Az integrálreprezentációs tétel

Miért pont a Wiener-folyamat

Medvegyev Péter

2009

Az alapprobléma

Az integrálreprezentációs tételek a piac teljességének indoklása során játszanak alapvető szerepet. Két tételt tárgyalunk: Először a Dudley-féle, majd az Itô-féle reprezentációs tételt mutatjuk be. Mind a két tétel arról szól, hogy egy ξ valószínűségi változó milyen körülmények között írható fel, reprezentálható $\xi = \lambda + \int_0^T X dw$ módon. Milyen probléma származik abból, hogy a sztochasztikus integrálok csak lokális martingálok és nem valódi martingálok? Természetesen, ha

$$H_T = \lambda + \int_0^T \theta dS$$

és a sztochasztikus integrál valódi martingál, akkor λ éppen a H_T várható értéke, ugyanis a sztochasztikus integrál várható értéke, ha valódi martingál, nulla. Általában azonban a sztochasztikus integrál nem valódi martingál.

Az összenyomott Wiener-folyamat

Example

Folytonos időhorizonton a sztochasztikus integrál, amely alulról nem korlátos nem használható az árazási képletben ugyanis „arbitrázst" tartalmaz.

Legyen w egy Wiener-folyamat és

$$I(t) \stackrel{\circ}{=} \int_0^t \frac{1}{T-s} dw(s).$$

Emlékeztetünk, hogy valamely M folytonos lokális martingál szerinti sztochasztikus integrál definiálhatóságához az szükséges, hogy az X integrandusra teljesüljön a

$$\mathbf{P}([X \bullet M] < \infty) = \mathbf{P}\left(X^2 \bullet [M] < \infty\right) = 1$$

feltétel. Ilyenkor az $X \bullet M$ egy lokális martingál.

Az összenyomott Wiener-folyamat kvadratikus variációja

A jelen példában a $[0, T)$ szakaszon

$$[I](t) = \int_0^t \frac{1}{(T-u)^2} du = \frac{1}{T-t} - \frac{1}{T} < \infty,$$

vagyis a feltétel teljesül. Ebből következően a $[0, T)$ szakaszon az I sztochasztikus integrál értelmes és egy lokális martingált definiál. Természetesen a $[0, T]$ szakaszon az integrál nem létezik.

Lévy-féle karakterizációs tétel

Az $[I]$ triviálisan egy szigorúan monoton növő, folytonos és determinisztikus függény. Az inverzét jelölje

$$f(x) \circeq \frac{xT^2}{1+Tx}$$

Az f szintén egy szigorúan monoton növő folytonos függvény és az f a $[0,\infty)$ félegyenest képezi a $[0,T)$ szakaszra. Az $I(f(s))$ kifejezés folytonos lokális martingál a $[0,\infty)$ félegyenesen, amely kvadratikus variációja $[I(f(s))] = [I](f(s)) = s$. A Lévy-féle karakterizációs tétel miatt az $s \mapsto I((f(s)))$ egy Wiener-folyamat. A karakterizációs tételre nincsen igazán szükség, ugyanis az integrandus determinisztikus, így közvetlen számolásssal könnyen látható, hogy az integrál eloszlása normális és az integrálfolyamat független növekményű. Tetszőleges t-re az $I(t)$ eloszlása $N\left(0, \sqrt{[I](t)}\right)$. Ebből már az állítás egyszerűen igazolható.

Hogyan nyomjuk össze a Wiener-folyamatot

Mivel a $\widehat{w}(s) \stackrel{\circ}{=} I(f(s))$ egy Wiener folyamat, ezért

$$I(s) = \widehat{w}\left(f^{-1}(s)\right) = \widehat{w}\left(\frac{1}{T-s} - \frac{1}{T}\right).$$

A szintátlépéseket megadó megállási idő

A Wiener-folyamatokra a limesz szuperior és a limesz inferior végtelenbe tart, így

$$\begin{aligned} \limsup_{s\to\infty} \widehat{w}(s) &= \limsup_{s\to\infty} I((f(s))) = \limsup_{t\to T} I(t) = \infty \\ \liminf_{s\to\infty} \widehat{w}(s) &= \liminf_{s\to\infty} I((f(s))) = \liminf_{t\to T} I(t) = -\infty \end{aligned}$$

Ebből következően a

$$\tau_a \stackrel{\circ}{=} \inf\{t \le T : I(t) = a\}$$

kifejezés majdnem minden kimenetelre véges és majdnem mindenhol $\tau_a < T$.

