Girszanov-tétel és a mértékcsere

Egy egyszerű, de igen misztikus tétel

Medvegyev Péter

2009

Mértékcsere sűrűségfüggvénnyel

Ha a $\mathbf{Q}$ mérték abszolút folytonos a $\mathbf{P}$-re nézve, akkor tekinthetjük a $d\mathbf{Q}/d\mathbf{P}$ deriváltat. Emlékeztetünk, hogy a derivált definíciója alapján

$$\mathbf{Q}(A) = \int_A \frac{d\mathbf{Q}}{d\mathbf{P}} d\mathbf{P}.$$

A derivált definíciója alapján ha s lépcsős függvény, akkor

$$\begin{aligned} \int_\Omega s d\mathbf{Q} &= \int_\Omega \sum_i c_i \chi_{A_i} d\mathbf{Q} = \sum_i c_i \mathbf{Q}(A_i) \\ &= \sum_i c_i \int_{A_i} \frac{d\mathbf{Q}}{d\mathbf{P}} d\mathbf{P} = \int_\Omega s \frac{d\mathbf{Q}}{d\mathbf{P}} d\mathbf{P}. \end{aligned}$$

Mivel a derivált nem negatív, a monoton konvergencia tétel segítségével az egyenlőség igazolható akkor is, ha s tetszőleges nem negatív mérhető függvény. Ebből következően az integrál definíciója alapján az egyenlőség átvihető tetszőleges mérhető függvényre, ahol a két oldalon szereplő két integrál egyidejüleg létezik, illetve nem létezik.

A derivált korlátossága

Az elmondottakból világos, hogy amennyiben a derivált korlátos, akkor az L^p terek a két mérték alatt megegyeznek, ha azonban a derivált nem korlátos, akkor a két mérték alatt az integrálható függvények halmaza különböző lehet. Az alábbiakban a derivált korlátossága nem garantálható.

Ekvivalens mértékek

Definition

Két mértéket ekvivalensnek mondunk, ha a nullmértékű halmazok a két mérték alatt megegyeznek.

Nyilvánvaló, hogy két mérték pontosan akkor ekvivalens, ha létezik és pozitív a derivált.

Ekvivalens mértékek és a sztochasztikus konvergencia

Ekvivalens mértékek esetén a majdnem mindenhol való konvergens sorozatok halmaza triviálisan megegyezik. Emlékeztetünk, hogy a sztochasztikus konvergencia metrizálható és valamely (ξ_n) sorozat pontosan akkor tart sztochasztikusan egy ξ változóhoz, ha a (ξ_n) összes részsorozatának van olyan további részsorozata, amely majdnem mindenhol a ξ-hez tart. Ebből következik, hogy a $\xi_n \to \xi$, ahol a konvergencia sztochasztikus konvergenciát jelöl, összefüggés szintén invariáns az ekvivalens mértékcserére nézve. Ez és a sztochasztikus konvergencia metrizálhatósága miatt a sztochasztikus konvergenciát megadó metrikus tér által generált topológia szintén invariáns az ekvivalens mértékcserére. Formálisan: ha a $\mathbf{P}$ és $\mathbf{Q}$ mértékek ekvivalensek akkor az $L^0(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$ és az $L^0(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{Q})$ metrikus terek által generált topológiák megegyeznek.

A Girszanov-tétel absztrakt lényege

Mivel a sztochasztikus analízis tényei nagyrészt az L^0 tér topológiájára és nem a topológiát megadó metrikára épülnek, nem túl meglepő módon a sztochasztikus analízis jórészt „invariáns" az ekvivalens mértékcserére. Az úgynevezett Girszanov-tétel ezt az „általános elvet" fogalmazzuk meg konkrét állítások formájában. Ez persze egy „meta" állítás, ugyanis nem világos, hogy miért az L^0 és nem például az L^1 terek topológiájától függ a sztochasztikus analízis. Az világos, hogy, miként az analízisben általában, nem a konkrét metrika, hanem a generált topológia fontos.

Lokálisan ekvivalens mértékek

Ha az $\mathcal{F}$ filtráció teljesíti a szokásos feltételeket, akkor evidens módon a

$$\Lambda(t) \overset{\circ}{=} \mathbf{E}\left(\frac{d\mathbf{Q}}{d\mathbf{P}} | \mathcal{F}_t\right)$$

folyamat egyenletesen integrálható martingál, és az

$$\int_F \Lambda(t)\, d\mathbf{P} = \int_F \frac{d\mathbf{Q}}{d\mathbf{P}} d\mathbf{P} = \mathbf{Q}(F), \quad F \in \mathcal{F}_t$$

miatt a $\Lambda(t)$ éppen a $\mathbf{Q}$ Radon–Nikodym-deriváltja az $(\Omega, \mathcal{F}_t, \mathbf{P})$ téren. Célszerű némiképpen általánosabban szemlélni a problémát. Tegyük fel, hogy minden t-re a $\mathbf{Q}$ mérték $\mathcal{F}_t$-re való leszűkítése, amit $\mathbf{Q}(t)$-vel jelölünk, abszolút folytonos a $\mathbf{P}$ $\mathcal{F}_t$-re való $\mathbf{P}(t)$ leszűkítésére nézve, akkor beszélhetünk a

$$\Lambda(t) \overset{\circ}{=} \frac{d\mathbf{Q}(t)}{d\mathbf{P}(t)}$$

deriváltakról.

Lokálisan ekvivalens mértékek

Ha $F \in \mathcal{F}_s \subseteq \mathcal{F}_t$, akkor

$$\int_F \Lambda(t)\, d\mathbf{P} \overset{\circ}{=} \int_F \frac{d\mathbf{Q}(t)}{d\mathbf{P}(t)} d\mathbf{P} = \mathbf{Q}(F) = \int_F \frac{d\mathbf{Q}(s)}{d\mathbf{P}(s)} d\mathbf{P} \overset{\circ}{=} \int_F \Lambda(s)\, d\mathbf{P},$$

ezért a Λ logikai martingál. Mivel feltesszük, hogy az $\mathcal{F}$ teljesíti a szokásos feltételeket, illetve mivel a Radon–Nikodym-deriváltak ekvivalencia osztályok, feltehető, hogy a Λ martingál. Fontos hangsúlyozni, hogy ha a **P** és a **Q** ekvivalensek, akkor a Λ martingál egyenletesen integrálható, ugyanis $\Lambda(t) \overset{\circ}{=} \mathbf{E}(d\mathbf{Q}/\mathbf{dP} \mid \mathcal{F}_t)$ alakú. Elképzelhető azonban, van olyan **P** és **Q**, hogy csak minden t-re az $\mathcal{F}_t$ σ-algebrákra való leszűkítésük lesz abszolút folytonos. A Λ martingál ilyenkor is létezik, de a Λ martingál nem feltétlenül egyenletesen integrálható, ezért nem feltétlenül van olyan ξ, amelyre $\Lambda(t) = \mathbf{E}(\xi \mid \mathcal{F}_t)$, vagy ami ugyanaz, abból, hogy a **Q** és a **P** ekvivalens minden $\mathcal{F}_t$ mellett még nem következik, hogy a **Q** és a **P** ekvivalens az $\mathcal{F}_\infty = \sigma(\cup_t \mathcal{F}_t)$ σ-algebrán is, vagyis hogy létezik a $d\mathbf{Q}/d\mathbf{P} > 0$.

Definition

Ha minden t-re a **P** $\mathcal{F}_t$-re való leszűkítése ekvivalens a **Q** $\mathcal{F}_t$-re való leszűkítésével, akkor azt mondjuk, hogy a **P** és a **Q** lokálisan ekvivalensek.

