizáció után amiből az

$$Y^2 \bullet [L] = Y^2 S^2 S^{-2} \bullet [L] \leq n\left(Y^2 S^2 \bullet [L]\right) < \infty.$$

Az ármérce, diszkontált porfoliók

Ha diszkontfaktornak az R folyamatot tekintjük, akkor $\overline{R} = R/R = 1$, így a következő állítás evidens:

Theorem

Ha $R > 0$, akkor az (X, Y, R, S) pontosan akkor önfinanszírozó, ha a diszkontált értékfolyamatra

$$\overline{V} - \overline{V}(0) = X \bullet \overline{R} + Y \bullet \overline{S} = Y \bullet \overline{S}.$$

Alulról való korlátosság és az ármérce

A diszkontálás kapcsán jelezni kell, hogy a diszkontált értékfolyamat alulról való korlátosságát meg akarjuk őrizni, ez az ármércére további megkötéseket jelent. Ha a V negatív értéket is felvehet, akkor az U nem vehet fel tetszőlegesen kicsi értéket, mert akkor a V/U nem lenne alulról egyenletesen korlátos. Ennek elkerülése céljából számos szerző megköveteli, hogy a V folyamat ne csak alulról korlátos legyen. hanem nem negatív is legyen. Ilyenkor tetszőleges $U > 0$ használható, ugyanis a $V/U \geq 0$ érvényben marad még akkor is ha az U esetleg tetszőlegesen kicsi értéket is felvehet.

Az arbitrázs fogalma

Az ekvivalens lokális martingálmértékek létezése szorosan összefügg az arbitrázs fogalmával.

Definition

Azt mondjuk, hogy az (R, S) modellben az (X, Y) pár arbitrázs a T időpontban,

1. ha az (X, Y, R, S) önfinanszírozó,
2. a $V \doteq XS + YR$ értékfolyamat a $[0, T]$ szakaszon alulról korlátos,
3. $V(0) = 0$, $V(T) \geq 0$ és $\mathbf{E}(V(T)) > 0$.

Ha a $\mathbf{P}$ és a $\mathbf{Q}$ mértékek ekvivalensek, akkor a sztochasztikus integrálok megegyeznek, és a mértékek ekvivalenciája miatt az utolsó egyenlőségben a $\mathbf{P}$ helyébe $\mathbf{Q}$ is írható, vagyis az arbitrázs fogalma invariáns az ekvivalens mértékcserére nézve. Emlékeztetünk, hogy az értékfolyamat alulról való korlátosságára azért van szükség, mert a feltétel nélkül általában tetszőleges érték előállítható lenne önfinanszírozó portfolióval, vagyis a nincsen arbitrázs feltétel e megkötés nélkül nem teljesülhetne.

Lokális martingálmérték

Definition

Azt mondjuk, hogy az $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P}, \mathcal{F})$ téren értelmezett (R, S) modell rendelkezik lokális martingálmértékkel, ha létezik egy a $\mathbf{P}$-vel ekvivalens $\mathbf{Q}$ valószínűségi mérték és olyan U ármérce, amely mellett az $\overline{S} \circeq S/U$ és $\overline{R} = R/U$ diszkontált árfolyamok lokális martingált alkotnak. Ha másképpen nem mondjuk, akkor ármércén mindig az R kötvényt értjük. Ilyenkor a $\mathbf{Q}$ pontosan akkor lokális martingálmérték ha az $\overline{S} \circeq S/R$ diszkontált folyamat lokális martingál. Hasonlóan definiálhatjuk a martingálmértéket.

Nyilvánvaló módon a $\mathbf{Q}$ függ az ármércétől. Ha ennek szerepe van, akkor az ármércét a $\mathbf{Q}$ alsó vagy felső indexeként szokás írni. Ha nincsen index, akkor az ármérce általában az R kötvény. Az R-hez tartozó martingálmértéket, illetve lokális martingálmértéket szokás kockázatsemleges mértéknek is nevezni.

Legyen U és W két ármérce és legyen $\mathbf{Q}^U$ és $\mathbf{Q}^W$ a két ekvivalens martingál, illetve ekvivalens lokális martingálmérték. Hogyan számolható ki a $d\mathbf{Q}^U/d\mathbf{Q}^W$ Radon–Nikodym derivált?.Miként korábban láttuk igaz a következő:

Theorem (Girszanov-tétel magja)

Tegyük fel, hogy a $\mathbf{P}$ *és a* $\mathbf{Q}$ *mértékek lokálisan ekvivalensek. Legyen* L *adaptált, jobbról reguláris folyamat és legyen* Λ *a* $d\mathbf{Q}/d\mathbf{P}$ *deriváltfolyamat.*

1. *Az* L *pontosan akkor lokális martingál a* $\mathbf{Q}$ *alatt, ha az* $L\Lambda$ *szorzat lokális martingál a* $\mathbf{P}$ *alatt.*
2. *Az* L *pontosan akkor martingál a* $\mathbf{Q}$ *alatt, ha az* $L\Lambda$ *szorzat martingál a* $\mathbf{P}$ *alatt.*

Ármérce váltása formula

Mivel $L \circeq S/U$ lokális martingál a $\mathbf{Q}^U$ alatt és $L\Lambda \circeq S/W$ lokális martingál a $\mathbf{Q}^W$ alatt, ezért az egyedül lehetséges szorzó nyilván $D \circeq U/W$. A D azonban nem választható Λ-nak, ugyanis a várható értéke nem lesz constans módon 1, amit a Λ deriváltfolyamattól elvárunk. Ennek megfelelően azt sejtjük, hogy

$$\Lambda = \frac{U}{W} \frac{W(0)}{U(0)}$$

és így

$$\frac{d\mathbf{Q}^U}{d\mathbf{Q}^W} = \frac{U(T)}{U(0)} \frac{W(0)}{W(T)}.$$

Ármérce váltása formula

Tegyük fel, hogy az ármérce éppen W és a $\mathbf{Q}^W$ mérték az aktuális mérték. Az U folyamat a W ármércében kifejezve U/W. A legtöbb alkalmazásban $\mathcal{F}_0$ a triviális σ-algebra és ilyenkor a $W(0)/U(0)$ konstans. Így az új ármérce régi ármérce szerinti értéke martingál a régi ármérce szerinti lokális martingál mérték szerint. Vagyis a régi ármérce által meghatározott „szemüvegen" keresztül nézve a folyamatokat az új ármérce martingál. Ha az R ármércéhez tartozó $\mathbf{Q}$ kockázatsemleges mérték mellett az $\overline{S} \circeq S/R > 0$ diszkontált árfolyam martingál, akkor az R/S martingál az S-hez tartozó $\mathbf{Q}^S$ mérték mellett.

$$\frac{d\mathbf{Q}^S}{d\mathbf{Q}} = \frac{S(T)}{S(0)}\frac{R(0)}{R(T)} = \frac{\overline{S}(T)}{\overline{S}(0)}.$$

Ha az $\overline{S}$ csak lokális martingál a $\mathbf{Q}$ alatt, akkor az S nem választható ármércének.

Kockázatsemleges mérték és ármérce csere

Theorem

Ha az (X, Y) pár arbitrázs az (R, S) modellben, és $U \geq 1$ tetszőleges ármérce, akkor az (X, Y) arbitrázs az $(R/U, S/U)$ modellben is. A $\mathbf{Q}$ *pontosan akkor kockázatsemleges mérték az (R, S) modellben, ha kockázatsemleges mérték az $(R/U, S/U)$ modellben.*

Az (X, Y) pár pontosan akkor önfinanszírozó az (R, S) árak mellett, ha önfinanszírozó az $(R/U, S/U)$ árak mellett. Az U pozitivitása miatt az $XS + YR$ előjele megegyezik az $XR/U + YS/U$ előjelével. Az $U \geq 1$ miatt a diszkontált értékfolyamat alulról korlátos marad. A második állítás evidens, ugyanis

$$\overline{S} \triangleq \frac{S}{R} = \frac{S/U}{R/U}.$$

Kockázatsemleges mérték és arbitrázs

Az alulról való korlátosság feltétele kulcs szerepet játszik a következő elemi, ugyanakkor a matematikai pénzügyekben kiemelkedő jelentőségű állításban:

Theorem

Ha a $[0, T]$ *szakaszon* $R \geq r_0 > 0$ *és az* (R, S) *modellben van ekvivalens lokális martingálmérték, akkor a modellben nincsen arbitrázs*

Az $R \geq r_0$ feltétel közgazdaságilag triviális megkötés, ugyanis az R általában a kötvényt jelenti, vagy valamilyen más kockázatmentes befektetést jelöl. Általában fel szokás tenni, hogy $R(0) = 1$, és a feltétel halgatólagosan azt jelenti, hogy a diszkonttényező ára monoton nő. Általában az R függhet a véletlentől, de szemben az S-sel az értéke nem csökkenhet.

Tegyük fel, hogy a $\mathbf{Q}$ mérték mellett az S/R lokális martingál. Legyen az (X, Y) az (R, S) modellben önfinanszírozó portfolió. Tegyük fel, hogy $V(0) = 0$ és a V legyen alulról korlátos. Az (X, Y) önfinanszírozó az $(1, \overline{S})$ modellben is és az $R \geq 1$ feltétel miatt a $\overline{V}$ diszkontált értékfolyamat szintén alulról korlátos. A sztochasztikus integrálok lokálisan martingálok, így a

$$\overline{V} \circeq \frac{XS + RY}{R} \circeq X \bullet \overline{S} + Y \bullet \overline{R} = X \bullet \overline{S}$$

alulról korlátos lokális martingál.

Kockázatsemleges mérték és arbitrázs

Emlékeztetünk arra, hogy minden alulról korlátos lokális martingál szupermartingál, ugyanis, ha az

$$\mathbf{E}\left(X^{\tau_n}(t) \mid \mathcal{F}_s\right) = X^{\tau_n}(s)$$

egyenlőségben alkalmazzuk a Fatou-lemmát, akkor

$$\begin{aligned} \mathbf{E}\left(X(t) \mid \mathcal{F}_s\right) &= \mathbf{E}\left(\lim_{n\to\infty} X^{\tau_n}(t) \mid \mathcal{F}_s\right) \leq \liminf_{n\to\infty} \mathbf{E}\left(X^{\tau_n}(t) \mid \mathcal{F}_s\right) = \\ &= \liminf_{n\to\infty} X^{\tau_n}(s) = X(s). \end{aligned}$$

Szupermartingálok esetén a várható érték csökken, tehát

$$\mathbf{E}^{\mathbf{Q}}\left(\overline{V}(T)\right) \leq 0,$$

következésképpen ha $\overline{V}(T) \geq 0$, akkor $\overline{V}(T) \overset{m.m.}{=} 0$, természetesen a $\mathbf{Q}$ mérték alatt. De a $\mathbf{Q} \sim \mathbf{P}$ ekvivalencia miatt a nullmértékű halmazok egybeesnek, így a $\mathbf{P}$ alatt is, amelyből $V(T) \overset{m.m.}{=} 0$ a $\mathbf{P}$ alatt, tehát az (X, Y) nem lehet arbitrázs.

Az állítás megfordítása

Problémát jelent, hogy az állítás nem fordítható meg, vagyis az arbitrázsmentesség még nem implikálja az ekvivalens martingálmérték létezését. Diszkrét időhorizont esetében az ekvivalens martingál mértéket közvetlenül az arbitrázsmentesség közgazdasági definíciójából származtattuk. Erre a folytonos időhorizont esetében nincsen mód. Ezért, ahhoz, hogy az árazási problémát kezelni tudjuk, vagyis hogy az ekvivalens martingálmértéket meg tudjuk konstruálni, közvetlen megszorításokat kell bevezetnünk a folyamatokra.

Itô-diffuziók definíciója

Definition

Az S folyamatot Itô-folyamatnak mondjuk, ha az S felírható

$$S(t) = S(0) + \int_0^t a(s, \omega)\, ds + \int_0^t b(s, \omega)\, dw(s)$$

módon, ahol w Wiener-folyamat, az a és b folyamatok adaptáltak és progresszíven mérhetőek, valamint

$$\begin{aligned} \mathbf{P}\left(\omega : \int_0^t |a(s, \omega)|\, ds < \infty\right) &= 1, \quad t > 0 \\ \mathbf{P}\left(\omega : \int_0^t b^2(s, \omega)\, ds < \infty\right) &= 1, \quad t > 0. \end{aligned}$$

Az S Itô-folyamatot formálisan szokás a $dS = a \cdot dt + b \cdot dw$ módon jelölni. A kifejezést az S sztochasztikus differenciáljának mondjuk.