Sztochasztikus integrálás és arbitrázs

Tekintsük az

$$X(t) \circeq \frac{1}{T-t}\chi(t \le \tau_a)$$

balról folytonos stratégiát. Tegyük fel, hogy az árak alakulását a $[0, T]$ szakaszon egy w Wiener-folyamat írja le. Az X stratégiából származó nyereség a sztochasztikus integrálokra vonatkozó asszociativitási, illetve megállási szabály miatt

$$\begin{aligned}
(X \bullet w)(s) &\circeq \int_0^s \frac{1}{T-t}\chi(t \le \tau_a)\, dw(t) = \left(\frac{1}{T-t}\chi(t \le \tau_a) \bullet w\right) \\
&= \left(\chi(t \le \tau_a) \bullet \left(\frac{1}{T-t} \bullet w\right)\right)(s) = \\
&= (\chi(t \le \tau_a) \bullet I)(s) = I^{\tau_a}(s) = I(\tau_a \wedge s).
\end{aligned}$$

Sztochasztikus integrálás és arbitrázs

Ebből következően

$$\lim_{s \to T} (X \bullet w)(s) = (X \bullet w)(T) = a,$$

vagyis ha az árakat egy w Wiener-folyamat írja le, akkor egy tetszőleges $[0, T]$ szakaszon tetszőleges nyereség realizálható. Vagyis folytonos időhorizonton, még a lehető legegyszerűbb esetben is mindenképpen van „arbitrázs”. Az idézőjelet az indokolja, hogy az arbitrázst csak megengedett stratégiák halmazának rögzítése esetén értelmezhetjük és a gondolatmenet lényege, hogy az X stratégia nem „megengedett".

Alulról korlátos integrálok

Definition

Megengedett stratégián olyan θ stratégiákat értünk, amelyekre $\theta \bullet S$ alulról egyenletesen korlátos egy alkalmas a konstanssal.

A jelenség kizárása céljából mindig feltesszük, hogy a nyereségfolyamat alulról korlátos egy rögzített számmal. Ilyenkor természetesen nem lehetséges az arbitrázs, ugyanis az alulról való korlátosság miatt valamely L lokális martingál szerinti sztochasztikus integrál szupermartingál, vagyis veszíti a várható értékét. Ha tehát $(X \bullet L)(T) = H_T \geq 0$, akkor

$$0 = \mathbf{E}((X \bullet L)(0)) \geq \mathbf{E}((X \bullet L)(T)) = \mathbf{E}(H_T) \geq 0.$$

következésképpen $\mathbf{E}(H_T) = 0$, vagyis $H_T \overset{m.m.}{=} 0$.

Alulról korlátos integrálok

A folytonos időhorizont kézenfekvő módon végtelen számú időpontból áll és ezért tetszőleges véges szakaszon lehet „duplázni”. Az előző példa éppen azt mutatja be, hogy miként. Valójában tetszőleges a esetén, ha τ_a az első időpont, amikor egy w Wiener-folyamat eléri az a időpontot, akkor $\tau_a < \infty$ és $w(\tau_a) = a$, vagyis végtelen időhorizonton egy egyszerű megállítási stratégiával triviálisan lehet arbitrálni. A példa csak azt mutatja meg, hogy ha megengedjük a sztochasztikus integrált mint „kereskedési stratégiát”, akkor már korlátos időhorizonton is el lehet elérni az a értéket. Valójában a megállási opciókról szóló tételben a megállási idők korlátossága azt biztosítja, hogy ne lehessen a végtelen számosságú időhorizontot kihasználva „duplázni”. A megendedett stratégiák alulról való korlátosságának megkövetelése hasonló célt szolgál: Korlátot kívánunk szabni a „kockázat” növekedésének.

Összenyomott Wiener-folyamat

Definition

Az előző példában a

$$\widehat{w}(s) \overset{\circ}{=} I((f(s)))$$

egy Wiener-folyamat. Ez indokolja, hogy az

$$I(s) = \widehat{w}\left(f^{-1}(s)\right) = \widehat{w}\left(\frac{1}{T-s} - \frac{1}{T}\right)$$

folyamatot a $[0, T)$ szakaszra „összenyomott” Wiener-folyamatnak hívjuk.

A konstans nem egyértelmű

Example

Követelések replikálásában a konstans még véges időhorizonton sem egyértelmű.

Tekintsük az előző példában szereplő I „összenyomott" Wiener-folyamatot és τ_{-a} jelölje az I folyamat $-a$ értékhez tartozó találati idejét. Ha

$$X_a(t) \circeq \frac{1}{T-t}\chi(t \leq \tau_{-a}),$$

és $a \geq 0$, akkor $V_a \circeq a + X_a \bullet w = a + I^{\tau_{-a}} \geq 0$, így az X_a megengedett, ugyanakkor minden a-ra $V_a(T) = a + I(\tau_{-a}) = 0$. Ennek megfelelően a $H_T \circeq 0$ értéket replikáló konstans nem egyértelmű ugyanis az értéke tetszőleges $a \geq 0$ szám lehet.

A konstans nem egyértelmű

Vegyük észre, hogy szemben a véges időhorizont esetével ez nem mond ellent a nincsen arbitrázs feltételnek, ugyanis az $X \triangleq X_{a_1} - X_{a_2}$ portfolió nem lesz feltétlenül megengedett, ugyanis a hozzá tartozó értékfolyamat nem lesz alulról korlátos, hiszen a $-X_{a_2} \bullet w$ alulról nem korlátos, ugyanis az $X_{a_2} \bullet w$ csak alulról, de nem felülről korlátos. A probléma a megengedett portfolió fogalmának bevezetésében gyökerezik. Egy másik szokásos megoldás, hogy a megengedett portfoliók halmazát az $\mathcal{L}^2(M)$ térre korlátozzuk, de ez túl „átlátszó” megszorítás.
A lényeges gondolat az, hogy mivel a végtelen számosságú időhorizont miatt az arbitrázs lehetőségét kizárandó a lehetséges stratégiák nem egy lineáris alteret, hanem egy kúpot alkotnak, ezért a replikáló konstans egyértelműsége, szemben a diszkrét és véges időhorizonttal, már nem következik a modell közgazdasági feltételeiből. Mivel a sztochasztikus integrál nem feltétlenül valódi martingál, ezért a matematikai modell sem garantálja a replikáló portfolióban az induló konstans egyértelműségét.