Fel kell hívni a figyelmet a következőre: A sztochasztikus analízis egész épülete tulajdonképpen a nullmértékű halmazok megfelelő „kezelésére" épül. Ezt fejezik ki a szokásos feltételek, amelyek teljesülése nélkül a sztochasztikus analízis tételeinek zöme nem maradna érvényben. Ekvivalens mértékcsere esetén a nulla mértékű halmazok családja nem változik, így a kibővített filtrációk sem változnak stb. Vagyis ha a szokásos feltételek teljesülnek a **P** mérték alatt, akkor triviálisan teljesülnek minden vele ekvivalens **Q** mérték alatt is. Ez pontosan annak a gondolatnak felel meg, amit korábban úgy fogalmaztunk meg, hogy az ekvivalens mértékcsere nem módosítja a sztochasztikus analízis egyetlen tényét sem.

Lokálisan ekvivalens mértékek

A lokálisan ekvivalens mértékcsere hatására azonban a nullmértékű halmazok családja módosulhat, ugyanis előfordulhat, hogy a **P** és **Q** mértékek lokálisan ekvivalensek, de mégsem ekvivalensek, sőt szingulárisak. Ekkor azonban előfordulhat, hogy az egyik mérték alatt teljesülnek a szokásos feltételek a másik alatt azonban nem. Így, bár első ránézésre talán nem volt nyilvánvaló, a lokálisan ekvivalens mértékcsere fogalmának bevezetésével hallgatólagosan kihúztuk a szőnyeget a sztochasztikus analízis egész épülete alól.

Lokálisan ekvivalens mértékek

Az új, nulla mértékű halmazok filtrációhoz csatolása helyreállítja a szokásos feltételek teljesülését az új mérték alatt is, de ez nem megoldás, ugyanis így módosítani kell a filtrációt, következésképpen a progresszíven mérhető, vagy az előrejelezhető folyamatok családját stb, vagyis a $\mathbf{P}$ és a $\mathbf{Q}$ mértékek esetén a megfelelő folyamatosztályok módosulnak, vagyis például módosulnak, hogy mely folyamatok sztochasztikusan integrálhatóak stb. Emlékeztetünk, hogy a sztochasztikus analízis tárgyalásakor az elején rögzítjük a filtrációt. A lokálisan ekvivalens mértékcsere bevezetésével hallgatólagosan ez az elve kerül veszélybe.

Lokálisan ekvivalens mértékek

Ezt elkerülhetjük, ha csak az ekvivalens mértékcserékkel foglalkozunk. Ezt sugalja az is, hogy a pénzügyi alkalmazásokban is csak ilyen mértékcserékkel foglalkozunk. Ennek oka, hogy a pénzügyekben mindig feltesszük, hogy a folyamatok egy véges időhorizontra koncentrálódnak, így a lokálisan ekvivalens mértékcsere és az ekvivalens mértékcsere azonos fogalmak. A matematikai tisztánlátás szempontjából azonban hasznos a végtelen időhorizontra vonatkozó eredmények egyidejű tárgyalása is. Ekkor azonban talán érdemes bevezetni a lokálisan ekvivalens mértékcserét is. Lehet, hogy nem? A kérdés főleg pedagógiai jellegű. Mondjuk meg az igazságot, vagy kíméljük meg tőle a fénykereső ifjúságot? Érdemes-e rámutatni arra, hogy a mértékcsere és a nullmértékű halmazok, milyen szerepet játszanak „valójában”, vagy ne zavarjuk ezekkel a meglehetősen rafinált tényekkel az ez iránt teljesen érzéketlen hallgatóságot?

Lokálisan nullmértékű halmazok

Ha be kívánjuk vezetni a lokálisan ekvivalens mértékcserét is, akkor hozzá kell nyúlni a sztochasztikus analízis alapjaihoz. A szokásos feltételek bevezetésekor az összes nullmértékű halmazt hozzácsaptuk a filtrációhoz. Ez tulajdonképpen túl nagyvonalú lépés volt. Valójában csak azokat a nullmértékű halmazokat kell a filtrációhoz hozzácsapni, amelyek valamelyik $\mathcal{F}_t$ filtrációban már benne vannak. Vannak ugyanis olyan nullmértékű halmazok, amelyek eredendően egyetlen $\mathcal{F}_t$-nek sem elemei, vagyis amelyek bekövetkezését egyetlen véges időpontban sem lehet eldönteni. Ilyen például az olyan kimenetelek halmaza, amelyekre a nagy számok törvénye teljesül, vagy például azon trajektóriák halmaza, amelyek határértéke egy megadott érték, stb.

Lokálisan nullmértékű halmazok

Az olyan nullmértékű halmazokat, amelyek bekövetkezését valamilyen véges időpontban el lehet dönteni, lokálisan nullmértékű halmazoknak mondjuk. Valójában a sztochasztikus analízis „működéséhez" csak ezekre a nullmértékű halmazokra van szükség. Ha a szokásos feltételek defíníciójában csak ezeknek a nullmértékű halmazoknak a meglétét követeljük meg, akkor a lokálisan ekvivalens mértékcsere nem módosítja a szokásos feltételeket és a sztochasztikus analízis tárgyalása során korábban belátott állítások mindegyik szó szerint érvényben marad.

A szokásos feltételek újratöltve

Definition

A filtrációnak jobbról folytonosnak kell lenni és teljesülni kell annak, hogy ha $N \in \mathcal{A}$ olyan, hogy egyrészt $\mathbf{P}(N) = 0$, másrészt van olyan t, hogy $N \in \mathcal{F}_t$, akkor minden más s-re is $N \in \mathcal{F}_s$. Ezzel a „nem megfigyelhető" nullmértékű halmazokat kizártuk.

Radon–Nikodym-folyamat

Definition

A $\Lambda(t) \stackrel{\circ}{=} d\mathbf{P}(t) / d\mathbf{Q}(t)$ folyamatot a $\mathbf{P}$ és $\mathbf{Q}$ Radon–Nikodym-folyamatának mondjuk.

Az elmondottakat a következő állításban foglalhatjuk össze:

Theorem

A $\mathbf{P}$ *és* $\mathbf{Q}$ *mértékek pontosan akkor lokálisan ekvivalensek, ha a* Λ *Radon–Nikodym folyamatuk pozitív martingál. A* $\mathbf{P}$ *és* $\mathbf{Q}$ *mértékek pontosan akkor ekvivalensek az* $(\Omega, \mathcal{F}_\infty)$ *mérhető téren, ha a* Λ *pozitív, egyenletesen integrálható martingál.*

Radon–Nikodym-folyamat

A már elmondottak után csak azt kell belátni, hogy ha a $\Lambda > 0$ egyenletesen integrálható martingál, akkor a $\mathbf{P}$ és a $\mathbf{Q}$ ekvivalens az $(\Omega, \mathcal{F}_\infty)$ téren. Ha a Λ egyenletesen integrálható, pozitív martingál, akkor alkalmas $\xi > 0$, $\mathcal{F}_\infty$-mérhető változóra $\Lambda(t) = \mathbf{E}(\xi \mid \mathcal{F}_t)$. Tekintsük az $\mathbf{R}(A) \circeq \int_A \xi d\mathbf{P}$ mértéket.

$$\mathbf{R}(\Omega) \circeq \int_\Omega \xi d\mathbf{P} = \int_\Omega \Lambda(t)\, d\mathbf{P} = 1,$$

vagyis az $\mathbf{R}$ valószínűségi mérték. Ha $A \in \mathcal{F}_t$, akkor a feltételes várható érték definíciója szerint

$$\mathbf{R}(A) \circeq \int_A \xi d\mathbf{P} = \int_A \Lambda(t)\, d\mathbf{P} = \mathbf{Q}(A),$$

vagyis az $\mathbf{R}$ és a $\mathbf{Q}$ valószínűségi mértékek az $\cup_t \mathcal{F}_t$ π-rendszeren megegyeznek.