A részvény ármozgás modellje

Tegyük fel, hogy a részvények ára kielégíti a

$$dS = S \cdot (\mu(t,\omega) \cdot dt + \sigma(t,\omega) \cdot dw)$$

sztochasztikus differenciálegyenletet, ahol μ és σ progresszíven mérhető folyamatok. Heurisztikusan ez azt jelenti, hogy a dS/S hozam egy $\mu dt + \sigma dw$ Itô-folyamatot alkot. Az egyenlet természetesen azonos az

$$S(t,\omega) - S(0,\omega) = \int_0^t \mu(s,\omega) S(s,\omega)\, ds + \int_0^t \sigma(s,\omega) S(s,\omega)\, dw(s)$$

integrálegyenlettel.

A részvény ármozgás modellje

Az integrálegyenletet kielégítő S az $S(0)$, illetve a μ és a σ ismeretében könnyen kiszámolható. Az Itô-formulát az $f(x) = \exp(x)$ függvényre alkalmazva azonnal ellenőrizhető, hogy az

$$S(t,\omega) = S(0)\exp\left(\int_0^t \mu(s,\omega) - \frac{\sigma^2(s,\omega)}{2} ds + \int_0^t \sigma(s,\omega)\, dw\right)$$

kielégíti a fenti egyenletet. Ha

$$X \circeq \int_0^t \mu(s,\omega) - \frac{\sigma^2(s,\omega)}{2} ds + \int_0^t \sigma(s,\omega)\, dw,$$

akkor az $[X](t) = \int_0^t \sigma^2 ds$ miatt

$$dS = SdX + \frac{1}{2} Sd[X] = S\mu dt + S\sigma dw.$$

Természetesen ebből még nem következik, hogy S az egyetlen ilyen folyamat. Megmutatható azonban, hogy általános körülmények teljesülése esetén a sztochasztikus differenciálegyenletek megoldása egyértelmű. Vegyük észre, hogy implicite megköveteltük, hogy az integrálok létezzenek, vagyis hogy a $\int_0^t |\mu|\, ds$ és az $\int_0^t \sigma^2 ds$ integrálok majdnem minden kimenetelre végesek legyenek. Az S folytonos, így minden trajektóriája korlátos, így ha a $\int_0^t |\mu|\, ds$ és az $\int_0^t \sigma^2 ds$ integrálok léteznek, akkor a μS és a σS integrálja is létezik.

A kötvény modellje

A kötvény mint kockázatmentes befektetés R áráról feltesszük, hogy az időben monoton nő és mivel a kötvény árával diszkontálni akarunk, ezért feltesszük, hogy az R pozitív. Ha még megköveteljük az $R(0) = 1$ egyenlőséget, akkor a Lebesgue-féle felbontási tétel miatt

$$R(t, \omega) = \exp(\log R(t, \omega)) = \exp\left(\int_0^t r(s, \omega)\, ds + h(t, \omega)\right),$$

ahol a h a Lebesgue-mérték szerint szinguláris. A $\log R$ kifejezés minden véges $[t, T]$, $t > 0$ szakaszon korlátos változású, így a mondott felbontás létezik.

A kötvény modellje

A modell közgazdasági tartalma segítségével, pontosabban a nincsen arbitrázs feltételt felhasználva, megmutatható, hogy az általánosság megszorítása nélkül a h szinguláris rész tekinthető nullának, így az egyszerűség kedvéért feltesszük, hogy $h = 0$, vagyis az R alakulását az

$$R(t, \omega) = R(0) \exp\left(\int_0^t r(s, \omega)\, ds\right),$$

vagy ami azonos az

$$dR = rRdt$$

egyenlettel írjuk le. Ha most $r \geq 0$, akkor $R \geq 1$, és így a korábbi tételek mind alkalmazhatóak. Ismételten implicite feltettük, hogy az $\int_0^t rds$ integrál majdnem minden kimenetelre véges.

Definition

Az így kapott (R, S)

$$\begin{aligned} dR &= rRdt, \quad R(0) = R_0, \\ dS &= S \cdot (\mu dt + \sigma dw), \quad S(0) = S_0 \end{aligned}$$

modellt az eszközárazás diffúziós modelljének szokás mondani.

Diszkontált árfolyamok

A részvény $\overline{S}$ diszkontált árfolyama triviálisan

$$\overline{S}(t,\omega) = \frac{S(t,\omega)}{R(t,\omega)} =$$

$$= \overline{S}(0)\exp\left(\int_0^t \mu(s,\omega) - r(s,\omega) - \frac{\sigma^2(s,\omega)}{2} ds + \int_0^t \sigma(s,\omega)\, dw\right),$$

így ismételten az Itô-formula miatt elemi számolással

$$d\overline{S} = \overline{S}\cdot((\mu - r)\, dt + \sigma dw),$$

vagy ami ugyanaz

$$\overline{S} - S(0) = \left((\mu - r)\cdot\overline{S}\right)\bullet[w] + \left(\sigma\cdot\overline{S}\right)\bullet w.$$

A kockázat piaci ára

Definition

Vezessük be a

$$\theta(t,\omega) \circeq \frac{\mu(t,\omega) - r(t,\omega)}{\sigma(t,\omega)}$$

folyamatot, amit a kockázat piaci árának szokás mondani. Természetesen ahhoz, hogy a képletnek legyen értelme fel kell tenni, hogy $\sigma(t,\omega) > 0$.

Kockázatsemleges mérték meghatározása

Tekintsük az

$$L \circeq -\theta \bullet w$$

lokális martingált és a

$$\begin{aligned}\Lambda(t) &\circeq \mathcal{E}(L)(t) \circeq \mathcal{E}(-\theta \bullet w)(t) = \\ &= \exp\left(-\int_0^t \theta(s,\omega)\,dw(s) - \frac{1}{2}\int_0^t \theta^2(s,\omega)\,ds\right)\end{aligned}$$

Girszanov-féle transzformációs függvényt, ahol értelemszerűen megköveteljük, hogy a formula értelmes, vagyis többek között feltesszük, hogy $\sigma > 0$ és az integrálok léteznek, vagyis feltesszük, hogy

$$\mathbf{P}\left(\omega : \int_0^t \theta^2(s,\omega)\,ds < \infty\right) = 1.$$

Kockázatsemleges mérték meghatározása

Feltesszük még, hogy a Girszanov-formula alkalmazásakor nem lép fel probléma, vagyis a Λ valódi martingál. A $\mathbf{Q}$ mértéket válasszuk a

$$\frac{d\mathbf{Q}}{d\mathbf{P}} \circeq \Lambda(T)$$

egyenlőséggel. Mivel a Λ martingál, ezért $\mathbf{E}(\Lambda(T)) = 1$, következésképpen a $\mathbf{Q}$ nem csak mérték, hanem valószínűségi mérték. Érdemes hangsúlyozni, hogy explicit módon nem tesszük fel a nincs arbitrázs feltételt. Burkoltan a Λ martingál volta helyettesíti ezt a feltételt.

Mielőtt tovább megyünk érdemes hangsúlyozni, hogy a megadott feltételek, különösen az, hogy a Λ martingál legyen igen erős megkötés. Az egyik leggyakrabban használt eset az, amikor a μ és a σ konstans, ilyenkor a θ konstans és a Λ egy

$$\Lambda(t) = \exp\left(-\theta w(t) - \frac{1}{2}\theta^2 t\right)$$

exponenciális martingál. Ilyenkor szokás az irodalomban Black–Scholes-modellről beszélni. Emlékeztetünk, hogy a Λ nem egyenletesen integrálható martingál, így a mértékcsere csak véges időhorizonton hajtható végre.

Áttérés kockázatsemleges mértékre

A $\mathbf{P}$ mérték mellett az $\overline{S}$ folyamat folytonos szemimartingál, amely lokális martingál része

$$M(t,\omega) \stackrel{\circ}{=} \int_0^t \sigma(s,\omega)\,\overline{S}(s,\omega)\,dw(s).$$

A Λ által megvalósított $\mathbf{Q}$ mérték mellett a Girszanov-tétel miatt az $\widehat{M} \stackrel{\circ}{=} \widehat{\sigma\overline{S}\bullet w}$ szintén lokális martingál, de a $\mathbf{Q}$ alatt.

Áttérés kockázatsemleges mértékre

Számoljuk ki az $\widehat{M}$ folyamatot! Az M képlete, a θ definíciója és a Girszanov-tétel felhasználásával

$$\begin{aligned}
\widehat{M} &\overset{\circ}{=} M - [-\theta \bullet w, M] = M + [\theta \bullet w, M] = \\
&= \sigma\overline{S} \bullet w + \theta \bullet \left[w, \sigma\overline{S} \bullet w\right] = \\
&= \sigma\overline{S} \bullet w + (\sigma\theta)\,\overline{S} \bullet [w] = \\
&= \sigma\overline{S} \bullet w + (\mu - r)\,\overline{S} \bullet [w] = \overline{S} - \overline{S}(0)\,.
\end{aligned}$$

Következésképpen a $\mathbf{Q}$ az $\overline{S}$ lokális martingálmértéke. Természetesen, a korábban elmondottak alapján ilyenkor nincsen a modellben arbitrázs.

Ugyanakkor azt nem láttuk be, hogy az arbitrázs hiánya esetén a Girszanov-transzformáció használható-e vagy sem. Ha a $\sigma > 0$, akkor a θ és a Λ definiálható, feltéve, hogy az integrálok léteznek, de nem tudjuk, hogy a Λ valódi martingál lesz vagy sem. Vagyis szemben a diszkrét időhorizonttal, nem jellemeztük a nincsen arbitrázs megkötést..

Áttérés kockázatsemleges mértékre

A szituáció jobb megértése céljából érdemes egy kis kitérőt tenni és egy másik módszerrel is belátni, hogy az $\overline{S}$ lokális martingál a $\mathbf{Q}$ alatt. Miként már láttuk

$$\overline{S}(t) = \overline{S}(0)\exp\left(\int_0^t \left(\mu - r - \frac{\sigma^2}{2}\right) ds + \int_0^t \sigma dw(s)\right).$$

A w Girszanov-transzformáltja

$$\widehat{w}(t) = w(t) - \int_0^t -\theta(s)\, ds = w(t) + \int_0^t \theta(s)\, ds.$$

Ebből

$$w(t) = \widehat{w}(t) - \int_0^t \theta(s)\, ds.$$

Ezt az $\overline{S}$ képletébe beírva, az asszociativitási szabály szerint

$$\overline{S}(0)\exp\left(\int_0^t \left(\mu - r - \frac{\sigma^2}{2}\right) ds + \int_0^t \sigma d\widehat{w}(s) - \int_0^t \sigma\theta ds\right).$$

Az összevonások után, felhasználva, hogy $\sigma\theta = \mu - r$

$$\overline{S}(0)\exp\left(-\int_0^t \frac{\sigma^2}{2} ds + \int_0^t \sigma d\widehat{w}(s)\right).$$

A $\widehat{w}$ a $\mathbf{Q}$ alatt Wiener-folyamat, így ha $N \overset{\circ}{=} \theta \bullet \widehat{w}$, akkor az N lokális martingál a $\mathbf{Q}$ alatt, hiszen egy $\mathbf{Q}$ alatti Wiener-folyamat szerinti sztochasztikus integrál. Mivel

$$\overline{S} = \overline{S}(0)\exp\left(N - \frac{1}{2}[N]\right) = \overline{S}(0)\,\mathcal{E}(N),$$

ezért a $\mathbf{Q}$ alatt az $\overline{S}$ valóban lokális martingál.

Ármozgás a kockázatmentes mérték alatt

Vegyük észre, hogy

$$S(t) = R(t)\,\overline{S}(t) = S(0)\exp\left(\int_0^t \left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right) ds + \int_0^t \sigma d\widehat{w}(s)\right).$$

A kifejezéshez tartozó sztochasztikus differenciálegyenlet

$$dS = rSdt + \sigma Sd\widehat{w}.$$

Vegyük észre, hogy az S alakulását leíró sztochasztikus differenciálegyemletben a μ helyébe r került, vagyis a μ „kiesett". Ugyanakkor persze a w helyébe pedig $\widehat{w}$ került.

Ármozgás a kockázatmentes mérték alatt

A kérdés csak az, hogy a $\widehat{w}$ milyen szempontból „helyettesíti" a w folyamatot. Egy szempontból biztosan: A $\widehat{w}$ a $\mathbf{Q}$ alatt szintén Wiener-folyamat, így az eloszlásaik megegyeznek!!! Vagyis az egyiknek a $\mathbf{P}$ alatt vett eloszlása megegyezik a másiknak a $\mathbf{Q}$ alatt vett eloszlásával. A mértékcsere hatására tehát az S folyamat nem változott, de a differenciálegyenletben szereplő „együtthatók" megváltoztak. Tegyük fel, hogy az $\mathcal{F}$ filtráció az S definíciójában szereplő w Wiener-folyamat által generált, kiterjesztett filtráció. Érdemes hangsúlyozni, hogy a $\widehat{w}$ szintén Wiener-folyamat az $\mathcal{F}$ alatt, de mivel a „helyettesítés nem tökéletes", a generált filtrációja esetlegesen szűkebb lehet mint az $\mathcal{F}$.