Alulról korlátos integrálok

Ha valamely H_T integrálható változóra

$$H_T = a + (X \bullet L)(T),$$

ahol az L egy folytonos lokális martingál és az X megendedett, akkor

$$\mathbf{E}(H_T) = a + \mathbf{E}((X \bullet L)(T)) \leq a + \mathbf{E}((X \bullet L)(0)) = a$$

ugyanis az $X \bullet L$ alulról korlátos lokális martingál, így szupermartingál, tehát veszíti a várható értéket. Vagyis a reprezentáló konstans nem lehet kisebb mint a várható érték, de semmi sem garantálja, hogy a reprezentáló konstans éppen a várható érték.

Egy példa a Dudley-tételhez

Example

Integrálreprezentáció többdimenziós Wiener-folyamat esetén.

Az alább tárgyalt Itô-féle reprezentációs tételben az előállítandó változónak a w Wiener-folyamat által generált filtrációra nézve mérhetőnek kell lenni. A Dudley-féle tételben azonban csak a filtráció folytonosságára van szükség. Ez teljesül például akkor, ha a filtrációt egy többdimenziós Wiener-folyamat definiálja, miközben a reprezentálást csak az egyik koordináta segítségével akarjuk elvégezni. A Dudley-féle tétel szerint az előállítás ilyenkor is megvalósítható. Vagyis ha az X stratégia nem mérhető az integrátor által generált filtrációra nézve, akkor esetlegesen az integrátor által generált filtrációra nem mérhető változó is előállítható sztochasztikus integrálként.

Egy példa a Dudley-tételhez

Erre tekinthetjük a következő példát: Legyen (w_1, w_2) egy két-dimenziós Wiener-folyamat. Legyen

$$E(t) \circeq \exp\left(w_2(t) - \frac{t}{2}\right).$$

Legyen továbbá $a > 1$ és

$$\tau_a \circeq \inf\{t < T : a + I(t) = E(t)\},$$

ahol ismét

$$I(t) \circeq \int_0^t \frac{1}{T-s} dw_1(s), \quad t < T$$

a w_1 Wiener-folyamat már látott „összenyomása".

A megengedett stratégia konstruálása

Miként korábban láttuk az I „összenyomott” Wiener-folyamat a $[0, T)$ szakaszon a $-\infty$ és ∞ között ingadozik, az E trajektóriái, mivel folytonosak, külön-külön korlátosak a $[0, T]$ kompakt szakaszon, ezért $\tau_a < T$. Világos, hogy a τ_a megállási idő a (w_1, w_2) által generált filtrációra nézve. Legyen a $[0, T]$ szakaszon

$$X(s) \circeq \frac{1}{T-s}\chi(s \leq \tau_a).$$

Felhasználva, hogy $E \geq 0$ és $E(0) = 1 < a = a + I(0)$ azonnal látható, hogy a $[0, \tau_a)$ szakaszon az $a + I$ az E felett van, így ezen a szakaszon

$$a + I(t) \circeq a + \int_0^t \frac{1}{T-s} dw_1(s) \geq E(t) \geq 0.$$

Vagyis $X \bullet w_1 \geq -a$, így az X egy megengedett befektetési stratégia a w_1-re nézve.

A kifizetés megadása

Ha $H_T \circeq E(\tau_a)$, akkor

$$\begin{aligned} H_T &\circeq E(\tau_a) = a + I(\tau_a) = a + \int_0^{\tau_a} \frac{1}{T-s} dw_1(s) = \\ &= a + \int_0^T X dw_1(s) = a + (X \bullet w_1)(T), \end{aligned}$$

vagyis a w_1 egy a (w_1, w_2) által generált filtrációra nézve mérhető változót is elő tudott állítani. (Persze az X csak a (w_1, w_2)-re nézve adaptált.)

A replikáló konstans nem a várható érték

A megállási opciókról szóló tétel miatt, felhasználva, hogy az E martingál és $\tau_a \leq T$

$$\mathbf{E}\left(H_T\right) \overset{\circ}{=} \mathbf{E}\left(E\left(\tau_a\right)\right) = \mathbf{E}\left(E\left(0\right)\right) = 1,$$

így a replikáló stratégiában a replikáló konstans értéke $a > 1$ nem a várható érték..

Egy másik reprezentálás

Ugyanakkor az Itô-formulával való elemi számolással

$$E(t) = 1 + \int_0^t E(s)\, dw_2(s).$$

Az $E(t)$ triviálisan nem negatív. Következésképpen $E \bullet w_2 \geq -1$.

$$H_T \mathrel{\hat{=}} E(\tau_a) = 1 + \int_0^{\tau_a} E(s)\, dw_2(s) = 1 + \int_0^T \chi(s \leq \tau_a) E(s)\, dw_2(s)$$

így van olyan replikáló, alulról korlátos portfolió is, ahol a konstans éppen a H_T tranzakció várható értéke. Vegyük észre, hogy ebben az ellőállításban sem mérhető a H_T az integrálban szereplő Wiener-folyamat által generált filtrációra nézve. Ebben az előállításban szereplő integrál azonban martingál a (w_1, w_2) által generált filtrációra nézve.