Világos, hogy azok korlátos függvények $\mathcal{L}$ halmaza, amelyekre a két mérték szerint vett integrál megegyezik λ-rendszert alkotnak. (Például az imént láttuk, hogy $1 \in \mathcal{L}$.) Így a monoton osztály tétel miatt $\sigma\left(\cup_t \mathcal{F}_t\right) \overset{\circ}{=} \mathcal{F}_\infty$ σ-algebrán a két mérték megegyezik és így éppen $\xi = d\mathbf{Q}/d\mathbf{P}$.

Lokálisan ekvivalens mértékcsere és pozitív martingálok

Érdemes hangsúlyozni, hogy valójában az ekvivalens mértékcseréket azonosítottuk a pozitív egyenletesen integrálható martingálokkal. Ugyanakkor a lokálisan ekvivalens mértékcseréket csak a pozitív martingálok egy részhalmazával azonosítottuk, vagyis azt nem láttuk be, hogy ha van egy Λ pozitív martingálunk akkor van olyan $\mathbf{P}$ és $\mathbf{Q}$ amelyek lokálisan ekvivalensek és a Λ éppen a megfelelő Radon–Nikodym-folyamat. A probléma teljes megértése szempontjából érdemes ezt is tisztázni. Legyen Λ egy pozitív martingál. Ilyenkor a Λ egy

$$\mathbf{Q}(F) \circeq \int_F \Lambda(t)\, d\mathbf{P}, \quad F \in \mathcal{F}_t$$

additív halmazfüggvényt definiál a $\cup_t \mathcal{F}_t$ algebrán. A Λ martingál tulajdonsága azért lényeges, mert ez biztosítja azt, hogy valamely $F \in \cup_t \mathcal{F}_t$ mértéke ne függjön attól, hogy melyik $\mathcal{F}_t$ σ-algebrából vettük éppen ki.

A kérdés csak az, hogy az így kapott $\mathbf{Q}$ additív halmazfüggvény kiterjeszthető-e a $\sigma\left(\cup_t \mathcal{F}_t\right)$ σ-algebrára. Ehhez a kiterjesztési tétel miatt szükséges és elegendő, hogy a $\mathbf{Q}$ σ-additív legyen az $\cup_t \mathcal{F}_t$ algebrán. Ezt azonban általában nem tudjuk garantálni. Az absztrakt mértékelméletből tudjuk, hogy általában csak bizonyos topológiai és regularitási extra feltételekkel lehet garantálni, hogy egy additív halmazfüggvény σ-additív is legyen. Éppen ez teszi szükségessé a konkrét konstrukciókban a topológiai és a mérhetőségi struktúra valami fajta összekapcsolását. Ismert, hogy amennyiben az $(\Omega, \mathcal{A})$ egy teljes, szeparábilis metrikus tér a Borel-halmazokkal, akkor egy algebrán értelmezett, additív, véges és belülről kompakt reguláris halmazfüggvény egyúttal σ-additív is.

Lokálisan ekvivalens mértékcsere és pozitív martingálok

A sztochasztikus analízis legtöbb konkrét konstrukciója esetén garantálható, hogy az $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$ éppen a $[0,1]$ intervallum legyen a Borel-halmazokkal és a Lebesgue-mértékkel. Ilyenkor a $\mathbf{Q}$ kiterjeszthető mértékké. Az absztraktság általunk tárgyalt szintjén azonban a kiterjesztés „reménytelen". Nyomatékosan hangsúlyozni kell, hogy az elmondottak részletei semmilyen jelentőséggel nem bírnak. A lényeges gondolat csak az, hogy a jelenlegi absztrakt tárgyalási szinten csak az egyenletesen integrálható Λ martingálok azonosíthatóak valamilyen mértékcserével. Ez is arra mutat, hogy a lokálisan ekvivalens mértékcsere több tikot rejt, mint arra első ránézésre számítottunk.

Világos, hogy a $\Lambda > 0$ miatt a Λ^{-1} mindig létezik. Mivel

$$\mathbf{P}(A) = \int_A 1 d\mathbf{P} = \int_A \Lambda^{-1}(t)\,\Lambda(t)\, d\mathbf{P} = \int_A \Lambda^{-1}(t)\, d\mathbf{Q}$$

ezért $\Lambda^{-1}(t)$ a $\mathbf{P}$ deriváltja az $\mathcal{F}_t$ σ-algebrán a $\mathbf{Q}$-ra nézve, ezért a Λ^{-1} martingál a $\mathbf{Q}$ alatt. A Λ regularizáláshoz felhasználtuk a szokásos feltételeket a $\mathbf{P}$ alatt. A $\mathbf{Q}$ alatt a Λ^{-1}-et már nem kell regularizálni, ugyanis a $\Lambda > 0$ miatt az $x \mapsto x^{-1}$ reciprok függvény folytonos. Az Itô-formulából evidens, hogy a Λ^{-1} szemimartingál a $\mathbf{P}$ alatt. Vagyis a lokális martingálok, vagy a martingálok halmaza nem invariáns a mértékcserére nézve. A mértékcserével kapcsolatos legfontosabb kérdések, hogy mi történik a szemimartingálokkal az ekvivalens mértékcsere hatására, illetve mi történi a sztochasztikus integrálokkal az ekvivalens mértékcsere hatására?

A kulcs állítás a következő:

Theorem

Tegyük fel, hogy a $\mathbf{P}$ *és a* $\mathbf{Q}$ *mértékek lokálisan ekvivalensek. Legyen* L *adaptált, jobbról reguláris folyamat.*

1. *Az* L *pontosan akkor lokális martingál a* $\mathbf{Q}$ *alatt, ha az* $L\Lambda$ *szorzat lokális martingál a* $\mathbf{P}$ *alatt.*
2. *Az* L *pontosan akkor martingál a* $\mathbf{Q}$ *alatt, ha az* $L\Lambda$ *szorzat martingál a* $\mathbf{P}$ *alatt.*

Lokálisan ekvivalens mértékcsere és martingálok

Először az egyszerűbb állítást igazoljuk: Az L pontosan akkor martingál a $\mathbf{Q}$ alatt, ha az $L\Lambda$ martingál a $\mathbf{P}$ alatt.
A martingál tulajdonság teljesüléséhez a $\mathbf{Q}$, illetve a $\mathbf{P}$ alatt szükséges és elegendő, hogy minden $s < t$ és $F \in \mathcal{F}_s$ esetén

$$\int_F L(t)\, d\mathbf{Q} = \int_F L(s)\, d\mathbf{Q},$$

illetve

$$\int_F L(t)\,\Lambda(t)\, d\mathbf{P} = \int_F L(s)\,\Lambda(s)\, d\mathbf{P}.$$

De ha $F \in \mathcal{F}_s$, akkor

$$\int_F L(t)\, d\mathbf{Q} = \int_F L(t)\, \frac{d\mathbf{Q}}{d\mathbf{P}} d\mathbf{P} = \int_F L(t)\,\Lambda(t)\, d\mathbf{P} =$$
$$\int_F L(s)\,\Lambda(s)\, d\mathbf{P} = \int_F L(s)\, \frac{d\mathbf{Q}}{d\mathbf{P}} d\mathbf{P} = \int_F L(s)\, d\mathbf{Q}.$$

Amiből az említett állítás már triviális.