Kockázatsemleges mérték egyértelműsége

Legyen $\mathcal{F}$ a w által generált filtráció. Megmutatjuk, hogy ilyenkor a $\mathbf{Q}$ lokális martingálmérték egyértelmű. Legyen $\mathbf{R}$ az $\overline{S}$ egy másik lokális martingálmértéke. A

$$\Gamma(t) \mathrel{\hat{=}} \mathbf{E}\left(\frac{d\mathbf{R}}{d\mathbf{P}} \mid \mathcal{F}_t\right)$$

pozitív martingál, amely a filtrációra tett feltétel miatt folytonos. Tehát felírható $\mathcal{E}(L)$ módon. Az L az $\mathcal{F}$ szerint lokális martingál, az $\mathcal{F}$ pedig, miként feltételeztük, a w Wiener-folyamat filtrációja, így az integrálreprezentációs tétel miatt alkalmas φ folyamattal $L = \varphi \bullet w$. Megmutatjuk, hogy

$$\varphi \overset{m.m.}{=} -\theta.$$

Kockázatsemleges mérték egyértelműsége

Vegyük az $\overline{S}$ folytonos szemimartingál **P** alatti

$$\overline{S} \stackrel{\circ}{=} M + A \stackrel{\circ}{=} \left(\overline{S}(0) + \sigma\overline{S} \bullet w\right) + A$$

felbontását. Az ekvivalens mértékcsere során a folytonos szemimartingálok folytonos szemimartingálok lesznek. Az **R** ekvivalens lokális martingálmérték alatt tehát az $\overline{S}$ szintén folytonos szemimartingál, amely lokális martingál része az imént elmondottakkal analóg módon

$$M - [L, M] = M - \left[\varphi \bullet w, \sigma\overline{S} \bullet w\right] = M - (\varphi\sigma)\,\overline{S} \bullet [w]\,.$$

A folytonos szemimartingálok egyértelmű felbontása miatt, felhasználva, hogy az **R** az $\overline{S}$ lokális martingál mértéke az

$$\overline{S} = \left(M - (\varphi\sigma)\,\overline{S} \bullet [w]\right) + A + (\varphi\sigma)\,\overline{S} \bullet [w]\,,$$

felbontásban $A + (\varphi\sigma)\,\overline{S} \bullet [w] = 0$, vagyis

$$A \stackrel{m.m.}{=} -\sigma\varphi\overline{S} \bullet [w]\,.$$

Kockázatsemleges mérték egyértelműsége

A hagyományon integrál jelöléssel, majdnem minden ω esetén minden t-re

$$\int_0^t \theta(s,\omega)\,\sigma(s,\omega)\,\overline{S}(s,\omega)\,ds = -\int_0^t \sigma(s,\omega)\,\varphi(s,\omega)\,\overline{S}(s,\omega)\,ds.$$

Az θ, σ és φ folyamatok négyzetesen integrálhatóak, az $\overline{S}$ folytonos, így az integrandusok minden véges szakaszon integrálhatóak, következésképpen a két oldalt deriválva azonnal látható, hogy majdnem minden ω kimenetelre és majdnem minden s-re az integrandusok megegyeznek. A feltételek szerint $\overline{S} > 0$ és $\sigma > 0$, tehát

$$\theta(s,\omega) \overset{m.m.}{=} -\varphi(s,\omega),$$

következésképpen $\mathbf{P} = \mathbf{Q}$.

Integrálreprezentáció és mértékcsere

Theorem (Integrálreprezentációs tulajdonság invarianciája)

Legyen M egy lokális martingál és tegyük fel, hogy az M rendelkezik az integrálreprezentációs tulajdonsággal a $\mathbf{P}$ *mérték alatt. Legyen* $\mathbf{Q}$ *egy ekvivalens valószínűségi mérték és tegyük fel, hogy a* $\mathbf{P}$ *és a* $\mathbf{Q}$ *közötti Radon–Nikodym-folyamat egy L lokális martingállal felírható $\mathcal{E}(L)$ módon. Legyen $\widehat{M}$ az M Girszanov-transzformáltja. Ha N tetszőleges lokális martingál a* $\mathbf{Q}$ *alatt, akkor alkalmas Y esetén érvényes az*

$$N = N(0) + \left(Y \bullet \widehat{M}\right)(t), \quad 0 \leq t \leq T$$

reprezentáció, vagyis a $\mathbf{Q}$ *alatt az $\widehat{M}$ is rendelkezik az integrálreprezentációs tulajdonsággal a* $\mathbf{Q}$ *alatt.*

Integrálreprezentáció és mértékcsere

Az integrálreprezentációs tétel használatához vissza kell térni a **P** mértékre. Legyen

$$\frac{d\mathbf{Q}}{d\mathbf{P}} = \mathcal{E}(L)(T),$$

ahol L lokális martingál a **P** mérték alatt. Ekkor

$$\begin{aligned}\frac{d\mathbf{P}}{d\mathbf{Q}} &= (\mathcal{E}(L)(T))^{-1} \circeq \left(\exp\left(L - \frac{1}{2}[L]\right)(T)\right)^{-1} = \\ &= \exp\left(-L + \frac{1}{2}[L]\right)(T) = \\ &= \exp\left([L] - L - \frac{1}{2}[L - [L]]\right)(T).\end{aligned}$$

Vegyük észre, hogy az

$$[L] - L = (-L) - [-L, L]$$

éppen a $-L$ lokális martingál $\widehat{-L}$ Girszanov-transzformáltja, így lokális martingál a $\mathbf{Q}$ alatt. Vagyis

$$\frac{d\mathbf{P}}{d\mathbf{Q}} = \exp\left(\widehat{-L} - \frac{1}{2}\left[\widehat{-L}\right]\right)(T) = \mathcal{E}\left(\widehat{-L}\right).$$

Így a $\mathbf{Q}$-ból $\mathbf{P}$-be felírt Griszanov-transzformáció miatt az

$$\widehat{N} \circeq N - \left[N, \widehat{-L}\right] = N - [N, [L] - L] = N + [N, L]$$

lokális martingál a $\mathbf{P}$ alatt.

Az M a feltétel szerint rendelkezik az integrálreprezentációs tulajdonsággal, így van olyan Y, hogy

$$N + [N, L] = N(0) + Y \bullet M.$$

A két oldal kvadratikus variációját véve

$$[N, L] = [Y \bullet M, L] = Y \bullet [M, L].$$

Tehát átrendezve

$$\begin{aligned} N &= N(0) + Y \bullet M - [N, L] = \\ &= N(0) + Y \bullet M - Y \bullet [M, L] = \\ &= N(0) + Y \bullet (M - [M \bullet L]) \mathrel{\stackrel{\circ}{=}} \\ &\mathrel{\stackrel{\circ}{=}} N(0) + Y \bullet \widehat{M}, \end{aligned}$$

ami éppen az állítás bizonyítása.

Hasonlóan látható be a következő:

Theorem (Felcserélési szabály)

Ha $\mathbf{Q}$ *valamely Girszanov-transzformációhoz tartozó ekvivalens valószínűségi mérték, és*

$$N - N(0) = X \bullet M,$$

akkor

$$\widehat{N} - \widehat{N}(0) = X \bullet \widehat{M}.$$

Tegyük fel, hogy

$$N - N(0) = X \bullet M$$

Legyen L a Girszanov-transzformációban szereplő „kitevő”. Ekkor

$$[N, L] = [X \bullet M, L] = X \bullet [M, L].$$

Ezt a két oldalról kivonva

$$\begin{aligned}
\widehat{N} - \widehat{N}(0) &= N - N(0) - [N, L] = \\
&= X \bullet M - X \bullet [M, L] = \\
&= X \bullet (M - [M, L]) = \\
&= X \bullet \widehat{M}.
\end{aligned}$$

Rögzítsünk egy T időpontot. Miként korábban, legyen

$$\Lambda(t) \overset{\circ}{=} \mathcal{E}(-\theta \bullet w)(t) = \exp\left(-\int_0^t \theta(s,\omega)\,dw(s) - \frac{1}{2}\int_0^t \theta^2(s,\omega)\,ds\right),$$

és legyen $\mathbf{Q}$ a $\Lambda(T)$ által definiált ekvivalens lokális martingálmérték. Ügyeljünk θ előjelére! A gond abból származik, hogy a kockázat piaci árát pozitívnek szereznénk definiálni. Legyen H_T a T időpontban esedékes pénzügyi tranzakció. Tegyük fel, hogy az $\mathcal{F}$ filtráció a modellben szereplő w Wiener-folyamat filtrációja. A modellben tehát csak egy „véletlen forrás", a w szerepelhet. Ha például az r és a μ, vagy a σ meghatározásához további Wiener-folyamatokra van szükség és $\mathcal{F}$ az összes Wiener-folyamat által meghatározott filtráció, akkor a modell nem teljes, vagyis az összes $\mathcal{F}_T$-mérhető változó árát nem tudjuk az alábbi árazási képlettel megadni.

A fedező portfolió felírása

Vezessük be az

$$N(t) \triangleq \mathbf{E}^{\mathbf{Q}}\left(\overline{H}_T \mid \mathcal{F}_t\right)$$

Q-martingált. Természetesen csak akkor kapunk martingált, ha a $\overline{H}_T$ integrálható a **Q** alatt. Vegyük észre, hogy az N adaptált folyamat replikálja a $\overline{H}_T$ változót, ugyanis mivel $\overline{H}_T$ $\mathcal{F}_T$-mérhető triviálisan

$$N(T) \triangleq \mathbf{E}^{\mathbf{Q}}\left(\overline{H}_T \mid \mathcal{F}_T\right) = \overline{H}_T.$$

Ez azonban nem jelent semmit, ugyanis a replikálást önfinanszírozó, alulról korlátos portfolióval kell elvégezni.

Az önfinanszírozás biztosítása

Az önfinanszírozás azt jelenti, hogy a diszkontált értékfolyamatot a diszkontált árak szerinti sztochasztikus integrálként állítjuk elő. Ehhez elegendő megmutatni, hogy az $N - N(0)$ előállítható $X \bullet \overline{S}$ módon. A N-et a w integrálreprezentációs tulajdonsága miatt felírhatjuk a $\widehat{w}$ szerinti integrálként. Emlékeztetünk, hogy ha

$$M(t,\omega) \circeq \int_0^t \sigma(s,\omega)\,\overline{S}(s,\omega)\,dw(s),$$

akkor

$$\widehat{M} = \overline{S} - \overline{S}(0).$$

Az önfinanszírozás biztosítása

Felhasználva, hogy $\sigma S \neq 0$ és hogy a Girszanov-transzformáció felcserélhető a sztochasztikus integrálással.

$$N - N(0) = Y \bullet \widehat{w} = \sigma \overline{S} \frac{Y}{\sigma \overline{S}} \bullet \widehat{w} \overset{\circ}{=} \sigma \overline{S} X \bullet \widehat{w} =$$

$$= X \bullet (\sigma \overline{S} \bullet \widehat{w}) = X \bullet \left(\widehat{\sigma \overline{S} \bullet w} \right) \overset{\circ}{=} X \bullet \widehat{M} = X \bullet \overline{S}.$$

Tehát igazoltuk a következőt:

Theorem (A piac teljessége)

Ha $\mathcal{F}$ a modellben szereplő w Wiener-folyamathoz tartozó filtráció és N tetszőleges $\mathbf{Q}$-martingál az $\mathcal{F}$ filtrációra nézve, akkor az N előállítható az $\overline{S}$ sztochasztikus integráljaként:

$$N = N(0) + X \bullet \overline{S}.$$

A piac teljessége

Felhasználva, hogy az $\mathcal{F}_0$ éppen a triviális σ-algebra ha most újra $N(T) = \overline{H}_T$, akkor

$$\overline{H}_T = N(T) = N(0) + \int_0^T X d\overline{S} = \mathbf{E}^{\mathbf{Q}}\left(\overline{H}_T \mid \mathcal{F}_0\right) + \int_0^T X d\overline{S}.$$

Bár a levezetésből evidens, de érdemes hangsúlyozni, hogy az $X \bullet \overline{S}$ integrál létezik. Ennek szükséges és elégséges feltétele, hogy az

$$\int_0^t X^2 d\left[\overline{S}\right] = \int_0^t \frac{Y^2}{S^2\sigma^2}\sigma^2 S^2 ds = \int_0^t Y^2 ds$$

kifejezés majdnem minden kimenetelre véges legyen. Ami azonban az integrálreprezentációs tétel miatt triviálisan teljesül.