A Wiener-folyamat filtrációja

Emlékeztetünk, hogy ha w egy Wiener-folyamat, akkor az $\mathcal{F}_t^0 \overset{\circ}{=} \sigma\left(w\left(s\right) : s \leq t\right)$ egy filtrációt definiál. Ellenpéldával megmutatható, hogy az $\mathcal{F}^0$ nem jobbról folytonos. Megmutatható, hogy ha az $\mathcal{F}^0$ helyett az $\mathcal{F}_t \overset{\circ}{=} \sigma\left(\mathcal{F}_t^0 \cup \mathcal{N}\right)$ kibővített filtrációt tekintjük, akkor az $\mathcal{F}$ jobbról folytonos lesz, vagyis ilyenkor $\mathcal{F}_t = \mathcal{F}_{t+} \overset{\circ}{=} \cap_{s>t}\mathcal{F}_s$. Mivel a w folytonos, ezért minden t-re $w\left(t\right) = \lim_{s \nearrow t} w\left(s\right)$. Ezért a $w\left(t\right)$ mérhető az $\mathcal{F}_{t-}^0 \overset{\circ}{=} \sigma\left(w\left(s\right) : s < t\right)$ σ-algebrára. Ebből következően $\mathcal{F}_t^0 = \mathcal{F}_{t-}^0 \overset{\circ}{=} \sigma\left(\mathcal{F}_s^0 : s < t\right)$. Ez nyilván teljesül az $\mathcal{F}$ kibővített filtrációra is. Ezt úgy szokás mondani, hogy az $\mathcal{F}$ balról is folytonos, és mivel jobbról is folytonos, ezért az $\mathcal{F}$ filtrációt folytonosnak mondjuk.

Dudley-tétele

Az utolsó három példában tárgyalt jelenségek hátterében a következő állítás áll:

Theorem (Dudley)

Legyen w egy Wiener-folyamat és $\mathcal{F}$ legyen a w által generált kibővített filtráció. Tetszőleges ξ $\mathcal{F}_T$-mérhető változó esetén létezik $X \in \mathcal{L}^2_{loc}(w)$ folyamat, amelyre

$$\xi = \int_0^T X dw.$$

Az állítás akkor is érvényes, ha az $\mathcal{F}$ folytonos és a w Wiener-folyamat az $\mathcal{F}$-re nézve.

Dudley-tétele

A bizonyításban használt legfőbb eszköz a következő, korábban már felhasznált észrevétel: Tetszőleges $0 \leq a < b$ esetén az

$$I_{a,b}(t) \circeq \int_a^t \frac{1}{b-s} dw(s)$$

sztochasztikus integrál értelmes, folytonos az $[a, b)$ szakaszon és ha $t \nearrow b$, akkor az $I(t, \omega)$ trajektóriái majdnem minden kimenetelre a $-\infty$ és a $+\infty$ között ingadoznak. Az I folyamat tekinthető úgy mintha egy Wiener-folyamatot „összenyomtunk" volna az a és a b időpontok közé.

Közelítő sorozat meghatározása

Első lépésben belátjuk, hogy tetszőleges $t_n \nearrow T$ sorozat esetén van olyan (ξ_n) sorozat, hogy minden n-re ξ_n mérhető az $\mathcal{F}_{t_n}$ σ-algebra szerint és majdnem mindenhol $\xi_n \to \xi$. Ennek igazolása a következő: Ha $\eta \stackrel{\circ}{=} \arctan \xi$, akkor az η korlátos, így a Lévy-féle martingál konvergencia tétel miatt majdnem mindenhol

$$\eta_n \stackrel{\circ}{=} \mathbf{E}\left(\eta \mid \mathcal{F}_{t_n}\right) \to \mathbf{E}\left(\eta \mid \sigma\left(\mathcal{F}_{t_n}\right)\right) = \mathbf{E}\left(\eta \mid \mathcal{F}_{T-}\right).$$

Ugyanakkor az $\mathcal{F}$ a feltétel szerint balról folytonos, vagyis $\mathcal{F}_{T-} = \mathcal{F}_T$, így $\mathbf{E}\left(\eta \mid \mathcal{F}_{T-}\right) = \mathbf{E}\left(\eta \mid \mathcal{F}_T\right) = \eta$. Az (η_n) segítségével a (ξ_n) sorozat már könnyen definiálható:

$$\xi_n \stackrel{\circ}{=} \tan\left(\eta_n\right) \to \tan\left(\eta\right) = \xi.$$

A közelítő sorozat konvergenciájának sebessége

A majdnem mindenhol való konvergenciából következik a sztochasztikus konvergencia. Ebből következően megadható olyan $\left(\xi_{n_k}\right)$ részsorozat, amelyre

$$\mathbf{P}\left(\left|\xi_{n_k} - \xi\right| > \frac{1}{k^3}\right) < \frac{1}{k^2}.$$

Az egyszerűbb jelölés kedvért az eredeti sorozat helyett vegyük ezt a részsorozatot.