Lokálisan ekvivalens mértékcsere és a lokális martingálok

Legyen (σ_n) egy lokalizációs sorozat. Nyilván elegendő belátni, hogy az L^{σ_n} pontosan akkor martingál a $\mathbf{Q}$ alatt, ha az $(L\Lambda)^{\sigma_n}$ martingál a $\mathbf{P}$ alatt. Az egyszerűbb jelölés céljából legyen $\sigma \doteq \sigma_n$. A (σ_n) lokalizációs sorozat tagjairól mindig feltehetjük, hogy korlátosak, így feltehetjük, hogy a σ korlátos, vagyis van olyan r, amelyre $\sigma \leq r$. A Λ martingál a $\mathbf{P}$ alatt, így a megállási opciókról szóló tétel szerint tetszőleges $\rho \leq r$ korlátos megállási időre

$$\mathbf{E}^{\mathbf{P}}\left(\Lambda(r) \mid \mathcal{F}_\rho\right) = \Lambda(\rho),$$

Az egyszerűség kedvéért feltehetjük, hogy az L folytonos, ugyanis csak ilyenkor fogjuk az állítást használni. Ilyenkor az L^{σ} lokalizált folyamatra feltehetjük, hogy korlátos, így alább a kiemelési szabály triviálisan használható. Ellenkező esetben a kiemelési szabályt meg kellene gondolni.

$$\mathbf{E}^{\mathbf{Q}}\left(L\left(\rho\right)\right) = \mathbf{E}^{\mathbf{P}}\left(L\left(\rho\right)\Lambda\left(r\right)\right) = \mathbf{E}^{\mathbf{P}}\left(\mathbf{E}^{\mathbf{P}}\left(L\left(\rho\right)\Lambda\left(r\right) \mid \mathcal{F}_{\rho}\right)\right) =$$

$$= \mathbf{E}^{\mathbf{P}}\left(L\left(\rho\right)\mathbf{E}^{\mathbf{P}}\left(\Lambda\left(r\right) \mid \mathcal{F}_{\rho}\right)\right) = \mathbf{E}^{\mathbf{P}}\left(L\left(\rho\right)\Lambda\left(\rho\right)\right).$$

Legyen $s < t$ és $F \in \mathcal{F}_s$. Legyen

$$\tau \mathrel{\overset{\circ}{=}} t\chi_F + s\chi_{F^c}.$$

Könnyen látható, hogy τ egy megállási idő. Ezt felhasználva

$$\int_F L^\sigma(t)\, d\mathbf{Q} - \int_F L^\sigma(s)\, d\mathbf{Q} = \int_\Omega L^\sigma(t \wedge \tau)\, d\mathbf{Q} - \int_\Omega L^\sigma(s \wedge \tau)\, d\mathbf{Q} =$$
$$= \mathbf{E}^{\mathbf{Q}}(L(\sigma \wedge t \wedge \tau)) - \mathbf{E}^{\mathbf{Q}}(L(\sigma \wedge s \wedge \tau)) =$$
$$= \mathbf{E}^{\mathbf{P}}((L\Lambda)(\sigma \wedge t \wedge \tau)) - \mathbf{E}^{\mathbf{P}}((L\Lambda)(\sigma \wedge s \wedge \tau)) =$$
$$= \int_F (L\Lambda)^\sigma(t)\, d\mathbf{P} - \int_F (L\Lambda)^\sigma(s)\, d\mathbf{P}.$$

Az egyenlőség két oldalán pontosan akkor van nulla, illetve az egyenlőségben szereplő integrálok pontosan akkor értelmesek, ha a másik oldalon nulla van, illetve, ha az integrálok értelmesek, amiből az állítás evidens.

Example

A Λ^{-1} martingál a $\mathbf{Q}$ alatt pontosan azért, mert a $\Lambda^{-1}\Lambda \equiv 1$ martingál a $\mathbf{P}$ alatt.

Lokálisan ekvivalens mértékcsere és a kvadratikus variáció

Megjegyezzük, hogy a kvadratikus variáció nem változik a lokálisan ekvivalens mértékcsere során, ugyanis a lokálisan ekvivalens mértékcsere tetszőleges $t < \infty$ időpont esetén nem módosítja a sztochasztikusan konvergenciát. A kvadraikus variációt minden véges időpontra definiáltuk. Így a kvadratikus variáció nem függ a nem lokálisan nullmértékű halmazoktól. Ennek megfelelően az alábbi állításokban a kvadratikus variáció bármelyik mérték esetén vehető. A korlátos változású integrátor szerinti integrálás, mivel trajektóriánként történik, szintén nem változik az ekvivalens mértékcsere során, így az alábbi integrál invariáns a lokálisan ekvivalens mértékcserére, így bármelyik mérték alatt képezhető. $\Lambda > 0$, így a Λ^{-1} értelmes és nyilván jobbról reguláris marad, ugyanis a Λ pozitivitása miatt a reciprok függvény nem módosítja a Λ trajektóriáinak folytonossági tulajdonságait. Könnyen látható, hogy minden reguláris függvény minden véges szakaszon korlátos, így az alábbi $\Lambda^{-1} \bullet [\Lambda, L]$ integrál mindig létezik.

Lokális martingálok transzformációja

Theorem

Tegyük fel, hogy a **P** *és a* **Q** *mértékek lokálisan ekvivalensek. Egy L pontosan akkor lokális martingál a* **P** *alatt, ha az*

$$L - \Lambda^{-1} \bullet [\Lambda, L]$$

lokális martingál a **Q** *alatt.*

Az egyszerűség kedvért csak azt az esetet igazoljuk, amikor a Λ és az L folytonos. Ez nem jelent érdemi megszorítást, ugyanis a gondolatmenetet a Wiener-folyamat esetén fogjuk alkalmazni. Valójában a folytonosságra csak azért van szükség, mert egyrészt nem akarjuk használni a $\Delta [L, N] = \Delta L \Delta N$ összefüggést, ugyanis ezt korábban nem igazoltuk, másrészt nem foglalkoztunk a nem folytonos lokális martingálok szerinti integrálással. A tétel azonban általános esetben is érvényes.

Lokálisan martingálok transzformációja

Mivel $\Lambda > 0$, így a Λ^{-1} folyamat értelmes. Ugyancsak az egyszerűség kedvéért feltehetjük, hogy $L(0) = 0$. A parciális integrálás formulája miatt

$$L\Lambda - [L, \Lambda] = L_- \bullet \Lambda + \Lambda_- \bullet L = L \bullet \Lambda + \Lambda \bullet L.$$

A bal oldalon a Λ és az L $\mathbf{P}$ lokális martingál, vagyis a bal oldali sztochasztikus integrálok lokális martingálok a $\mathbf{P}$ mérték mellett. Így a $L\Lambda - [L, \Lambda]$ lokális martingál a $\mathbf{P}$ alatt. A két oldal Λ-val végigosztva az előző állítás szerint a

$$L - \frac{1}{\Lambda}[L, \Lambda]$$

lokális martingál a $\mathbf{Q}$ alatt, hiszen a Λ-szorosa lokális martingál a $\mathbf{P}$ alatt.