A követelésnek alulról korlátosnak kell lenni

Evvel azonban még nem vagyunk készen, ugyanis folytonos időhorizonton csak alulról korlátos önfinanszírozó portfoliókat engedünk meg. Ha a $\overline{H}_T$ alulról korlátos, például ha a H_T nem negatív, akkor az

$$N(t) = \mathbf{E}^{\mathbf{Q}}\left(\overline{H}_T \mid \mathcal{F}_t\right)$$

alulról korlátos, így a reprezentáló $X \bullet \overline{S}$ is alulról korlátos. Következésképpen találtunk egy olyan megengedett önfinanszírozó portfoliót, amellyel előállítottuk a diszkontált $\overline{H}_T$ követelést. Az előállításban a konstans éppen $\mathbf{E}^{\mathbf{Q}}\left(\overline{H}_T\right)$. Vegyük észre, hogy szemben a véges, diszkrét időhorizontos esettel nem hivatkozhatunk közvetlenül a nincs arbitrázs feltételre, mert az alulról való korlátosság feltétele miatt valamely megengedett portfolió mínusz egyszerese nem lesz feltétlenül alulról korlátos. Ezért diszkrét esethez képest közgazdaságilag egy kicsi módosítani kell a gondolatmenetet:

Szuperreplikálás

Ha valaki a H_T tranzakció eredményét „szintetikusan” kockázatmentes módon elő akarja állítani, akkor egy olyan x kezdeti összegre van szüksége, amelyből indított V értékfolyamatra

$$V_T(x) \geq H_T.$$

Definition

A fenti reláció teljesülése esetén azt mondjuk, hogy az x kezdeti befektetésből kiinduló portfolió szuperreplikálja a H_T követelést.

Szupermartingál tulajdonság

Diszkontálva

$$\overline{V}_T(x) \geq \overline{H}_T.$$

Az előállításban a $\overline{V}$-nak önfinanszírozónak és alulról korlátosnak kell lenni. Mivel a $\overline{V}$ az önfinanszírozás definíciója miatt egy $\overline{S}$ szerinti sztochasztikus integrál, és mivel az $\overline{S}$ a $\mathbf{Q}$ alatt lokális martingál, ezért a $\overline{V}$, mint sztochasztikus integrál, lokális martingál a $\mathbf{Q}$ alatt. Mivel alulról korlátos, ezért szupermartingál. Mivel a szupermartingálok nem növelik a várható értéket, ezért

$$\mathbf{E}^{\mathbf{Q}}\left(\overline{V}_T(x) \mid \mathcal{F}_0\right) \leq \mathbf{E}^{\mathbf{Q}}\left(\overline{V}_0(x) \mid \mathcal{F}_0\right) = x.$$

Van legkisebb replikáló konstans

A terméket eladó oldal a termék eladásából eredő kockázatot tökéletesen le akarja fedezni. Ezért csak akkor hajlandó az üzletbe belemenni, ha a kapott összegből fel tud építeni egy szuperreplikáló portfoliót. Ennek induló összege azonban nem lehet kisebb mint

$$\inf \{x \mid V_T(x) \geq H_T\} \geq \mathbf{E}^{\mathbf{Q}}\left(\overline{H}_T \mid \mathcal{F}_0\right).$$

Vegyük észre, hogy a korábban elmondottak miatt az infimum helyébe minimum írható és a minimum értéke $x = \mathbf{E}^{\mathbf{Q}}\left(\overline{H}_T \mid \mathcal{F}_0\right)$ és a szuperreplikáló egyenlőtlenség helyett egyenlőség van, vagyis

$$V_T(x) = H_T.$$

Ebből következően az $x = \mathbf{E}^{\mathbf{Q}}\left(\overline{H}_T \mid \mathcal{F}_0\right)$ az eladó szempontjából egy versenyképes ár.

Mi a helyzet a vevővel?

A kérdés csak az, hogy kérhet-e ettől eltérő árat? Ha a tényleges $\pi(H_T)$ ár nagyobb mint $\mathbf{E}^{\mathbf{Q}}\left(\overline{H}_T \mid \mathcal{F}_0\right)$, vagyis az imént konstruált, önfinanszírozó portfolió induló költsége, akkor a H_T drága, így el kell adni, a reprezentáló portfolió pedig olcsó és ezért azt meg kell venni. Ha eladjuk a H_T tranzakciót és dinamikusan felépítjük az X portfoliót, akkor a költségeink, az értékfüggvény, alulról korlátos. A nettó eredmény a $t = T$ időpontban

$$V_T - H_T = N(T) R_T - H_T = \overline{H}_T R_T - H_T = 0,$$

a $t = 0$ időpontban pedig a bevétel és a költség különbsége

$$\pi(H_T) - \mathbf{E}^{\mathbf{Q}}\left(\overline{H}_T \mid \mathcal{F}_0\right) > 0,$$

ami arbitrázs. Mivel a modellben a feltételek szerint van ekvivalens lokális martingálmérték az arbitrázs lehetősége ellentmondás. Ha az ár kisebb lenne, és a szereplők csak fedezett helyzetben hajlandók a terméket kínálni, akkor pusztán arbitrázs megfontolásokra építve senki sem lenne hajlandó az üzletbe belemenni, vagyis nem lennének eladók a piacon, így az üzlet nem jönne létre.

A közgazdasági modell

Másképpen fogalmazva az árazóképlet biztosításához szükséges közgazdasági modellben egyrészt az eladó a H_T-ért kapott árból fedezett helyzetbe akar kerülni. Ha nem tudja a követelést lefedezni, akkor a terméket a modell feltételei szerint nem adja el, ugyanis nem akar valódi kockázatot vállalni. Az arbitrázs lehetősége miatt az ár szükségszerűen a legolcsóbb fedezeti portfolió induló költsége, ugyanis magasabb ár esetén lehet arbitrálni. Közgazdaságilag elképzelhető, hogy a vevő hasznossági függvénye olyan, hogy a $\mathbf{E}^{\mathbf{Q}}\left(\overline{H}_T \mid \mathcal{F}_0\right)$ áron nem akarja a terméket megvenni, vagyis a vevő hasznossági függvénye olyan, hogy csak $\pi\left(H_T\right) < \mathbf{E}^{\mathbf{Q}}\left(\overline{H}_T \mid \mathcal{F}_0\right)$ ár esetén hajlandó a terméket megvenni. Ilyenkor, az eladó feltételezett „hozzáállása" miatt nincs üzlet és a termék nincsen is a piacon.

A közgazdasági modell

Szemben a szokványos közgazdasági helyzettel, az eladó nem feltétlenül akarja a terméket eladni, ugyanis az pusztán egy matematikai formula, így nem romlik, nincsen gyártási költsége stb. Vagyis a kereslet hiánya nem vezet az ár csökkenéséhez, illetve az alacsony ár nem feltétlenül vezett a kereslet növekedéséhez. Ez utóbbi oka, hogy a megengedett portfoliókra tett korlátozás miatt az eladási oldalon nem lehet arbitrálni. Hangsúlyozni kell, hogy a folytonos időhorizonton a mögöttes közgazdasági modell nem azonos a véges időhorizonton vett modellel. Véges időhorizonton mind a két oldalon az arbitrázs lehetősége határozza meg az árat a szereplők „hozzáállástól" függetlenül, vagyis véges időhorizonton az alacsony ár keresletet támaszt és emelni fogja az árat. Folytonos időhorizonton a duplázási stratégiából eredő arbitrázs miatt a helyzet nem szimmetrikus. Természetesen korlátos kifizetések esetén, például a put opcióknál, van alulról és felülről is korlátos replikáló stratégia, így ilyenkor mind a két irányba lehet arbitrálni.

A fair ár definíciója

Az elmondottakat a következő definícióval foglalhatjuk össze:

Definition

Valamely H_T követelés fair árán a

$$\pi(H_T) = \min\{x \mid V_T(X, x) \geq H_T\}$$

értéket értjük, feltéve ha létezik, ahol az X a lehetséges fedező portfolió súlyok halmazán fut keresztül.

A modell összefoglalása

Legyen w egy Wiener-folyamat és legyen $\mathcal{F}$ a w által generált filtráció. Tegyük fel, hogy

$$\begin{aligned} R(t,\omega) &= \exp\left(\int_0^t r(s,\omega)\,ds\right), \\ S(t,\omega) &= S(0)\exp\left(\int_0^t \mu(s,\omega) - \frac{\sigma^2(s,\omega)}{2} ds + \int_0^t \sigma(s,\omega)\,dw\right). \end{aligned}$$

Tegyük fel továbbá, hogy a kockázat piaci árának nevezett

$$\theta(t,\omega) \stackrel{\circ}{=} \frac{\mu(t,\omega) - r(t,\omega)}{\sigma(t,\omega)}$$

folyamat esetén a

$$\Lambda(t) \stackrel{\circ}{=} \mathcal{E}(-\theta \bullet w)(t) = \exp\left(-\int_0^t \theta(s,\omega)\,dw(s) - \frac{1}{2}\int_0^t \theta^2(s,\omega)\,ds\right)$$

folyamat valódi martingál a $[0, T]$ szakaszon.

A modell összefoglalása

Theorem

Legyen

$$\mathbf{Q}(A) \doteq \int_A \Lambda(T)\, d\mathbf{P}, \quad A \in \mathcal{F}_T.$$

Ha H_T *alulról korlátos és* $\mathcal{F}_T$*-mérhető, valamint*

$$\mathbf{E}^{\mathbf{Q}}\left(\overline{H}_T\right) = \mathbf{E}\left(\frac{H_T}{R_T}\Lambda(T)\right) < \infty,$$

akkor a H_T *fair ára éppen* $\mathbf{E}^{\mathbf{Q}}\left(\overline{H}_T\right)$.

1. megjegyzés

Természetesen a gondolatmenet kulcsa, egy olyan X konstruálása, amelyre

$$\overline{H}_T = \mathbf{E}^{\mathbf{Q}}\left(\overline{H}_T \mid \mathcal{F}_0\right) + \int_0^T Xd\overline{S}.$$

A $\mathbf{Q}$ alatt az $\overline{S}$ lokális martingál, így a sztochasztikus integrál szintén lokális martingál. Pusztán ebből azonban semmilyen következtetés nem lehetséges a

$$\overline{H}_T = x + \int_0^T Xd\overline{S}$$

alakú előállításokban szereplő x konstansokra. Itt lép be az a megkötés, hogy az $X \bullet \overline{S}$ integrálnak, vagyis a $\overline{H}_T$-nak alulról korlátosnak kell lenni. Mivel Fatou-lemma miatt az alulról korlátos lokális martingálok szupermartingálok, vagyis „vesztik" a várható értéket, ezért $\mathbf{E}^{\mathbf{Q}}\left(\int_0^T Xd\overline{S}\right) \leq 0$, így biztosan $x \geq \mathbf{E}^{\mathbf{Q}}\left(\overline{H}_T\right)$.

1. megjegyzés

Természetesen matematikailag semmi sem zárja, ki, hogy valamely $x > \mathbf{E}^{\mathbf{Q}}\left(\overline{H}_T \mid \mathcal{F}_0\right)$ esetén az előállítás ne teljesüljön. Ennek az árakra való hatását közgazdaságilag és nem matematikailag zárjuk ki a nincsen arbitrázs feltétellel. A gondolatmenetben a főszerepet nem az alulról való korlátosság, hanem a sztochasztikus integrál szupermartingál tulajdonsága játszotta. Erre vonatkozólag azonban nehéz értelmes feltételt mondani. Ugyanakkor korlátos kifizetéssel rendelkező termékek esetén pusztán az arbitrázs feltételére támaszkodva, vagyis a kockázati preferenciáktól függetlenül, az $\mathbf{E}^{\mathbf{Q}}\left(\overline{H}_T \mid \mathcal{F}_0\right) = \pi\left(H_T\right)$ formula indokolható, ugyanis ilyenkor mind replikáló portfolió mind a replikáló portfolió mínusz egyszerese megengedett, vagyis alulról korlátos.

Az $\mathbf{E}^{\mathbf{Q}}\left(\overline{H}_T \mid \mathcal{F}_0\right)$ konstanshoz tartozó $X \bullet \overline{S}$ replikáló, alulról korlátos folyamat mindig martingál. A

$$\overline{H}_T = \mathbf{E}^{\mathbf{Q}}\left(\overline{H}_T \mid \mathcal{F}_0\right) + \int_0^T X d\overline{S},$$

egyenlőség csak akkor teljesülhet, ha $\mathbf{E}^{\mathbf{Q}}\left(\int_0^T X d\overline{S} \mid \mathcal{F}_0\right) = 0$, amiből a szupermartingál tulajdonság miatt minden $t \leq T$-re

$$0 = \mathbf{E}^{\mathbf{Q}}\left(\int_0^0 X d\overline{S}\right) \geq \mathbf{E}^{\mathbf{Q}}\left(\int_0^t X d\overline{S}\right) \geq \mathbf{E}^{\mathbf{Q}}\left(\int_0^T X d\overline{S}\right) = 0,$$

így $\mathbf{E}^{\mathbf{Q}}\left(\int_0^t X d\overline{S}\right) = 0$. Ha egy szupermartingál tartja a várható értéket, akkor az martingál, így az $X \bullet \overline{S}$ martingál.