A közelítő sorozat konvergenciájának sebessége

$$
\begin{gathered}
\mathbf{P}\left((n+1)\left|\xi_{n+1}-\xi_n\right|>\frac{4}{n^2}\right)= \\
=\mathbf{P}\left(\left|\xi_{n+1}-\xi_n\right|>\frac{4}{n^2(n+1)}\right)\leq \\
\leq\mathbf{P}\left(\left|\xi_{n+1}-\xi\right|>\frac{1}{n^2(n+1)}\right)+\mathbf{P}\left(\left|\xi_n-\xi\right|>\frac{3}{n^2(n+1)}\right)\leq \\
\leq\mathbf{P}\left(\left|\xi_{n+1}-\xi\right|>\frac{1}{(n+1)^3}\right)+\mathbf{P}\left(\left|\xi_n-\xi\right|>\frac{1}{n^3}\right)\leq \\
\leq\frac{1}{(n+1)^2}+\frac{1}{n^2}\leq\frac{2}{n^2}
\end{gathered}
$$

Az integrandus meghatározása

Tekintsük a

$$I_n(t) \circeq \int_{t_n}^{t} \frac{1}{t_{n+1}-s} dw(s)$$

integrálokat. Az I_n egy a $[t_n, t_{n+1})$ intervallumba „beszorított" Wiener-folyamat. Miként megjegyeztük ha $t \nearrow t_{n+1}$, akkor az I_n integrálfolyamat a $\pm\infty$ között ingadozik és mivel az I_n folyamat folytonos, ezért

$$\begin{aligned} \tau_n &\circeq \inf\{s \geq t_n : I_n(s) = \xi_n - \xi_{n-1}\} = \\ &= \inf\{s \geq t_n : I_n(s) - (\xi_n - \xi_{n-1}) = 0\} < t_{n+1}. \end{aligned}$$

Mivel a $\xi_n - \xi_{n-1}$ változó $\mathcal{F}_{t_n}$-mérhető könnyen belátható, hogy az

$$I_n(s) - \xi_n - \xi_{n-1}, \quad t_{n+1} > s \geq t_n$$

folyamat adaptált és folytonos a $[t_n, t_{n+1})$ szakaszon, így a τ_n találati idő megállási idő.

Az integrandus meghatározása

A $0 \le s \le t_1$ halmazon az X legyen nulla és indukcióval a $(t_n, t_{n+1}]$ szakaszokon legyen

$$X(s,\omega) \;\circeq\; \begin{cases} 1/\left(t_{n+1}-s\right) & \text{ha} \quad t_n < s \le \tau_n \\ 0 & \text{ha} \quad \tau_n < s \le t_{n+1} \end{cases} = \\ = \frac{1}{t_{n+1}-s}\chi\left(s \le \tau_n\right).$$

Tetszőleges n-re a $\tau_n < t_{n+1}$ miatt

$$\begin{aligned} \int_{t_n}^{t_{n+1}} X^2 d[w] &= \int_{t_n}^{t_{n+1}} \frac{1}{\left(t_{n+1}-s\right)^2}\chi\left(s \le \tau_n\right) ds = \\ &= \int_{t_n}^{\tau_n} \frac{1}{\left(t_{n+1}-s\right)^2} ds = \left[\frac{1}{t_{n+1}-s}\right]_{t_n}^{\tau_n} = \\ &= \frac{1}{t_{n+1}-\tau_n} - \frac{1}{t_{n+1}-t_n} < \infty. \end{aligned}$$

Az integrál értéke kompakt részintervallumokon

Így minden n-re $X \in \mathcal{L}^2_{\text{loc}}$ a $[t_n, t_{n+1}]$ szakaszon, következésképpen a sztochasztikus integrál additivitása miatt $X \in \mathcal{L}^2_{\text{loc}}$ a $[0, t_{n+1}]$ szakaszon is. Ebből következően az

$$\int_0^{t_{n+1}} X dw$$

integrál értelmes. Ugyanakkor

$$\begin{aligned}
\int_0^{t_{n+1}} X dw &= \sum_{k \le n} \int_{t_k}^{t_{k+1}} X dw = \sum_{k \le n} \int_{t_k}^{t_{k+1}} \frac{1}{t_{k+1} - s} \chi\left(s \le \tau_k\right) dw = \\
&= \sum_{k \le n} \int_{t_k}^{\tau_k} \frac{1}{t_{k+1} - s} dw = \sum_{k \le n} I_k\left(\tau_k\right) = \\
&= \sum_{k \le n} \left(\xi_k - \xi_{k-1}\right) = \xi_n,
\end{aligned}$$

ahol értelemszerűen feltettük, hogy $\xi_0 \overset{\circ}{=} 0$.

A majorált konvergencia tétel használata

Ha az X a teljes $[0, T]$ szakaszon is integrálható, akkor a majorált konvergencia tétel miatt, felhasználva, hogy az egy pontból álló halmazok az integrátor folytonossága miatt elhagyhatóak, vagyis hogy a $[0, T]$ és a $(0, T)$ halmazon való integrálok egybeesnek

$$\int_0^T Xdw = \int_0^T \lim_{n\to\infty} \chi\left(\left(0, t_{n+1}\right]\right) Xdw = \lim_{n\to\infty} \int_0^{t_{n+1}} Xdw = \lim_{n\to\infty} \xi_n = \xi,$$

ami éppen a bizonyítani kívánt reprezentáció.