Lokálisan martingálok transzformációja

Mivel lokális martingálok összege lokális martingál meg kell mutatni, hogy a

$$\frac{1}{\Lambda}[L,\Lambda] - \Lambda^{-1} \bullet [\Lambda, L]$$

lokális martingál a $\mathbf{Q}$ alatt. A parciális integrálás formulája szerint a $\mathbf{Q}$ mérték mellett

$$\frac{1}{\Lambda}[L,\Lambda] = \frac{1}{\Lambda_-} \bullet [L,\Lambda] + [L,\Lambda]_- \bullet \frac{1}{\Lambda} + \left[\frac{1}{\Lambda}, [L,\Lambda]\right].$$

Az L és a Λ feltételezett folytonossága miatt az $[L,\Lambda]$ folytonos és a formulában szereplő keresztvariáció nulla. Ebből

$$\frac{1}{\Lambda}[L,\Lambda] - \frac{1}{\Lambda} \bullet [\Lambda, L] = [L,\Lambda] \bullet \frac{1}{\Lambda}.$$

Lokálisan martingálok transzformációja

Vegyük észre, hogy a Λ^{-1} martingál a $\mathbf{Q}$ alatt. Ebből következően a

$$[L, \Lambda] \bullet \Lambda^{-1}$$

sztochasztikus integrál lokális martingál a $\mathbf{Q}$ mérték mellett. Így tehát a

$$\frac{1}{\Lambda}[L, \Lambda] - \frac{1}{\Lambda} \bullet [\Lambda, L] = [L, \Lambda] \bullet \Lambda^{-1}$$

is lokális martingál a $\mathbf{Q}$ alatt, így az

$$L - \frac{1}{\Lambda}[L, \Lambda] + \frac{1}{\Lambda}[L, \Lambda] - \frac{1}{\Lambda} \bullet [\Lambda, L] = L - \frac{1}{\Lambda} \bullet [\Lambda, L]$$

lokális martingál a $\mathbf{Q}$ alatt.

Lokálisan martingálok transzformációja

Megfordítva, tegyük most fel, hogy az

$$L - \Lambda^{-1} \bullet [\Lambda, L]$$

lokális martingál a $\mathbf{Q}$ alatt. Ekkor mivel $\left(\Lambda^{-1}\right)^{-1} = \Lambda$ a már elmondottak miatt az újratranszformált transzformált

$$L - \Lambda^{-1} \bullet [\Lambda, L] - \Lambda \bullet \left[\Lambda^{-1}, L - \Lambda^{-1} \bullet [\Lambda, L]\right]$$

lokális martingál a $\mathbf{P}$ alatt. Meg kell mutatnunk, hogy ez a kifejezés éppen L. A második kvadratikus variációban a $\Lambda^{-1} \bullet [\Lambda, L]$ tag korlátos változású az L folytonos, így

$$\left[\Lambda^{-1}, L - \Lambda^{-1} \bullet [\Lambda, L]\right] = \left[\Lambda^{-1}, L\right].$$

Vagyis az újratranszformált kifejezés éppen.

$$L - \Lambda^{-1} \bullet [\Lambda, L] - \Lambda \bullet \left[\Lambda^{-1}, L\right].$$

Lokálisan martingálok transzformációja

A parciális integrálás formulája szerint

$$0 = 1 - 1 = \Lambda^{-1}\Lambda - \Lambda^{-1}(0)\,\Lambda(0) = \Lambda^{-1} \bullet \Lambda + \Lambda \bullet \Lambda^{-1} + \left[\Lambda, \Lambda^{-1}\right].$$

A két oldal L-lel vett kvadratikus variációját felírva és felhasználva, hogy a kvadratikus variációs tag a folytonosság miatt elhagyható

$$0 = \left[\Lambda^{-1} \bullet \Lambda, L\right] + \left[\Lambda \bullet \Lambda^{-1}, L\right].$$

A polaritási formula miatt

$$\Lambda^{-1} \bullet [\Lambda, L] + \Lambda \bullet \left[\Lambda^{-1}, L\right] = 0.$$

Ezt az újratranszformált kifejezésbe beírva

$$L - \Lambda^{-1} \bullet [\Lambda, L] - \Lambda \bullet \left[\Lambda^{-1}, L\right] = L.$$

Így az L lokális martingál a $\mathbf{P}$ alatt.

Girszanov transzformáció

Definition

Az $L - \Lambda^{-1} \bullet [\Lambda, L]$ transzformációt az L Girszanov-transzformációjának mondjuk és $\widehat{L}$ módon jelöljük.

Corollary

$L = \widehat{\widehat{L}}$.

Theorem

A szemimartingálok osztálya invariáns a lokálisan ekvivalens mértékcserére.

Legyen $S = S(0) + L + V$ egy szemimartingál a $\mathbf{P}$ alatt, ahol L lokális martingál és V véges változású. Mivel a V véges változású a $\mathbf{Q}$ alatt is , ezért elegendő belátni, hogy ha az L lokális martingál a $\mathbf{P}$ alatt, akkor az L szemimartingál a $\mathbf{Q}$ alatt. Az

$$\widehat{L} \overset{\circ}{=} L - \Lambda^{-1} \bullet [\Lambda, L]$$

lokális martingál a $\mathbf{Q}$ alatt és ezért az

$$L = \widehat{L} + \Lambda^{-1} \bullet [\Lambda, L]$$

szemimartingál a $\mathbf{Q}$ alatt. Vagyis a mértékcsere hatására a szemimartingálok osztálya nem változik.

Ekvivalens mértékcsere és a sztochasztikus analízis

Az evivalens mértékcsere lényege, hogy nem módosítja a sztochasztikus analízisben szereplő összefüggéseket. Másképpen fogalmazva a sztochasztikus analízis legtöbb összefüggése „invariáns" az alapul vett mértékre nézve. Miként említettük az ekvivalens mértékcsere esetén a sztochasztikus és a majdnem mindenhol való konvergencia nem változik. Ebből következően valamely folyamat kvadratikus variációja sem változik a lokálisan ekvivalens mértékcsere során. A lokálisan ekvivalens mértékcsere nyilvánvalóan nem befolyásolja a trajektóriánként definiált sztochasztikus integrálok értékét.

Ekvivalens mértékcsere és a sztochasztikus integrálás

Kevésbé nyilvánvaló, hogy a sztochasztikus integrál értéke „általában" ugyancsak nem változik a lokális martingálok szerint vett integrálokra. Ennek indoklása némiképpen bonyolultabb. Ha S egy folytonos szemimartingál és X egy folytonos, adaptált folyamat, akkor miként láttuk minden t-re az $\int_0^t XdS$ sztochasztikus integrál az Itô-féle közelítő összegek sztochasztikus konvergenciában vett határértéke. Mivel a lokálisan ekvivalens mértékcsere nem befolyásolja a sztochasztikus konvergenciát a filtráció egyes σ-algebráin, ezért az integrálás eredménye nem függ az alapul vett mértéktől.

A monoton osztály tétel használata

Világos, hogy a folytonos, korlátos és adaptált folyamatok π-rendszert alkotnak és az olyan X korlátos, progresszíven mérhető folyamatok, amelyekre a két mérték mellett vett S szerinti integrál megegyezik λ-rendszer. Emlékeztetünk, hogy a sztochasztikus integrálás additív művelet és a sztochasztikus integrálokra érvényes a majorált konvergencia tétele, illetve minden korlátos, progresszíven mérhető folyamat integrálható. Így a monoton osztály tétel miatt minden olyan korlátos X folyamat esetén, amely mérhető a folytonos, adaptált folyamatok által generált legszűkebb σ-algebra szerint a két integrál megegyezik.

Előrejelezhető folyamatok

Az észrevétel alapján indokolt a következő definíció:

Definition

Az $\mathbb{R}_+ \times \Omega$ téren folytonos, adaptált folyamatok által generált legszűkebb σ-algebrára mérhető folyamatokat előrejelezhetőnek mondjuk.

Mivel minden folytonos adaptált folyamat progresszíven mérhető az előrejelezhető folyamatok progresszíven mérhetőek. Megmutatható, hogy a tartalmazás szigorú. Például vannak olyan jobbról reguláris, adaptált folyamatok, amelyek nem előrejelezhetőek. Ilyen például a Poisson-folyamat. Ennek pontos igazolása azonban messze vezetne. (A dolog értelemszerűen összefügg avval, hogy a Poisson-folyamat ugrásai nem előrejelezhetőek, a nehézség abban van, hogy az előrejelezhetőség két fogalmát pontosan össze kell kötni.)