3. megjegyzés

A gondolatmenetben a főszerepet az integrálreprezentációs tétel játszotta. Technikailag a problémát a levezetésben az jelentette, hogy az N nem a $\mathbf{P}$ alatt, hanem a $\mathbf{Q}$ alatt volt martingál, így a $\mathbf{P}$ alatt csak szemimartingál volt. Ugyanakkor a $\mathbf{Q}$ alatt pedig a w nem volt Wiener-folyamat. Így az integrálreprezentációs tétel közvetlenül nem volt alkalmazható. Felvethető, hogy miért nem alkalmaztuk az integrálreprezentációs tételt a $\widehat{w}$ Girszanov-transzformáltra a $\mathbf{Q}$ alatt. Ennek oka az, hogy a $\widehat{w}$ ugyan Wiener-folyamat a $\mathbf{Q}$ alatt az eredeti $\mathcal{F}$ filtrációra nézve, de az általa generált filtrációról csak annyit tudunk, hogy része az $\mathcal{F}$-nek, így nem tudjuk, hogy az N martingál a $\widehat{w}$ szerinti filtrációra nézve, ugyanis elképzelhető, hogy az N nem is adaptált az $\mathcal{F}$-nél esetlegesen szűkebb $\widehat{w}$ által generált filtrációra nézve. Ez a komplikáció abból ered, hogy a μ, r és σ folyamatokról nem tettük, fel, hogy konstansok. Ha ezt a tényleges alkalmazásokban kiemelkedően fontos feltételt is megköveteljük, akkor erre az extra lépésre nincsen szükség, ugyanis a $\widehat{w}(t) = w(t) + \theta t$ által generált filtráció triviálisan megegyezik a w által generált filtrációval.

4. megjegyzés

Vegyük észre, hogy az integrálreprezentációs tételből származó Y nem feltétlenül folytonos. Így pusztán folytonos integrandusokkal az árazási problémát nem tudjuk megoldani, ugyanis az Y folyamat általában nem folytonos, csak előrejelezhető. Ez teszi szükségessé, hogy nem folytonos integrandusokra is tárgyaljuk a sztochasztikus integrálást.

5. megjegyzés

A pénzügyi irodalomban hangsúlyozni szokás, hogy a derivatív árazás problémája a szereplők kockázati preferenciáinak ismerete nélkül oldható meg. Ez az elmondottak alapján csak részben igaz, ugyanis az árazó képlet indoklása során fel kell tételezni, hogy a szereplők teljes fedezésre törekszenek, vagyis teljesen kockázat elutasítók. Az indoklás kulcsa a lehetséges portfoliókra vonatkozó alulról való korlátosság feltételezése volt. A feltétel fő előnye, hogy mértékinvariáns, így jól illeszkedik a mértékcsere általános „filozófiájába”. Hátránya azonban, hogy az említett pénzügyi gondolat nem igazolható maradéktalanul ilyenkor. Természetesen a kulcs probléma a megengedett portfoliók definíciójában van.

5. megjegyzés

Egy alternatív lehetőség, ha feltesszük, hogy csak olyan portfoliók megengedettek, amelyekre a portfolió súlyok $\mathcal{L}^2\left(\overline{S}\right)$-ba esnek. Ha a $\overline{H}_T$ szórása véges a $\mathbf{Q}$ alatt, továbbá a w és a $\widehat{w}$ által generálr filtrációk egybeesenek, akkor az integrálreprezentációs tétel miatt alkalmas $Y \in \mathcal{L}^2\left(\widehat{w}\right)$-ra

$$\begin{aligned}
\overline{H}_T - \mathbf{E}^{\mathbf{Q}}\left(\overline{H}_T \mid \mathcal{F}_0\right) &= \left(Y \bullet \widehat{w}\right)(T) = \left(\frac{Y}{\sigma\overline{S}}\sigma\overline{S} \bullet \widehat{w}\right)(T) = \\
&= \left(\frac{Y}{\sigma\overline{S}} \bullet \sigma\overline{S} \bullet \widehat{w}\right)(T) \circeq \left(X \bullet \left(\widehat{\sigma\overline{S} \bullet w}\right)\right)(T) = \\
&= \left(X \bullet \overline{S}\right)(T).
\end{aligned}$$

Mivel az $\overline{S}$-ot leíró sztochasztikus differenciálegyenlet miatt

$$\begin{aligned}
\mathbf{E}^{\mathbf{Q}}\left(X^2 \bullet \left[\overline{S}\right](T)\right) &= \mathbf{E}^{\mathbf{Q}}\left(\frac{Y^2}{\sigma^2 \overline{S}} \bullet \left[\overline{S}\right](T)\right) = \\
&= \mathbf{E}^{\mathbf{Q}}\left(\frac{Y^2}{\sigma^2 \overline{S}} \bullet \left[\sigma \overline{S} \bullet \widehat{w}\right](T)\right) = \\
&= \mathbf{E}^{\mathbf{Q}}\left(\frac{Y^2}{\sigma^2 \overline{S}} \bullet \left(\sigma \overline{S}\right)^2 \bullet \left[\widehat{w}\right](T)\right) = \\
&= \mathbf{E}^{\mathbf{Q}}\left(Y^2 \bullet \left[\widehat{w}\right](T)\right) < \infty,
\end{aligned}$$

ezért $X \in \mathcal{L}^2\left(\overline{S}\right)$, vagyis az X megengedett. Így a diszkrét és véges időhorizonton elmondott gondolatmenetet megismételve a kockázati preferenciáktól függetlenül igazolható az árazó képlet.

5. megjegyzés

A megközelítés nyilvánvaló hátránya, hogy az $X \in \mathcal{L}^2\left(\overline{S}\right)$ feltétel nem invariáns a mértékcserére, ugyanis csak az L^0 tér és nem az L^p terek változatlanok a mértékcsere során. Nyilvánvaló továbbá, hogy az $X \in \mathcal{L}^2\left(\overline{S}\right)$ feltételt a $\mathbf{Q}$ alatt kell érteni. Ebből következően a $\mathbf{P}$ mérték mellett egy portfolió megengedett volta nem ellenőrizhető közvetlenül, így fellép a „kalibrációs probléma”, vagyis meg kell tudni becsülni a $\mathbf{P}$ mérték alatt a $\mathbf{Q}$ mérték alatti felírt folyamatok paramétereit.

6. megjegyzés

Ezidáig csak a $t = 0$ időpontra határoztuk meg az árakat. De milyen folyamatot követ a származtatott termék ára a $0 \leq t \leq T$ időszak alatt? Megmutatjuk, hogy

$$\begin{aligned} \pi_t(H_T) &= \exp\left(\int_0^t r(s)\,ds\right)\mathbf{E}^{\mathbf{Q}}\left(\overline{H}_T \mid \mathcal{F}_t\right) = \\ &= \mathbf{E}^{\mathbf{Q}}\left(\exp\left(-\int_t^T r(s)\,ds\right)\cdot H_T \mid \mathcal{F}_t\right). \end{aligned}$$

6. megjegyzés

Tegyük fel, hogy a derivatív terméknek van piaca és az ára a t időpontban legyen $\pi_t(H_T)$. Heurisztikusan gondolkodva, ha a t időpontban $\pi_t(H_T)$ összegért megvesszük a derivatívát, akkor ez $T-t$ idő múlva H_T-t fog érni. A két összeget jelenértékre hozva a nincsen arbitrázs feltétel miatt

$$\pi_t(H_T)\exp\left(-\int_0^t r(s)\,ds\right) = H_T \exp\left(-\int_0^T r(s)\,ds\right),$$

amiből

$$\exp\left(-\int_t^T r(s)\,ds\right) H_T = \pi_t(H_T).$$

Ha a két oldalon feltételes várható értéket veszünk, akkor éppen a kívánt formulát kapjuk.

6. megjegyzés

A bizonyítást pontosítva a korábbi gondolatmenetben a 0 helyébe mindenhol a t értéket írva az integrálreprezentációs tulajdonság miatt

$$\overline{H}_T = \mathbf{E}^{\mathbf{Q}}\left(\overline{H}_T \mid \mathcal{F}_t\right) + \int_t^T X d\overline{S}.$$

Ugyanakkor a diszkontálás tényezőjében is a 0 helyébe a t értéket kell írni, így a $\overline{H}_T$ képlete

$$\overline{H}_T = \exp\left(-\int_t^T r(s)\, ds\right) H_T.$$

Black–Scholes modell

Az általános diffuziós modellt tovább konkretizálhatjuk. Ha a μ, r és a σ paraméterek konstansok, akkor szokás Black–Scholes modellről beszélni. Azonnal látható, hogy a Black–Scholes modell esetén az általános árazási formula feltételei teljesülnek. Ilyenkor a kockázat piaci ára $\theta \circeq \frac{\mu - r}{\sigma}$ konstans. A $\mathbf{Q}$ kockázatmentes mértéket generáló

$$\Lambda(t) = \exp\left(-\theta w(t) - \frac{1}{2}\theta^2 t\right)$$

folyamat martingál és az

$$\overline{S}(t) = S(0)\exp\left((\mu - r)t - \frac{\sigma^2}{2}t + \sigma w(t)\right)$$

diszkontált árfolyam a $\mathbf{Q}(A) = \int_A \Lambda(T)\, d\mathbf{P}$ lokális martingálmérték mellett valódi martingál.

Ennek igazolásához elegendő belátni, hogy az $\overline{S}$ várható értéke a $\mathbf{Q}$ mérték alatt konstans, ugyanis mivel a $\mathbf{Q}$ alatt nem negatív lokális martingál, ezért biztosan szupermartingál. Mivel $\mu - r = \theta\sigma$ ezért

$$
\begin{aligned}
\mathbf{E}^{\mathbf{Q}}\left(\overline{S}(t)\right) &= \mathbf{E}\left(\overline{S}(t)\frac{d\mathbf{Q}}{d\mathbf{P}}\right) = \mathbf{E}\left(\overline{S}(t)\exp\left(-\theta w(T) - \frac{1}{2}\theta^2 T\right)\right) = \\
&= \mathbf{E}\left(\mathbf{E}\left(\overline{S}(t)\exp\left(-\theta w(T) - \frac{1}{2}\theta^2 T\right) \mid \mathcal{F}_t\right)\right) = \\
&= \mathbf{E}\left(\overline{S}(t)\,\mathbf{E}\left(\exp\left(-\theta w(T) - \frac{1}{2}\theta^2 T\right) \mid \mathcal{F}_t\right)\right) = \\
&= \mathbf{E}\left(\overline{S}(t)\exp\left(-\theta w(t) - \frac{1}{2}\theta^2 t\right)\right) = \ldots
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\mathbf{E}^{\mathbf{Q}}\left(\overline{S}(t)\right) &= \mathbf{E}\left(\overline{S}(t)\exp\left(-\theta w(t)-\frac{1}{2}\theta^2 t\right)\right)= \\
&= S(0)\,\mathbf{E}\left(\exp\left(\theta\sigma t-\frac{1}{2}\left(\theta^2+\sigma^2\right)t+(\sigma-\theta)\,w(t)\right)\right)= \\
&= S(0)\,\mathbf{E}\left(\exp\left(-\frac{1}{2}(\theta-\sigma)^2 t+(\sigma-\theta)\,w(t)\right)\right)= \\
&= S(0)\,\frac{\mathbf{E}\left(\exp\left((\sigma-\theta)\,w(t)\right)\right)}{\exp\left((\theta-\sigma)^2 t/2\right)}=S(0)\,,
\end{aligned}
$$

ahol az utolsó sorban kihasználtuk a lognormális eloszlás várható értékére vonatkozó képletet.

Example

Határidős ügyletek árazása.

Első példaként legyen $H_T \circeq S(T) - K$, ahol K konstans. A kifejezés alulról korlátos, így az árazási formula használható. Ilyenkor

$$\pi(H_T) = \mathbf{E}^{\mathbf{Q}}\left(\overline{H}_T\right) =$$

$$= \mathbf{E}\left(\frac{S(0)\exp((\mu - \frac{1}{2}\sigma^2)T + \sigma w(T)) - K}{\exp(rT)}\exp(-\theta w(T) - \frac{1}{2}\theta^2)T\right) =$$

$$= S(0)\,\mathbf{E}\left(\exp\left(\left((\sigma-\theta)^2\frac{1}{2}\right)T + (\sigma-\theta)\,w(T)\right)\right) -$$

$$-K\exp(-rT)\,\mathbf{E}\left(\exp\left(-\theta w(T) - \frac{1}{2}\theta^2 T\right)\right).$$

Miként az előző levezetésben az első kifejezés $S(0)$, a második kifejezés pedig a $\Lambda(t)$ martingál tulajdonsága miatt éppen $S(0)\,K\exp(-rT)$. Másképpen

$$\pi(H_T) = S(0) - K\exp(-rT).$$

A határidős ügyleteknél a K értékét úgy kell meghatározni, hogy $\pi(H_T) = 0$ legyen. Ebből

$$K = S(0)\exp(rT).$$

Example

A közönséges call opciók ára.