Az integrálhatósági kritérium felírása

Az X integrálhatóságához meg kell mutatni, hogy $X \in \mathcal{L}^2_{\mathrm{loc}}(w)$, vagyis hogy majdnem minden kimenetelre

$$\int_0^T X^2(s)\,ds < \infty.$$

Legyen

$$\begin{aligned}\gamma_n &\stackrel{\circ}{=} [I_n](t_{n+1}) = \int_{t_n}^{\tau_n} \frac{1}{(t_{n+1}-s)^2} ds = \\ &= \frac{1}{t_{n+1}-\tau_n} - \frac{1}{t_{n+1}-t_n} \stackrel{\circ}{=} f_n^{-1}(\tau_n).\end{aligned}$$

Evidens módon $\int_0^T X^2(s)\,ds = \sum_{n=0}^{\infty} \gamma_n$. Meg kell mutatni, hogy $\sum_{n=0}^{\infty} \gamma_n < \infty$ majdnem mindenhol.

A változók interpretációja

Az f_n^{-1} függvény éppen a $[t_n, t_{n+1})$ intervallumot képezi a $[0, \infty)$ félegyenesre. Ha $\widehat{w}_n(s) \circeq I_n(f_n(s))$ a megfelelő „széthúzott" Wiener-folyamat, akkor

$$\widehat{w}_n(\gamma_n) = \widehat{w}_n\left(f_n^{-1}(\tau_n)\right) = I_n(\tau_n) = \xi_n - \xi_{n-1}$$

és mivel az f és az f^{-1} szigorúan monoton nő, valójában γ_n az első olyan időpont, ahol a $\widehat{w}_n$ Wiener-folyamat eltalálja a $\xi_n - \xi_{n-1}$ változót. Vegyük észre, hogy a $\xi_n - \xi_{n-1}$ az $\mathcal{F}_{t_n}$ σ-algebrára nézve mérhető, a $\widehat{w}_n$ pedig a t_n időpontból indított I_n áttranszformálása. Következésképpen az I_n, így a $\widehat{w}_n$ is független a $\xi_n - \xi_{n-1}$ változóktól.

A teljes valószínűség tétele

Vizsgáljuk meg a γ_n eloszlását. Az egyszerűség kedvéért az n indexet elhagyva tetszőleges B Borel-mérhető halmazra, ha F jelöli a $\xi \circeq \xi_n - \xi_{n-1}$ eloszlását, akkor

$$\mathbf{P}(\gamma \in B) \circeq \int_{\mathbb{R}} \mathbf{P}(\gamma \in B \mid \xi = x)\, dF(x).$$

Vegyük észre, hogy ez az egyenlőség egy triviális azonosság. Bármely valószínűség felírható tetszőleges másik változóra vonatkozó feltételes valószínűségek integráljaként. Az azonosság felírásához pusztán a feltételes valószínűség definíciója szükséges és az, hogy a feltételes valószínűség mindig létezik, vagy ami ugyanaz, hogy a feltételes várható érték integrálható változó esetén mindig létezik. Kérdés csak az, hogy hogyan lehet kiszámolni a feltételes valószínűséget?

A feltételes valószínűség kiszámolása

Az egyetlen széles körben használható feltétel a következő:

Lemma

Ha a ξ és az η független, véges vagy végtelen dimenziós vektorváltozók és $Z(x, y)$ egy két-változós, szorzat-mérhető függvény, akkor

$$\mathbf{E}(Z(\xi, \eta) \mid \eta = y) = \mathbf{E}(Z(\xi, y))$$

vagyis függetlenség esetén a feltétel „behelyettesíthető és elhagyható". A ξ és az η képtere tetszőleges mérhető tér lehet, amelyre nézve a ξ és az η valószínűségi változó és a Z szorzatmérhető..

A feltételes valószínűség kiszámolása

Ha $f = \chi_A \chi_B$ alakú mérhető tégla, akkor

$$\begin{aligned} \mathbf{E}\left(Z\left(\xi,\eta\right) \mid \eta\right) &= \mathbf{E}\left(\chi_A\left(\xi\right)\chi_B\left(\eta\right) \mid \eta\right) = \chi_B\left(\eta\right)\mathbf{E}\left(\chi_A\left(\xi\right) \mid \eta\right) = \\ &= \chi_B\left(\eta\right)\mathbf{E}\left(\chi_A\left(\xi\right)\right), \end{aligned}$$

így a regressziós függvény definíciója miatt

$$\begin{aligned} \mathbf{E}(Z(\xi,\eta) \quad &| \quad \eta = y) = \chi_B(y)\mathbf{E}(\chi_A(\xi)) = \mathbf{E}(\chi_B(y)\chi_A(\xi)) = \\ &= \mathbf{E}(Z(\xi,y)). \end{aligned}$$

Az általános eset a lépcsős függvényekkel való közelítéssel kapható.