Az idáig elmondottakat a következő lemmában foglalhatjuk össze:

Lemma

Ha $\mathbf{P}$ *és* $\mathbf{Q}$ *lokálisan ekvivalens mértékek és* S *folytonos szemimartingál, akkor minden korlátos előrejelezhető* X *folyamatra az* $X \bullet S$ *sztochasztikus integrál független a* $\mathbf{P}$ *és a* $\mathbf{Q}$ *mértéktől.*

A tétel általában is igaz, bár tetszőleges S szemimartingál esetén nem definiáltuk a sztochasztikus integrált. A filtrációkkal persze vigyázni kell. Az elmondottak erősen függnek attól, hogy miként bővítettük a filtrációt. A progresszíven való mérhetőség és az előrejelezhetőség függ a filtrációtól, ezért a két oldalon azonos filtrációknak kell lenni, vagyis a nullmértékű halmazok azonos osztályaival kell a filtrációkat bővíteni.

Sztochasztikus integrálás és mértékcsere

Theorem

Ha X előrejelezhető és S folytonos szemimartingál, akkor az $X \bullet S$ sztochasztikus integrál, invariáns a lokálisan ekvivalens mértékcserére, vagyis az $X \bullet S$ pontosan akkor létezik egy $\mathbf{P}$ mérték alatt, ha létezik a vele lokálisan ekvivalens $\mathbf{Q}$ alatt is, és ilyenkor a két integrál értéke azonos.

Hasonló megjegyzés érvényes miként korábban, vagyis a tétel tetszőleges szemimartingál esetén is teljesül.

Sztochasztikus integrálás és mértékcsere

Mivel a véges változású rész szerinti integrál nyilván invariáns a lokálisan ekvivalens mértékcserére, ezért elegendő a lokális martingál szerinti résszel foglalkozni. Legyen tehát S tetszőleges folytonos lokális martingál a $\mathbf{P}$ mérték mellett. Az S szemimartingál a $\mathbf{Q}$ alatt és miként láttuk ha X korlátos és előrejelezhető, akkor $(X \bullet S)_{\mathbf{P}} = (X \bullet S)_{\mathbf{Q}}$. Érdemes hangsúlyozni, hogy a két oldalon, az integrátorok különbözősége miatt teljesen más matematikai konstrukciók állnak. Ha most X tetszőleges a $\mathbf{P}$ alatt integrálható, előrejelezhető folyamat és $X_n \circeq X\chi\left(|X| \leq n\right)$, akkor, mivel az X_n korlátos, az állítás igaz, vagyis $(X_n \bullet S)_{\mathbf{P}} = (X_n \bullet S)_{\mathbf{Q}}$. Meg fogjuk mutatni, hogy az $(X \bullet S)_{\mathbf{Q}}$ integrál is létezik. Ha ez teljesül, akkor mind a két oldalon alkalmazva a majorált konvergencia tételt az állítás már egyszerűen indokolható.

A lokális martingál rész

Legyen tehát $S = S(0) + N + V$ az S felbontása a $\mathbf{Q}$ alatt. A V véges változású és folytonos ezért $[V] = [V, N] = 0$. Mivel a kvadratikus variáció a lokálisan ekvivalens mértékcsere során nem változik, ezért $[N] = [S]$. Az X pontosan akkor integrálható az S lokális martingál szerint a $\mathbf{P}$ alatt, ha

$$X^2 \bullet [S] < \infty$$

majdnem mindenhol a $\mathbf{P}$ alatt. Amihez persze elegendő, ha ugyanez minden véges szakaszon teljesül, vagyis elegendő, ha egy lokálisan nullmértékű halmazon teljesül. Így az $[S] = [N]$ miatt triviálisan $X^2 \bullet [N] < \infty$ lokálisan majdnem mindenhol a $\mathbf{P}$ alatt, így a $\mathbf{Q}$ és a $\mathbf{P}$ lokális ekvivalenciája miatt a $\mathbf{Q}$ alatt is, tehát az $X \bullet N$ integrál létezik a $\mathbf{Q}$ alatt.

A véges változású rész

A V véges változású folyamat mellett az $X \bullet V$ integrál pontosan akkor létezik, ha

$$|X| \bullet \mathrm{Var}(V) < \infty,$$

ahol $\mathrm{Var}(V)$ a V trajektóriánként vett teljes megváltozásainak folyamata. A Girszanov-transzformáció szerint

$$V \stackrel{\circ}{=} \Lambda^{-1} \bullet [S, \Lambda] = \left[S, \Lambda^{-1} \bullet \Lambda\right] \stackrel{\circ}{=} [S, L],$$

ahol az L lokális martingál a $\mathbf{P}$ alatt. A Kunita–Watanabe egyenlőtlenség szerint

$$|X| \bullet \mathrm{Var}(V) \leq \sqrt{X^2 \bullet [S]}\sqrt{1^2 \bullet [L]} < \infty,$$

tehát az $X \bullet V$ integrál is létezik. Így az

$$(X \bullet S)_{\mathbf{Q}} \stackrel{\circ}{=} (X \bullet N)_{\mathbf{Q}} + (X \bullet V)_{\mathbf{Q}}$$

integrál is létezik és az állítást igazoltuk.

Lokális abszolút folytonosság

Érdemes megjegyezni a következőt: Azt mondjuk, hogy egy **Q** valószínűségi mérték lokálisan abszolút folytonos a **P** valószínűségi mértékre nézve, ha a **Q** leszűkítése minden $\mathcal{F}_t$ σ-algebrára abszolút folytonos a **P** leszűkítésére nézve. Világos, hogy a szokásos feltételek nem feltétlenül maradnak érvényben, ha a **P**-ről áttérünk a **Q**-ra, de a nullmértékű halmazok halmaza csak nőhet. Így a **Q** alatt az előrejelezhető folyamatok halmaza elvileg bővülhet. A bemutatott gondolatmenettel megmutatható, hogy tetszőleges az eredeti filtrációra nézve előrejelezhető, integrálható folyamat integrálható lesz a **Q** alatt is és a **P** alatti integrálja a **Q** alatti integrál egy verziója lesz.

Az előrejelezhető folyamatok szerepe

Az előrejelezhető folyamatok kiemelkedően fontos szerepet játszanak a sztochasztikus integrálás elméletében. Egyrészt nem feltétlenül folytonos szemimartingál esetén, a sztochasztikus integrál csak előrejelezhető integrandus esetén definiálható. Másrészt a folytonos szemimartingálok szerinti integrálás mindig visszavezethető előrejelezhető integrandus integrálására: Emlékeztetünk, hogy a lokális martingálok szerinti sztochasztikus integrálok az $\mathcal{L}^2_{\mathrm{loc}}$ tértől függnek. Az $\mathcal{L}^2_{\mathrm{loc}}$ tér elemei az integrátor lokális martingál által generált Doléans-mérték szerinti ekvivalencia osztályok. Két integrandus, amely azonos ekvivalencia osztályba esik azonos integrállal rendelkezik.

Az előrejelezhető folyamatok szerepe

Ennek függvényében igen fontosak a következő állítások:

Theorem

Ha valamely lokális martingál folytonos, akkor az $\mathcal{L}^2_{loc}$ minden eleme tartalmaz előrejelezhető reprezentánst.

Theorem

Ha a μ Doléans-mértékre $\mu \ll \lambda \times \mathbf{P}$, akkor minden szorzatmérhető, adaptált folyamat a μ szerint ekvivalens valamely progresszíven mérhető folyamattal.