Térjünk rá a nevezetes Black–Scholes formula tárgyalására. Ilyenkor

$$H_T \mathrel{\hat{=}} \max(0, S_T - K) = (S_T - K)^+ .$$

A konkrét formula több módon is kiszámolható. A kérdés csak az, hogy hogyan lehet „egyszerűen" kiszámolni.

Bayes-formula

Minden ξ a $\mathbf{Q}$ mérték szerint integrálható változóra, ha

$$\Lambda(T) \mathrel{\mathring{=}} \frac{d\mathbf{Q}}{d\mathbf{P}},$$

akkor minden $F \in \mathcal{F}_t$ esetén

$$\begin{aligned}
\int_F \xi d\mathbf{Q} &= \int_F \xi\Lambda(T)\, d\mathbf{P} = \int_F \mathbf{E}^{\mathbf{P}}\left(\xi\Lambda(T) \mid \mathcal{F}_t\right) d\mathbf{P} = \\
&= \int_F \mathbf{E}^{\mathbf{P}}\left(\xi\Lambda(T) \mid \mathcal{F}_t\right) \Lambda^{-1}(t)\, \Lambda(t)\, d\mathbf{P} = \\
&= \int_F \mathbf{E}^{\mathbf{P}}\left(\xi\Lambda(T) \mid \mathcal{F}_t\right) \Lambda^{-1}(t)\, d\mathbf{Q}.
\end{aligned}$$

Mivel az utolsó integrálban szereplő kifejezés $\mathcal{F}_t$-mérhető, ezért igaz a következő formula:

Bayes-formula

Theorem

Ha létezik az $\mathbf{E}^{\mathbf{Q}}\left(\xi \mid \mathcal{G}\right)$ *feltételes várható érték és a* $\mathbf{Q}$ *és* $\mathbf{P}$ *mértékek ekvivalensek, akkor*

$$\begin{aligned}\mathbf{E}^{\mathbf{Q}}\left(\xi \mid \mathcal{G}\right) &= \mathbf{E}^{\mathbf{P}}\left(\xi\Lambda\left(T\right) \mid \mathcal{G}\right)\Lambda^{-1}\left(t\right) = \\ &= \frac{\mathbf{E}^{\mathbf{P}}\left(\xi\frac{d\mathbf{Q}}{d\mathbf{P}} \mid \mathcal{G}\right)}{\mathbf{E}^{\mathbf{P}}\left(\frac{d\mathbf{Q}}{d\mathbf{P}} \mid \mathcal{G}\right)}.\end{aligned}$$

Ezt a szabályt szokás Bayes-formulának is nevezni.

Bayes-formula és az árméree váltása

A Bayes-formulának van egy igen hasznos és szemléletes alkalmazása. Legyen D valamilyen termék, amelyik a $\mathbf{Q}$ martingálmérték mellett martingál. Új árméréének válasszuk a D folyamatot. Ekkor az $\overline{S}$ folyamat helyett az $\widehat{S} \circeq \overline{S}/D$, a $\overline{R} = 1$ helyett pedig a $\widehat{R} \circeq 1/D$ folyamatot kell vizsgálni. Mi lesz az $\left(\widehat{S}, \widehat{R}\right)$ modell martingálmértéke?

Theorem

Legyen $\mathbf{Q}$ *az* $\left(\overline{S}, \overline{R}\right)$ *egy martingálmértéke és tegyük fel, hogy a* D *egy pozitív martingál a* $\mathbf{Q}$ *alatt a* $[0, T]$ *szakaszon. Ha az* $\mathbf{R}$ *deriváltja*

$$\frac{d\mathbf{R}}{d\mathbf{Q}} \circeq \frac{D(T)}{D(0)},$$

akkor az $\mathbf{R}$ *az* $\left(\widehat{S}, \widehat{R}\right)$ *egy martingálmértéke.*

Bayes-formula és az ármérce váltása

A Bayes-formula szerint ha a Z egy martingál a $\mathbf{Q}$ alatt, akkor

$$\begin{aligned}
\mathbf{E}^{\mathbf{R}}\left(\frac{Z(T)}{D(T)} \mid \mathcal{F}_t\right) &= \frac{\mathbf{E}^{\mathbf{Q}}\left(\frac{Z(T)}{D(T)}\frac{d\mathbf{R}}{d\mathbf{Q}} \mid \mathcal{F}_t\right)}{\mathbf{E}^{\mathbf{Q}}\left(\frac{d\mathbf{R}}{d\mathbf{Q}} \mid \mathcal{F}_t\right)} = \\
&= \frac{\mathbf{E}^{\mathbf{Q}}\left(\frac{Z(T)}{D(T)}D(T) \mid \mathcal{F}_t\right)}{\mathbf{E}^{\mathbf{Q}}\left(D(T) \mid \mathcal{F}_t\right)} = \\
&= \frac{\mathbf{E}^{\mathbf{Q}}\left(Z(T) \mid \mathcal{F}_t\right)}{D(t)} = \frac{Z(t)}{D(t)},
\end{aligned}$$

vagyis a Z/D martingál az $\mathbf{R}$ alatt. Az összefüggést a $Z = \overline{S}$ és $Z = \overline{R}$ esetekben alkalmazva éppen az állítást kapjuk.

Black–Scholes-formula

Az árazási formula alapján a Black–Scholes-formula kiszámolásakor a

$$\overline{H}_T \triangleq \frac{(S_T - K)^+}{\exp(rT)} = \frac{S_T}{\exp(rT)} \chi(S_T \geq K) - \frac{K}{\exp(rT)} \chi(S_T \geq K)$$

integrálját kell a $\mathbf{Q}$ mérték alatt kiszámolni. Világos, hogy a diszkontált kifizetés alulról korlátos és integrálható a $\mathbf{Q}$ alatt.

Black–Scholes-formula

A második tag integrálja könnyű:

$$\begin{aligned} I_2 &\stackrel{\circ}{=} \mathbf{E}^{\mathbf{Q}}\left(\frac{K}{\exp(rT)}\chi(S_T \geq K)\right) = \frac{K}{\exp(rT)}\mathbf{E}^{\mathbf{Q}}(\chi(S_T \geq K)) = \\ &= \frac{K}{\exp(rT)}\mathbf{Q}(S_T \geq K) = \frac{K}{\exp(rT)}\mathbf{Q}\left(\overline{S}_T \geq \frac{K}{\exp(rT)}\right). \end{aligned}$$

Black–Scholes-formula

Mivel

$$\overline{S}_T = S_0 \exp\left(\sigma \widehat{w}_T - \frac{\sigma^2}{2} T\right),$$

ahol a $\widehat{w}$ Wiener-folyamat a $\mathbf{Q}$ alatt, így ha Φ jelöli a standard normális eloszlás eloszlásfüggvényét, akkor

$$
\begin{aligned}
I_2 &\overset{\circ}{=} \frac{K}{\exp(rT)} \mathbf{Q}\left(\overline{S}_T \geq \frac{K}{\exp(rT)}\right) = \\
&= \frac{K}{\exp(rT)} \mathbf{Q}\left(S_0 \exp\left(\sigma \widehat{w}_T - \frac{\sigma^2}{2} T\right) \geq \frac{K}{\exp(rT)}\right) = \\
&= \frac{K}{\exp(rT)} \mathbf{Q}\left(\sigma \widehat{w}_T - \frac{\sigma^2}{2} T \geq \ln \frac{K/S_0}{\exp(rT)}\right) = \\
&= \frac{K}{\exp(rT)} \mathbf{Q}\left(\sigma \widehat{w}_T \geq \ln \frac{K}{S_0} + \left(\frac{\sigma^2}{2} - r\right) T\right) = \ldots
\end{aligned}
$$

Black–Scholes-formula, második integrál

$$
\begin{aligned}
I_2 &= \frac{K}{\exp(rT)}\mathbf{Q}\left(\widehat{w}_T \geq \frac{\ln\frac{K}{S_0}+\left(\frac{\sigma^2}{2}-r\right)T}{\sigma}\right) = \\
&= \frac{K}{\exp(rT)}\mathbf{Q}\left(\widehat{w}_T \geq \frac{\ln\frac{K}{S_0}+\left(\frac{\sigma^2}{2}-r\right)T}{\sigma}\right) = \\
&= \frac{K}{\exp(rT)}\mathbf{Q}\left(-\frac{\widehat{w}_T}{\sqrt{T}} \leq -\frac{\ln\frac{K}{S_0}+\left(\frac{\sigma^2}{2}-r\right)T}{\sigma\sqrt{T}}\right) = \\
&= \frac{K}{\exp(rT)}\Phi\left(\frac{\ln\frac{S_0}{K}+\left(r-\frac{\sigma^2}{2}\right)T}{\sigma\sqrt{T}}\right).
\end{aligned}
$$

Black–Scholes-formula, első integrál

Az első integrálja némiképpen kínosabb, ugyanis az S_T nem emelhető ki az integrálból. Ugyanakkor válasszuk most az $\overline{S}$-ot diszkont tényezőnek. A értékmércéhez tartozó derivált képletét felhasználva

$$\begin{aligned} I_1 &\stackrel{\circ}{=} \mathbf{E}^{\mathbf{Q}}\left(\overline{S}_T \chi\left(S_T \geq K\right)\right) = \mathbf{E}^{\mathbf{R}}\left(\overline{S_T} \chi\left(S_T \geq K\right) \frac{d\mathbf{Q}}{d\mathbf{R}}\right) = \\ &= \mathbf{E}^{\mathbf{R}}\left(\overline{S}_T \chi\left(S_T \geq K\right) \frac{\overline{S}_0}{\overline{S}_T}\right) = S_0 \mathbf{R}\left(S_T \geq K\right). \end{aligned}$$

Black–Scholes-formula, első integrál

A formula előnye, hogy ismét csak egy valószínűséget kell kiszámolni. Persze gondot jelent, hogy nem tudjuk, pontosabban tudhatnánk, de nem akarjuk megtudni, hogy mi az **R** mérték. Ezért egy kerülőutat választunk:

$$\widehat{R}(t) = \frac{\overline{R}(t)}{\overline{S}(t)} = \frac{1}{\overline{S}(t)} = S_0^{-1} \exp\left(\left(r - \mu + \frac{\sigma^2}{2}\right) t - \sigma w(t)\right).$$

Mivel az $\overline{R} = 1$ martingál a **Q** alatt , az **R** pedig az új ármércéshez tartozó martingálmérték, ezért az $\widehat{R}$ martingál az **R** alatt..A Girszanov-formula miatt a w-ből $w^* + \alpha t$ lesz az **R** alatt, vagyis

$$\overline{S}^{-1}(t) = S_0^{-1} \exp\left(-\sigma w^*(t) - \delta t\right)$$

alakú lesz, ahol w^* Wiener-folyamat az **R** alatt, ami csak akkor lesz martingál, ha $\delta = \sigma^2/2$, vagyis

$$\overline{S}^{-1}(t) = S_0^{-1} \exp\left(-\sigma w^*(t) - \frac{\sigma^2}{2} t\right),$$

ahol a w^* Wiener-folyamat az **R** mérték mellett.

Black–Scholes-formula, első integrál

$$
\begin{aligned}
I_1 &= S_0 \mathbf{R} \left(S_T \geq K \right) = S_0 \mathbf{R} \left(\overline{S}_T \geq \frac{K}{\exp\left(rT\right)} \right) = \\
&= S_0 \mathbf{R} \left(\overline{S}_T^{-1} \leq \frac{\exp\left(rT\right)}{K} \right) = S_0 \mathbf{R} \left(\widehat{R}_T \leq \frac{\exp\left(rT\right)}{K} \right) = \\
&= S_0 \mathbf{R} \left(S_0^{-1} \exp\left(-\sigma w^* \left(T\right) - \frac{\sigma^2}{2} T \right) \leq \frac{\exp\left(rT\right)}{K} \right).
\end{aligned}
$$

Black–Scholes-formula, első integrál

A már látott módon ebből elemi számolással

$$
\begin{aligned}
I_1 &= S_0\mathbf{R}\left(S_0^{-1}\exp\left(-\sigma w^*(T)-\frac{\sigma^2}{2}T\right)\le\frac{\exp(rT)}{K}\right)= \\
&= S_0\mathbf{R}\left(\exp\left(-\sigma w^*(T)-\frac{\sigma^2}{2}T\right)\le\frac{S_0\exp(rT)}{K}\right)= \\
&= S_0\mathbf{R}(-\sigma w^*(T)-\frac{\sigma^2}{2}T\le\ln\frac{S_0}{K}+rT)= \\
&= S_0\mathbf{R}(-\sigma w^*(T)\le\ln\frac{S_0}{K}+rT+\frac{\sigma^2}{2}T)= \\
&= S_0\mathbf{R}(-\frac{w^*(T)}{\sqrt{T}}\le\frac{\ln\frac{S_0}{K}+rT+\frac{\sigma^2}{2}T}{\sigma\sqrt{T}})= \\
&= S_0\Phi\left(\frac{\ln\frac{S_0}{K}+\left(r+\frac{\sigma^2}{2}\right)T}{\sigma\sqrt{T}}\right)
\end{aligned}
$$

Barrier opciók

A barrier opciók annyiben különböznek a közönséges opcióktól, hogy az értékük nulla lesz, ha a részvény ára egy bizonyos szintet elér. Tekintsünk egy olyan call opciót, amely megszűnik érvényes lenni, amint az S ár valamely H fix érték alá csökken. Ilyenkor

$$H_T = (S(T) - K)^+ \chi(S_*(T) \geq H)$$

ahol $S_*(T)$ jelöli az ár minimumát a $[0, T]$ szakaszon. Az általános árazási képlet ismételten alkalmazható, ugyanis egy alulról korlátos, $\mathcal{F}_T$-mérhető és $\mathbf{Q}$-integrálható kifizetésről van szó:

$$\pi(H_T) = \mathbf{E}^{\mathbf{Q}}\left(\overline{H}_T\right) = \exp(-rT)\,\mathbf{E}^{\mathbf{Q}}\left((S(T) - K)^+ \chi(S_*(T) \geq H)\right).$$

Ahhoz, hogy az integrált ki tudjuk számolni, szükségünk van az (S, S_*) pár együttes eloszlására.