A feltételes valószínűség kiszámolása

Jelölje $C\left[0,\infty\right)$ a nullából induló folytonos függvények terét. A konkrét helyzetben az egyik változó az Ω-ból a $C\left[0,\infty\right)$ térbe képező vektor értékű változó, a másik pedig az $\mathbb{R}$ félegyenes. A $C\left[0,\infty\right)$ teret a pontfunkcionálok által generált σ-algebrával látjuk el. A $Z\left(x,y\right)$ függvény értéke legyen az az első időpont, amikor az x függvény eléri az y értéket. Ha $y>0$

$$\begin{aligned}\left\{\left(x,y\right):Z\left(x,y\right)>\lambda\right\} &= \left\{\left(x,y\right):x\left(t\right)<y,\forall t\leq\lambda\right\}= \\ &= \left\{\left(x,y\right):x\left(r\right)<y,\forall r\leq\lambda,r\in\mathbb{Q}\right\}.\end{aligned}$$

Az $\left\{\left(x,y\right):x\left(t\right)<y\right\}$ halmaz karakterisztikus függvénye, a pontfunkcionálok által definiált mérhetőség definíciója miatt az x szerint mérhető az y szerint balról folytonos, így szorzat mérhető. Hasonlóan járhatunk el, ha $y<0$. Ha $y=0$, akkor a halmaz üres minden $\lambda\geq0$ esetén.

A feltételes valószínűség kiszámolása

Az idézet tétel miatt ha

$$\gamma^{(x)} \mathrel{\mathring{=}} \inf\left\{s \geq 0 : w(s) = x\right\},$$

akkor

$$\begin{aligned}\mathbf{P}(\gamma \in B) &\mathrel{\mathring{=}} \int_{\mathbb{R}} \mathbf{P}(\gamma \in B \mid \xi = x)\, dF(x) = \\ &= \int_{\mathbb{R}} \mathbf{P}\left(\gamma^{(x)} \in B\right) dF(x).\end{aligned}$$

A találati idő sűrűségfüggvénye

Mivel $\gamma^{(x)}$ az x pont találati ideje, akkor a $\gamma^{(x)}$ sűrűségfüggvény éppen

$$h(u) = |x| \frac{1}{\sqrt{u^3 2\pi}} \exp\left(-\frac{x^2}{2u}\right), \quad u \geq 0.$$

A sűrűségfüggvény képletéből

$$h(u) \leq \frac{|x|}{u^{3/2}}$$

vagyis

$$\mathbf{P}\left(\gamma^{(x)} \geq u\right) \leq |x| \int_u^\infty \frac{1}{y^{3/2}} dy = \frac{-|x|}{2} \left[\frac{1}{\sqrt{y}}\right]_u^\infty = \frac{1}{2} \frac{|x|}{\sqrt{u}}.$$

A találati idő becslése

$$\mathbf{P}\left(\gamma_n \geq \frac{1}{n^2}\right) = \int_{\mathbb{R}} \mathbf{P}\left(\gamma_n^{(x)} \geq \frac{1}{n^2}\right) dF(x) =$$

$$= \int_{\mathbb{R}} \min\left(\mathbf{P}\left(\gamma_n^{(x)} \geq \frac{1}{n^2}\right), 1\right) dF(x) \leq$$

$$\leq \int_{\mathbb{R}} \min\left(\frac{|x|}{\sqrt{1/n^2}}, 1\right) dF(x) = \int_{\mathbb{R}} \min(n|x|, 1)\, dF(x) =$$

$$= \mathbf{E}\left(\min\left(n\left|\xi_n - \xi_{n-1}\right|, 1\right)\right) \leq$$

$$\leq \mathbf{P}\left(n\left|\xi_n - \xi_{n-1}\right| > \frac{4}{(n-1)^2}\right) + 1 \cdot \frac{4}{(n-1)^2}.$$

A korábbi becslés folytatása és a Borel–Cantelli lemma

A tárgyalás elején levő becslés alapján

$$\mathbf{P}\left(n\left|\xi_n-\xi_{n-1}\right|>\frac{4}{(n-1)^2}\right)\leq\frac{2}{(n-1)^2},$$

ezért

$$\mathbf{P}\left(\gamma_n\geq\frac{1}{n^2}\right)\leq\frac{2}{(n-1)^2}+\frac{4}{(n-1)^2}=\frac{6}{(n-1)^2}.$$

A $\sum 6/(n-1)^2$ sor konvergens, így a Borel–Cantelli lemma miatt majdnem minden kimenetelre véges sok indextől eltekintve $\gamma_n<1/n^2$, vagyis a $\sum\gamma_n$ sor majdnem minden kimenetelre konvergens, tehát az integrálhatóság teljesül.

Az Itô-féle reprezentációs tétel

A Dudley tételben az előállítás nem volt egyértelmű, ennek megfelelően nem tudtuk garantálni, hogy a reprezentációban szereplő konstans éppen a ξ változó várható értéke legyen. Az alább tárgyalandó Itô-féle reprezentációs tételben a legfontosabb az, hogy az előállításban szereplő konstans éppen a várható érték. Ugyancsak érdemes hangsúlyozni, hogy az előállításban szereplő sztochasztikus integrál nem csak lokális martingál, hanem valódi martingál, ugyanis az előállításban szereplő integrál X integrandusára $X \in \mathcal{L}^2(w)$. Ugyanakkor ennek ára is van. Egyrészt a ξ nem lehet tetszőleges, fel kell tenni, hogy négyzetesen integrálható, másrészt a ξ-nek mérhetőnek kell lenni az előállító Wiener-folyamat által generált filtrációban szereplő σ-algebrára nézve. Az eszközárazási képletben a beárazható követelések mérhetőségére szigorú megkötéseket kell tenni. A modellben a filtrációt az alapul vett Wiener-folyamatok generálják. Ennek oka éppen az alább tárgyalt tételben rejlik.