Az állítások igazolása messze vezetne, ezért a bizonyításukat elhagyjuk.

Sztochasztikus integrálás és mértékcsere

A második állítás fontos következménye az alábbi:

Theorem

Ha X tetszőleges adaptált és szorzatmérhető folyamat és

$$\mathbf{P}\left(\int_0^t X^2(s)\,ds < \infty\right) = 1,$$

és w egy Wiener-folyamat, akkor az $X \bullet w$ létezik és az integrál értéke nem változik a lokálisan ekvivalens mértékcsere folyamán.

Folytonos lokális martingál esetén az integrál csak a progresszíven mérhető folyamatokra értelmes. Ha azonban az integrátor egy Wiener-folyamat, akkor az adaptált és szorzatmérhető folyamatokra is lehet az integrált definiálni. Mindez persze nem túl érdekes, mert mindig található előrejelezhető folyamat is, amelyre az integrál ekvivalens az eredeti adaptált, szorzatmérhető folyamat szerinti integrállal.

Hogyan tudunk ekvivalens mértékcserét csinálni?

Most a kérdést némiképpen megfordítjuk. Hogyan lehet ekvivalens, vagy lokálisan ekvivalens mértékcseréket készíteni? A $d\mathbf{Q}/d\mathbf{P}$ derivált a mértékek feltételezett ekvivalenciája miatt pozitív. Ebből következően a Λ martingál is pozitív. Ha valamely folyamatról biztosan tudni akarjuk, hogy pozitív, akkor a folyamatot érdemes $\exp(H)$-alakban előállítani. A kérdés csak az, hogy mi lesz a H?

Sztochasztikus logaritmus

A Girszanov-formula szokásos megfogalmazásában szereplő transzformáció az alábbi észrevételen alapszik:

Theorem

Ha Λ szigorúan pozitív, folytonos lokális martingál, akkor létezik, mégpedig egyetlen $\mathrm{Log}\,(\Lambda)$ „sztochasztikus logaritmusa". Pontosabban az

$$L \overset{\circ}{=} \mathrm{Log}\,(\Lambda)\,(\Lambda) \overset{\circ}{=} \log \Lambda\,(0) + \Lambda^{-1} \bullet \Lambda$$

az egyetlen olyan folytonos lokális martingál, amelyre

$$\Lambda = \mathcal{E}\,(L) \overset{\circ}{=} \exp\left(L - \frac{1}{2}\,[L]\right).$$

Az egyértelműség

Ha $\Lambda = \mathcal{E}(L_1) = \mathcal{E}(L_2)$, akkor mivel $\Lambda > 0$, ezért

$$1 = \frac{\Lambda}{\Lambda} = \exp\left(L_1 - L_2 - \frac{1}{2}[L_1] + \frac{1}{2}[L_2]\right),$$

vagyis $L_1 - L_2 = \frac{1}{2}([L_1] - [L_2])$, tehát az $L_1 - L_2$ folytonos lokális martingál korlátos változású, következésképpen Fisk tétele alapján konstans. Mivel evidens módon $L_1(0) - L_2(0) = \log \Lambda(0)$, ezért $L_1 = L_2$.

Létezés

Mivel $\Lambda > 0$, a $\log \Lambda$ kifejezés értelmes, és az Itô-formula alapján

$$\begin{aligned} \log \Lambda &= \log \Lambda(0) + \Lambda^{-1} \bullet \Lambda - \frac{1}{2}\frac{1}{\Lambda^2} \bullet [\Lambda] \overset{\circ}{=} \\ &\overset{\circ}{=} L - \frac{1}{2}\frac{1}{\Lambda^2} \bullet [\Lambda] = L - \frac{1}{2}\left[\Lambda^{-1} \bullet \Lambda\right] = \\ &= L - \frac{1}{2}[L]. \end{aligned}$$

Ebből

$$\Lambda = \exp(\log \Lambda) = \exp\left(L - \frac{1}{2}[L]\right) \overset{\circ}{=} \mathcal{E}(L).$$

Girszanov-transzformáció átalakítása

Theorem

Tegyük fel, hogy a **P** *és* **Q** *mértékek lokálisan ekvivalensek és Radon–Nikodym-deriváltakból álló* Λ *martingál folytonos. Tegyük fel, hogy* $\Lambda = \mathcal{E}(L)$, *vagyis* $L = \operatorname{Log}(\Lambda)$. *Az* M *pontosan akkor lokális martingál a* **P** *mérték mellett, ha az*

$$\widehat{M} \circeq M - [M, L] \circeq M - [M, \operatorname{Log}(\Lambda)]$$

lokális martingál a **Q** *mérték alatt.*

Az egyenlőség teljesüléséhez elegendő megjegyezni, hogy

$$\begin{aligned} [M, L] &\circeq \left[M, \log \Lambda(0) + \Lambda^{-1} \bullet \Lambda\right] = \left[M, \Lambda^{-1} \bullet \Lambda\right] = \\ &= \Lambda^{-1} \bullet [M, \Lambda]. \end{aligned}$$

Logaritmusból derivált készítése

Mivel garantálni akarjuk, hogy a derivált pozitív, a Λ martingált „exponenciális" alakban definiáljuk. A mértékcserét a derivált sztochasztikus logaritmusán keresztül definiáljuk. Az alábbi állítás gyenge pontja, hogy a Λ ugyan pozitív, de általában csak lokális martingál. Másképpen az összes $\mathcal{E}(L)$ alakú kifejezések nem mindegyike lesz egyenletesen integrálható martingál, de az ekvivalens mértékcserék mindegyike ilyen alakú. Vagyis az ekvivalens mértékcserék halmazát azonosíthatjuk a lokális martingálok egy részhalmazával, azokkal az L lokális martingálokkal, amelyekre nézve az $\mathcal{E}(L)$ egyenletesen integrálható martingál.

Logaritmusból derivált készítése

Theorem

Ha M és L folytonos lokális martingálok és a

$$\Lambda \doteq \mathcal{E}(L) \doteq \exp\left(L - \frac{1}{2}[L]\right)$$

folyamat a $[0, T]$ véges vagy végtelen szakaszon martingál, akkor az

$$\widehat{M} \doteq M - [L, M] = M - \frac{1}{\Lambda} \bullet [\Lambda, M]$$

a

$$\mathbf{Q}(A) \doteq \int_A \Lambda(T)\, d\mathbf{P}, \quad \frac{d\mathbf{Q}}{d\mathbf{P}} \doteq \Lambda(T)$$

mérték alatt a $[0, T]$ szakaszon folytonos, lokális martingál.

Vigyázat, az exponenciális martingál csak lokális martingál

Ha a Λ martingál a $[0, T]$ zárt szakaszon, akkor $\mathbf{Q}(\Omega) \triangleq \mathbf{E}(\Lambda(T)) = \mathbf{E}(\Lambda(0)) = 1$, vagyis a $\mathbf{Q}$ valószínűségi mérték. Mivel a Λ, mint minden nem negatív lokális martingál, szupermartingál, ahhoz, hogy a $[0, T]$ szakaszon martingál legyen szükséges és elegendő ha $\mathbf{E}(\Lambda(T)) = 1$. Ennek megfelelően a $[0, T]$ szakaszon való martingál feltétel pontosan azt jelenti, hogy a $\mathbf{Q}$ szintén valószínűségi mérték. Ha a Λ csak a $[0, T)$ szakaszon pozitív martingál és van olyan $\mathbf{Q}$ amely leszűkítéseinek deriváltja éppen a Λ, akkor a Λ egy lokálisan ekvivalens mértékcserét definiál a $[0, T)$ időtartományra.