A Wiener-folyamatok maximuma

Először a Wiener-folyamatokkal kapcsolatos egy általános kérdést tisztázunk. A sztochasztikus folyamatok elméletében megjelenő objektumok eloszlása a legritkább esetben adható meg zárt egyszerű formulával. Éppen ezért rendkívül fontosak azok az eloszlások, amelyek konkrét alakját ismerjük.

Definition

Legyen w Wiener-folyamat. A továbbiakban jelölje

$$w^{*}(t) \stackrel{\circ}{=} \sup\{w(s) : 0 \leq s \leq t\} = \max\{w(s) : 0 \leq s \leq t\}.$$

A w^{*} folyamatot a w maximumfolyamatának mondjuk.

Tükrözési elv

Theorem

Ha w Wiener-folyamat, akkor tetszőleges τ megállási időre a

$$\widehat{w}(t,\omega) \circeq \begin{cases} w(t,\omega) & ha \quad t \le \tau(\omega) \\ 2w(\tau(\omega),\omega) - w(t,\omega) & ha \quad t > \tau(\omega) \end{cases}$$

a τ megállási időpontban „tükrözött" folyamat szintén Wiener-folyamat.

Evidens módon $\widehat{w}(0) = 0$ és a $\widehat{w}$ folytonos. Ugyancsak nyilvánvaló módon $\widehat{w} = 2w^{\tau} - w$. Ebből következően a $\widehat{w}$ lokális martingál.

$$\begin{aligned} [\widehat{w}] &= [2w^{\tau} - w] = [2w^{\tau}] - 2[2w^{\tau}, w] + [w] = \\ &= 4[w]^{\tau} - 4[w,w]^{\tau} + [w] = [w]. \end{aligned}$$

Így a Lévy-féle karakterizációs tétel szerint a $\widehat{w}$ Wiener-folyamat.

Együttes eloszlás

Theorem

Ha w^* jelöli a w Wiener-folyamat maximumfolyamatát, akkor a $(w(t), w^*(t))$ pár eloszlása a $c \geq 0, b \leq c$ tartományon

$$\mathbf{P}\left(w(t) \leq b, w^*(t) \geq c\right) = 1 - \Phi\left(\frac{2c-b}{\sqrt{t}}\right), \quad ha \quad c \geq 0, b \leq c.$$

Az együttes eloszlás sűrűségfüggvénye a $c \geq 0, b \leq c$ tartományon

$$\begin{aligned} f_t(b,c) &\mathrel{\hat{=}} \frac{2(2c-b)}{t^{3/2}}\varphi\left(\frac{2c-b}{\sqrt{t}}\right) = \\ &= \sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{2c-b}{t^{3/2}}\exp\left(-\frac{(2c-b)^2}{2t}\right), \quad ha\ c \geq 0, b \leq c. \end{aligned}$$

Együttes eloszlás

Rögzítsük az $y \geq 0$ értéket és vezessük be a

$$\tau_y \mathrel{\hat{=}} \inf\left(t : w\left(t\right) = y\right)$$

időpontban „tükrözött”

$$\widehat{w}\left(t,\omega\right) \mathrel{\hat{=}} \begin{cases} w\left(t,\omega\right) & \text{ha} \quad t \leq \tau_y\left(\omega\right) \\ 2y - w\left(t,\omega\right) & \text{ha} \quad t \geq \tau_y\left(\omega\right) \end{cases}$$

folyamatot.

Együttes eloszlás

A tükrözési elv miatt miatt a $\widehat{w}$ szintén Wiener-folyamat. Ebből következően, ha $x \leq y$

$$\begin{aligned}
\mathbf{P}\left(w\left(t\right) \leq x, w^{*}\left(t\right) \geq y\right) &= \mathbf{P}\left(w\left(t\right) \leq x, \tau_{y} \leq t\right) = \\
&= \mathbf{P}\left(2y - w\left(t\right) \geq 2y - x, \tau_{y} \leq t\right) \\
&= \mathbf{P}\left(\widehat{w}\left(t\right) \geq 2y - x, \tau_{y} \leq t\right).
\end{aligned}$$

A $\widehat{w}$ Wiener-folyamat, továbbá a τ_y evidens módon azonos a w és a $\widehat{w}$ folyamatokra, ugyanis a $\widehat{w}$ éppen a τ_y időpontban tükrözött Wiener-folyamat. Ezért, a τ_y helyébe is $\widehat{\tau}_y$ írható, ahol értelemszerűen a $\widehat{\tau}_y$ jelöli a $\widehat{w}$ y-hoz tartozó első elérési idejét.

Együttes eloszlás

Mivel $y-x\geq 0$, és ezért

$$\{\widehat{w}(t)\geq 2y-x\}\subseteq\{\widehat{w}(t)\geq y\}\subseteq\left\{(\widehat{w})^{*}(t)\geq y\right\}=\{\widehat{\tau}_y\leq t\},$$

következésképpen

$$\begin{aligned}\mathbf{P}(w(t)\leq b,w^{*}(t)\geq c) &= \mathbf{P}(\widehat{w}(t)\geq 2c-b,\widehat{\tau}_y\leq t)=\\ &= \mathbf{P}(\widehat{w}(t)\geq 2c-b)=1-\Phi\left(\frac{2c-b}{\sqrt{t}}\right).\end{aligned}$$

A kifejezést deriválva éppen a megadott képletet kapjuk.

Felmerül a kérdés, hogy mit lehet mondani a $b \geq c$ esetben. Mivel

$$\begin{aligned} \mathbf{P}\left(w\left(t\right) \leq b, w^{*}\left(t\right) \geq c\right) &\overset{\circ}{=} \mathbf{P}\left(B \cap C\right) = \mathbf{P}\left(C\right) - \mathbf{P}\left(B^{c} \cap C\right) = \\ &= \mathbf{P}\left(w^{*}\left(t\right) \geq c\right) - \mathbf{P}\left(w\left(t\right) > b, w^{*}\left(t\right) \geq c\right) = \\ &= \mathbf{P}\left(w^{*}\left(t\right) \geq c\right) - \mathbf{P}\left(w\left(t\right) > b\right), \end{aligned}$$

ugyanis mivel $b \geq c$, ezért

$$\left\{w\left(t\right) > b\right\} \subseteq \left\{w^{*}\left(t\right) \geq b\right\} \subseteq \left\{w^{*}\left(t\right) \geq c\right\}.$$

Együttes eloszlás

Természetesen

$$\mathbf{P}\left(w\left(t\right) > b\right) = 1 - \Phi\left(\frac{b}{\sqrt{t}}\right).$$

Emlékeztetünk, hogy ha $a > 0$, akkor a τ_a sűrűségfüggvénye

$$\frac{d}{dt}\mathbf{P}\left(\tau_a \leq t\right) = a\frac{1}{\sqrt{2\pi t^3}}\exp\left(-\frac{a^2}{2t}\right).$$

$w\left(t\right) \cong N\left(0, \sqrt{t}\right)$, így

$$\begin{aligned} U\left(t\right) &\overset{\circ}{=} 2 \cdot \mathbf{P}\left(w\left(t\right) \geq a\right) = 2\left(1 - \Phi\left(\frac{a}{\sqrt{t}}\right)\right) = \\ &= \frac{2}{\sqrt{2\pi}}\int_{a/\sqrt{t}}^{\infty}\exp\left(-\frac{u^2}{2}\right)du. \end{aligned}$$

Együttes eloszlás

Ezt t szerint deriválva

$$\frac{d}{dt}U(t) = \frac{a}{\sqrt{2\pi}}\exp\left(-\frac{a^2}{2t}\right)t^{-3/2},$$

Következésképpen a $\mathbf{P}(\tau_a \leq t)$ és a $2 \cdot \mathbf{P}(w(t) \geq a)$ függvények t szerinti deriváltja azonos. Ha $t = 0$, akkor

$$U(0) \mathrel{\hat{=}} 2 \cdot \mathbf{P}(w(0) \geq a) = 0$$

és

$$\mathbf{P}(\tau_a \leq 0) = 0,$$

így a két függvény megegyezik, vagyis

$$2 \cdot \mathbf{P}(w(t) \geq a) = \mathbf{P}(|w(t)| \geq a) = \mathbf{P}(\tau_a \leq t) = \mathbf{P}(w^*(t) \geq a)$$

minden t-re.

Együttes eloszlás

Következésképpen

$$\mathbf{P}\left(w^{*}\left(t\right)\geq c\right)=2\mathbf{P}\left(w\left(t\right)\geq c\right)=2\left(1-\Phi\left(\frac{c}{\sqrt{t}}\right)\right).$$

Összefoglalva tehát, ha $b\geq c$, akkor

$$\begin{aligned}F\left(b,c\right) &\overset{\circ}{=} \mathbf{P}\left(w\left(t\right)\leq b, w^{*}\left(t\right)\geq c\right)=\\ &= 2\left(1-\Phi\left(\frac{c}{\sqrt{t}}\right)\right)-\left(1-\Phi\left(\frac{b}{\sqrt{t}}\right)\right)=\\ &= 1-2\Phi\left(\frac{c}{\sqrt{t}}\right)+\Phi\left(\frac{b}{\sqrt{t}}\right).\end{aligned}$$

Együttes eloszlás

Vegyük észre, hogy

$$\frac{\partial^2}{\partial b \partial c} F(b, c) = 0,$$

így ilyenkor nincsen kétváltozós sűrűségfüggvény.

Theorem

Legyen $X(t) \triangleq w(t) + \mu t$ *egy* μt *alakú trenddel rendelkező Wiener-folyamat. Jelölje* X^* *az* X *maximumfolyamatát. Ha hogy* $c \geq 0, b \leq c$, *akkor az* $(X(T), X^*(T))$ *együttes eloszlásának sűrűségfüggvénye*

$$f(b,c) = \frac{2(2c-b)}{T\sqrt{T}} \varphi\left(\frac{b-\mu T}{\sqrt{T}}\right) \exp\left(\mu - \frac{1}{2}\mu^2 T\right).$$

Együttes eloszlás

Vezessük be a

$$\Lambda(t) = \exp\left(-\mu w(t) - \frac{1}{2}\mu^2 t\right)$$

martingált. Az

$$\mathbf{R}(A) = \int_A \Lambda(T)\, d\mathbf{P}$$

mérték, amely a $(-\mu)$-hez tartozó Girszanov-transzformált, mellett az X Wiener-folyamat. Ha $-\infty \leq b \leq c$, akkor legyen

$$A = \{X(T) < b, X^*(T) < c\}.$$

Együttes eloszlás

Ilyenkor az X képletét beírva

$$
\begin{aligned}
F(b,c) &\overset{\circ}{=} \mathbf{P}(A) = \mathbf{E}(\chi_A) = \mathbf{E}^{\mathbf{R}}\left(\chi_A \Lambda^{-1}(T)\right) = \\
&= \mathbf{E}^{\mathbf{R}}\left(\chi_A \exp\left(\mu w(T) + \frac{1}{2}\mu^2 T\right)\right) = \\
&= \mathbf{E}^{\mathbf{R}}\left(\chi_A \exp\left(\mu\left(X(T) - \mu T\right) + \frac{1}{2}\mu^2 T\right)\right) = \\
&= \mathbf{E}^{\mathbf{R}}\left(\chi_A \exp\left(\mu X(T) - \frac{1}{2}\mu^2 T\right)\right).
\end{aligned}
$$