Vigyázat, az exponenciális martingál csak lokális martingál

Ha $T = \infty$, akkor a Λ kiterjeszthető a $T = \infty$ időpontra martingálként, vagyis a Λ egyenletesen integrálható a $[0, \infty)$ félegyenesen. Vagyis a tételben a $[0, T]$ zártsága fontos, ugyanis a tétel úgy értendő, hogy a Λ a T pontra is kiterjeszthető martingálként. Véges szakaszon ehhez elegendő, ha a Λ martingál a zárt szakaszon, ugyanis akkor automatikusan egyenletesen integrálható. Természetesen véges szakaszon a probléma csak abból származhat, hogy a Λ esetleg valódi lokális martingál.

A formula igazolása

Az $[L, M]$-re vonatkozó formula a korábbiak szerint kapható. Evidens módon az $\widehat{M}$ folytonos, és mivel a feltétel szerint a Λ martingál, ezért

$$\Lambda(t) = \mathbf{E}(\Lambda(T) \mid \mathcal{F}_t) = \mathbf{E}\left(\frac{d\mathbf{Q}}{d\mathbf{P}} \mid \mathcal{F}_t\right),$$

vagyis tetszőleges $F \in \mathcal{F}_t$ halmazra

$$\int_F \Lambda(t)\, d\mathbf{P} = \int_F \frac{d\mathbf{Q}}{d\mathbf{P}} d\mathbf{P} = \mathbf{Q}(F),$$

vagyis $\Lambda(t)$ éppen a $d\mathbf{Q}(t) / d\mathbf{P}(t)$ Radon–Nikodym-derivált az $\mathcal{F}_t$ σ-algebrán. Ebből az állítás az elmondottak miatt már evidens.

A Wiener-folyamat esete

Legyen w egy Wiener-folyamat a $\mathbf{P}$ mérték és valamely $\mathcal{F}$ filtráció mellett. Ha a fenti módon áttérünk egy $\mathbf{Q}$ ekvivalens mértékre, akkor a

$$\widehat{w} = w - [L, w] = w - \frac{1}{\Lambda} \bullet [\Lambda, w]$$

lokális martingál a $\mathbf{Q}$ alatt. A w folytonossága miatt az $[L, M]$ folytonos és nyilván korlátos változású. Ebből, felhasználva, hogy a kvadratikus variáció lokálisan ekvivalens mértékek esetén nem változik

$$[\widehat{w}](t) \overset{\circ}{=} [w - [L, w]](t) = [w](t) = t.$$

A Lévy-féle karakterizációs tétel alapján az $\widehat{w}$ Wiener-folyamat a $\mathbf{Q}$ mérték mellett az $\mathcal{F}$ filtrációra nézve.

A Wiener-folyamat esete

Evvel beláttuk a következő állítást:

Theorem

Legyen $\mathcal{F}$ tetszőleges filtráció és w legyen Wiener-folyamat az $\mathcal{F}$ filtrációra nézve. Ha valamely L lokális martingálra az $\Lambda \overset{\circ}{=} \mathcal{E}(L)$ egy egyenletesen integrálható martingál, akkor a

$$\widehat{w} = w - [L, w]$$

folyamat Wiener-folyamat a

$$\mathbf{Q}(A) \overset{\circ}{=} \int_A \Lambda(\infty)\, d\mathbf{P}$$

valószínűségi mérték mellett. Hasonló állítás igaz véges időhorizontra is.

A Wiener-folyamat esete

Theorem

Legyen $\mathcal{F}$ tetszőleges filtráció és w legyen Wiener-folyamat az $\mathcal{F}$ filtrációra nézve. Tegyük fel, hogy $X \in \mathcal{L}^2_{loc}(w, [0, T])$. Tegyük fel továbbá, hogy a

$$\begin{aligned} \Lambda(t) &\circeq \exp\left(\int_0^t X(s)\,dw(s) - \frac{1}{2}\int_0^t X^2(s)\,ds\right) \circeq \\ &\circeq \exp\left(X \bullet w - \frac{1}{2}X^2 \bullet [w]\right)(t) \circeq \mathcal{E}(X \bullet w)(t) \end{aligned}$$

folyamat martingál a $[0, T]$ zárt szakaszon. Definiáljunk a $\mathbf{Q}$ mértéket a $d\mathbf{Q}/d\mathbf{P} \circeq \Lambda(T)$ szabállyal. Ekkor a

$$\widehat{w}(t) \circeq w(t) - \int_0^t X(s)\,ds$$

az $\mathcal{F}$ filtrációra nézve Wiener-folyamat a $\mathbf{Q}$ mérték mellett.

A Wiener-folyamat esete

A tétel interpretációja kapcsán érdemes hangsúlyozni, hogy amennyiben az $\mathcal{F}$ a w által generált filtráció, akkor a kívánt $L = X \bullet w$ előállítás mindig létezik, vagyis a lehetséges mértékcserék azonosíthatóak az $\mathcal{L}^2_{\text{loc}}(w)$ egy alkalmas részhalmazával. A gond természetesen ismét az, hogy nem minden $X \in \mathcal{L}^2_{\text{loc}}(w)$ esetén lesz a Λ martingál a $[0, T)$-én, vagy a $[0, T]$ zárt szakaszon. A Λ ugyanis általában csak lokális martingál.

Horror példa a nullmértékű halmazokról

A lokálisan ekvivalens mértékcsere és így a sztochasztikus analízis alapjaira, illetve a nullmértékű halmazok drámai szerepére rávilágító egyik legnevezetesebb példa a következő:

Example

Lokálisan ekvivalens mértékcsere és a Wiener-folyamatok.

Legyen w egy Wiener-folyamat és tekintsük a $\widehat{w}(t) \overset{\circ}{=} w(t) - \mu t$ folyamatot, ahol $\mu \neq 0$. Ilyenkor a

$$\Lambda(t) = \exp\left(\mu w(t) - \frac{1}{2}\mu^2 t\right)$$

egy pozitív martingál. De nem egyenletesen integrálható, vagyis a $T = \infty$ időpontra nem terjeszthető ki martingálként, ugyanis $\Lambda(\infty) = 0$!

Horror példa a nullmértékű halmazokról

Mivel egy alkalmas Wiener-folyamat megkonstruálható az

$$(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P}) \mathrel{\hat{=}} ([0,1], \mathcal{B}, \lambda)$$

téren ezért feltehető, hogy a Λ-hoz tartozik egy $\mathbf{Q}$ valószínűségi mérték, amely lokálisan ekvivalens a $\mathbf{P}$-vel és amely alatt a $\widehat{w}$ Wiener-folyamat. A $\mathbf{Q}$ mérték az egyes $\mathbf{Q}(t)$ mértékek közös kiterjesztéseként írható fel. Ezt azért tehetjük meg, mert a $\mathbf{Q}$ az $\cup \mathcal{F}_t$ algebrán belülről kompakt reguláris és az $[0,1]$ egy teljes szeparábilis metrikus tér és ilyenkor az additív mértékek automatikusan regulárisak.

Horror példa a nullmértékű halmazokról

Ugyanakkor a $\mathbf{P}$ és $\mathbf{Q}$ egymásra szingulárisak: A nagy számok törvénye miatt majdnem mindenhol a $\mathbf{P}$ alatt

$$\lim_{t\to\infty} \frac{\widehat{w}(t)}{t} = \mu,$$

illetve majdnem mindenhol a $\mathbf{Q}$ alatt

$$\lim_{t\to\infty} \frac{\widehat{w}(t)}{t} = 0.$$

Ebből következően van olyan A halmaz, amelyre $\mathbf{P}(A) = 0$ és $\mathbf{Q}(A) = 1$, és fordítva.