Együttes eloszlás

Ha f a Wiener-folyamat és a maximumának együttes eloszlásnak sűrűségfüggvénye, akkor, felhasználva, hogy

$$\varphi(u) \circeq \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{u^2}{2}\right)$$

az $\int u'(x) \exp(u(x))\, dx$ integrálási szabálya alapján

$$\begin{aligned}\int_0^c f(z,y)\, dy &= \int_0^c \frac{2}{T} \frac{(2y-z)}{\sqrt{T}} \varphi\left(\frac{2y-z}{\sqrt{T}}\right) dy = \\ &= \frac{1}{\sqrt{T}} \varphi\left(\frac{z}{\sqrt{T}}\right) - \frac{1}{\sqrt{T}} \varphi\left(\frac{2c-z}{\sqrt{T}}\right).\end{aligned}$$

Az **R** alatt az X Wiener-folyamat, így

$$F(b,c) = \int_{-\infty}^{b}\int_{0}^{c} \exp\left(\mu z - \frac{1}{2}\mu^2 T\right) f(z,y)\, dydz =$$

$$= \int_{-\infty}^{b} \exp\left(\mu z - \frac{1}{2}\mu^2 T\right) \int_{0}^{c} f(z,y)\, dydz =$$

$$= \int_{-\infty}^{b} \exp(\mu z - \frac{1}{2}\mu^2 T)\frac{1}{\sqrt{T}}(\varphi(\frac{z}{\sqrt{T}}) - \varphi(\frac{z-2c}{\sqrt{T}}))dz =$$

$$= \int_{-\infty}^{0} \exp(\mu(z+b) - \frac{1}{2}\mu^2 T)\frac{1}{\sqrt{T}}(\varphi(\frac{b+z}{\sqrt{T}}) - \varphi(\frac{b-2c+z}{\sqrt{T}}))dz =$$

$$= \exp\left(\mu b - \frac{1}{2}\mu^2 T\right)(\Psi(b) - \Psi(b-2c)),$$

ahol

$$\begin{aligned}
\Psi(u) &\overset{\circ}{=} \frac{1}{\sqrt{T}}\int_{-\infty}^{0} \exp(\mu z)\,\varphi\left(\frac{u+z}{\sqrt{T}}\right) dz = \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi T}}\int_{-\infty}^{0} \exp\left(\mu z - \frac{(u+z)^2}{2T}\right) dz = \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi T}} \exp(-\mu u) \int_{-\infty}^{0} \exp\left(\mu(z+u) - \frac{(u+z)^2}{2T}\right) dz = \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi T}} \exp(-\mu u) \int_{-\infty}^{0} \exp\left(-\frac{(u+z)^2 - 2T\mu(z+u)}{2T}\right) dz \\
&= \exp\left(-\mu u + \frac{1}{2}\mu^2 T\right) \int_{-\infty}^{0} \frac{1}{\sqrt{T}}\varphi\left(\frac{u+z-\mu T}{\sqrt{T}}\right) dz = \\
&= \exp\left(-\mu u + \frac{1}{2}\mu^2 T\right) \Phi\left(\frac{u-\mu T}{\sqrt{T}}\right).
\end{aligned}$$

Együttes eloszlás

Visszahelyettesítve

$$F(b,c) = \Phi\left(\frac{b-\mu T}{\sqrt{T}}\right) - \exp(2\mu c)\,\Phi\left(\frac{b-2c-\mu T}{\sqrt{T}}\right).$$

Deriválva az együttes sűrűségfüggvény

$$\frac{2(2c-b)}{T\sqrt{T}}\varphi\left(\frac{b-\mu T}{\sqrt{T}}\right)\exp\left(\mu-\frac{1}{2}\mu^2 T\right).$$

Együttes eloszlás

Theorem

Legyen $X(t) = \mu t + \sigma w(t)$. *Ilyenkor az* (X, X^*) *együttes eloszlásának sűrűségfüggvénye*

$$f(b,c) = \frac{2(2c-b)}{\sigma T\sqrt{T}}\varphi\left(\frac{b-\mu T}{\sigma\sqrt{T}}\right)\exp\left(\left(\mu - \frac{1}{2}\mu^2 T\right)\sigma^{-2}\right).$$

Az eloszlásfüggvény

$$\Phi\left(\frac{b-\mu T}{\sigma\sqrt{T}}\right) - \exp\left(2\frac{\mu}{\sigma^2}c\right)\Phi\left(\frac{b-2c-\mu T}{\sigma\sqrt{T}}\right)$$

feltéve, hogy $c \geq 0$, $b \leq c$.

Együttes eloszlás

Elegendő az

$$\widetilde{X}(t) = \frac{\mu}{\sigma} t + w(t)$$

folyamatra alkalmazni az előző formulát és mindenhol az eloszlásfüggvényben a μ a b és a c helyébe μ/σ-át, b/σ-át és c/σ-át írni, ugyanis

$$\mathbf{P}(X(T) < b, X^*(T) < c) = \mathbf{P}\left(\widetilde{X}(T) < \frac{b}{\sigma}, \widetilde{X}^*(T) < \frac{c}{\sigma}\right).$$

Együttes eloszlás

Theorem

Legyen (S, R) *egy Black–Scholes modell. Legyen*

$$d_3 \circeq \frac{\ln \frac{S_0}{K} + \left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right) T}{\sigma \sqrt{T}}$$

illetve

$$d_4 \circeq \frac{\ln \frac{H^2}{S_0 K} + \left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right) T}{\sigma \sqrt{T}}.$$

Ha S_* *jelöli az* S *minimum folyamatát, akkor*

$$\mathbf{Q}\left(S\left(T\right) \geq K, S_*\left(T\right) \geq H\right) = \Phi\left(d_3\right) - \left(\frac{H}{S_0}\right)^{2r/\sigma^2 - 1} \Phi\left(d_4\right).$$

A **Q** mérték alatt

$$\begin{aligned} S(T) &= S(0)\exp\left(\left(r-\frac{\sigma^2}{2}\right)T+\sigma\widetilde{w}(T)\right) \doteq \\ &\doteq S(0)\exp(Y(T)) \end{aligned}$$

ahol a $\widetilde{w}$ Wiener-folyamat a **Q** alatt. Ebből, ha U jelöli a fenti sorban szereplő halmazt, akkor

$$\begin{aligned} \mathbf{Q}(U) &= \mathbf{Q}(S(T)\geq K, S_*(T)\geq H) = \\ &= \mathbf{Q}\left(Y(T)\geq \ln\frac{K}{S(0)}, Y_*(T)\geq \ln\frac{H}{S(0)}\right) = \\ &= \mathbf{Q}\left(-Y(T)\leq \ln\frac{S(0)}{K}, -Y_*(T)\leq \ln\frac{S(0)}{H}\right) = \\ &= \mathbf{Q}\left(-Y(T)\leq \ln\frac{S(0)}{K}, (-Y)^*(T)\leq \ln\frac{S(0)}{H}\right). \end{aligned}$$

Természetesen

$$-Y(T) = \left(-r + \frac{\sigma^2}{2}\right) T + \sigma\left(-\widetilde{w}(T)\right).$$

De a $-\widetilde{w}$ Wiener-folyamat a $\mathbf{Q}$ alatt, így az előző lemma alkalmazható a

$$\begin{aligned} \mu &= \frac{\sigma^2}{2} - r \\ b &= \ln \frac{S(0)}{K} \\ c &= \ln \frac{S(0)}{H} \end{aligned}$$

paraméterek mellett.

Az opció árazása

Vegyük észre, mivel $H \leq S(0)$ értelemszerűen teljesül, ugyanis ellenkező esetben az opció ára mindig nulla. Ugyancsak érvényes a $K \geq H$, hiszen a $K < H$ eset értelmetlen. Így $c \geq 0, b \leq c$, tehát a korábbi formulák használhatóak. Ilyenkor egyszerű behelyettesítéssel

$$\Phi(\frac{\ln\frac{S(0)}{K} + \left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right) T}{\sigma\sqrt{T}}) - \exp(\frac{\sigma^2 - 2r}{\sigma^2} \ln \frac{S(0)}{H}) *$$

$$*\Phi(\frac{\ln\frac{S(0)}{K} - 2\ln\frac{S(0)}{H} - (\frac{\sigma^2}{2} - r) T}{\sigma\sqrt{T}})$$

Az opció árazása

Ez pedig éppen

$$\Phi\left(d_3\right) - \left(\frac{S\left(0\right)}{H}\right)^{1-2r/\sigma^2} \Phi\left(\frac{\ln\frac{H^2}{KS(0)} + \left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right)T}{\sigma\sqrt{T}}\right)$$

Ez azonban éppen

$$\Phi\left(d_3\right) - \left(\frac{H}{S\left(0\right)}\right)^{2r/\sigma^2-1} \Phi\left(d_4\right).$$

Theorem

Legyen (S, R) *egy Black–Scholes modell. Legyen*

$$d_5 = \frac{\ln \frac{S_0}{K} + \left(r + \frac{\sigma^2}{2}\right) T}{\sigma\sqrt{T}}$$

és

$$d_6 = \frac{\ln \frac{H^2}{KS_0} + \left(r + \frac{\sigma^2}{2}\right) T}{\sigma\sqrt{T}}.$$

Ekkor

$$\mathbf{E}^{\mathbf{Q}}\left(S\left(T\right)\chi\left(S\left(T\right) \geq K, S_*\left(T\right) \geq H\right)\right) =$$
$$= S_0 \exp\left(rT\right)\left(\Phi\left(d_5\right) - \left(\frac{H}{S_0}\right)^{1+2r/\sigma^2}\Phi\left(d_6\right)\right).$$

Az opció árazása

A $\mathbf{Q}$ mérték alatt

$$S(T) = S(0)\exp\left(\left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right)T + \sigma\widehat{w}(T)\right)$$

alakú, ahol $\widehat{w}$ Wiener-folyamat. Vegyük észre, hogy

$$\frac{\overline{S}(T)}{S(0)} = \frac{S(T)}{S(0)\exp(rT)} = \exp\left(-\frac{\sigma^2}{2}T + \sigma\widehat{w}(T)\right)$$

éppen az $\overline{S}$ ármércéhez tartozó derivált.

Az opció árazása

Tekintsük a

$$\frac{d\mathbf{R}}{d\mathbf{Q}} = \exp\left(-\frac{\sigma^2}{2}T + \sigma\widehat{w}(T)\right)$$

deriválttal adott újy mértéket. Ekkor

$$\begin{aligned}
&\mathbf{E}^{\mathbf{Q}}\left(S(T)\chi(S(T)\geq K, S_*(T)\geq H)\right) = \\
&= \mathbf{E}^{\mathbf{R}}\left(S(T)\chi(S(T)\geq K, S_*(T)\geq H)\frac{d\mathbf{Q}}{d\mathbf{R}}\right) = \\
&= S(0)\exp(rT)\,\mathbf{E}^{\mathbf{R}}\left(\chi(S(T)\geq K, S_*(T)\geq H)\right).
\end{aligned}$$

Az opció árazása

Új ármércét bevezetve az új ármércéhez tartozó **R** mérték alatt a

$$\widetilde{w}(t) \stackrel{\circ}{=} \widehat{w}(t) - \sigma t$$

Wiener-folyamat, így

$$S(T) = \exp\left(\sigma \widetilde{w}(t) + \left(r + \frac{\sigma^2}{2}\right) T\right).$$

Ebből a keresett

$$\mathbf{E}^{\mathbf{R}}\left(\chi\left(S(T) \geq K, S_*(T) \geq H\right)\right)$$

visszavezethető az előző példára, avval az eltéréssel, hogy most az

$$r - \frac{\sigma^2}{2}$$

helyébe mindenhol az

$$r + \frac{\sigma^2}{2}$$

kifejezést kell írni.

Az opció árazása

Vegyük észre, hogy a kitevőben szereplő

$$\frac{2r}{\sigma^2} - 1 = 2\frac{r - \frac{\sigma^2}{2}}{\sigma^2}$$

helyébe

$$2\frac{r + \frac{\sigma^2}{2}}{\sigma^2} = \frac{2r}{\sigma^2} + 1$$

kerül.

Végezetül számoljuk ki az árat. Legyen

$$U \circeq \{S(T) \geq K, S_*(T) \geq H\}.$$

Az U halmazon kívül a kifizetés nulla, az U halmazon pedig $S(T) - K$. Ebből következően az előző két állítás felhasználásával

$$\begin{aligned}
\pi(H_T) &= \exp(-rT)\,\mathbf{E}^{\mathbf{Q}}(S(T)-K)^{+}\chi(S_*(T) \geq H) = \\
&= \exp(-rT)\,\mathbf{E}^{\mathbf{Q}}(S(T)\chi_U) - \exp(-rT)\,K\mathbf{E}^{\mathbf{Q}}(\chi_U) = \\
&= S_0\left(\Phi(d_5) - \left(\frac{H}{S_0}\right)^{1+2r/\sigma^2}\Phi(d_6)\right) - \\
&\quad - \exp(-rT)\,K\left(\Phi(d_3) - \left(\frac{H}{S_0}\right)^{2r/\sigma^2-1}\Phi(d_4)\right).
\end{aligned}$$