Mikor is lesz egy sztochasztikus integrál martingál?

A kérdésre csak elégséges feltételeket tudunk adni. Az integrál konstrukciója alapján, ha $X \in \mathcal{L}^2(w)$, vagyis ha $\mathbf{E}\left(\int_0^T X^2(s)\,ds\right) < \infty$, akkor $X \bullet w \in \mathcal{H}^2$, így martingált kapunk. A feltétel az $X \bullet w \in \mathcal{H}^2$-re nézve szükséges és elegendő. A Davis-egyenlőtlenséggel a feltétel élesíthető. Ha

$$\mathbf{E}\left(\sqrt{\int_0^T X^2(s)\,ds}\right) = \mathbf{E}\left(\sqrt{[X \bullet w](T)}\right) < \infty,$$

akkor

$$\mathbf{E}\left(\sup_{s \le T} |X \bullet w(s)|\right) < \infty,$$

vagyis $X \bullet w \in \mathcal{H}^1$, vagyis az integrál valódi martingál és a feltétel az $X \bullet w \in \mathcal{H}^1$-re nézve szükséges és elegendő.

Mikor is lesz egy sztochasztikus integrál martingál?

Mind a két esetben a sztochasztikus integrál egyenletesen integrálható martingál. Nincs azonban általános kritérium még az integrál egyenletes integrálhatóságának eldöntésére sem. A gyök függvény konkáv, így a Jensen-egyenlőtlenség miatt

$$\mathbf{E}\left(\sqrt{\int_0^T X^2(s)\,ds}\right) \leq \sqrt{\mathbf{E}\left(\int_0^T X^2(s)\,ds\right)},$$

vagyis a

$$\mathbf{E}\left(\sqrt{\int_0^T X^2(s)\,ds}\right) < \infty$$

kritérium valóban erősebb, vagyis előfordulhat, hogy $\mathbf{E}\left(\int_0^T X^2(s)\,ds\right) = \infty$ és az integrál mégis martingál.

A generált filtráció

Legyen tehát w egy Wiener-folyamat és jelölje $\mathcal{F}$ a w által generált filtrációt. Emlékeztetünk, hogy $\mathcal{F}_t \overset{\circ}{=} \sigma\left(\mathcal{F}_t^0 \cup \mathcal{N}\right)$, ahol $\mathcal{F}^0$ a w által generált filtráció. Könnyen látható, hogy minden $F \in \mathcal{F}_t$ halmazhoz található olyan $F_0 \in \mathcal{F}_t^0$ és N nullmértékű halmaz, hogy $F \Delta F_0 = N$. Az $\mathcal{F}_t^0$, definíció szerint, éppen a $w(s)$, $s \leq t$ alakú változók által generált legszűkebb σ-algebra. Világos, hogy ez a σ-algebra megegyezik a $w(s_1) - w(s_2)$, $s_1, s_2 \leq t$ alakú növekmények által generált σ-algebrával. Ugyancsak emlékeztetünk, hogy valamely véges számú $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_m$ változók által generált σ-algebra minden eleme felírható

$$\{\omega : (\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_m)(\omega) \in B\}$$

módon, ahol B az $\mathbb{R}^m$ egy tetszőleges Borel-mérhető halmaza. Vagyis a $(\xi_k)_{k=1}^m$ változók által generált σ-algebra éppen a Borel-halmazok inverzképeinek halmaza.

A generált filtráció

Az is világos, hogy ha vesszük a w növekményeinek összes lehetséges véges elemű részhalmazát és minden véges számú függvényből álló halmaz esetén tekintjük az ezen véges számú függvény által generált σ-algebrát, majd tekintjük ezen σ-algebrák unióját, akkor egyrészt metszet zárt rendszert kapunk, másrészt az így kapott $\mathcal{S}$ halmazcsalád generálja az $\mathcal{F}_t^0$ σ-algebrát. A monoton osztály tételből evidens, hogy tetszőleges ν (véges) előjeles mérték esetén ha $\nu(S) = 0$ minden $S \in \mathcal{S}$ halmazra, akkor a $\nu = 0$, vagyis az $\mathcal{S}$ elemei egyértelműen meghatározzák az előjeles mértékeket. (Venni kell az összes olyan korlátos u függvényt, amelyre $\int_\Omega u d\nu = 0$. Mivel a ν mérték véges, ezért a lehetséges u függvények halmaza lineáris tér.)

A sűrűségi lemma

Lemma

Jelölje $\mathcal{F}$ valamely w Wiener-folyamat által generált filtrációt. Ha a h végigfutja $[0, T]$ szakaszon értelmezett determinisztikus lépcsős függvényosztály elemeit, akkor az

$$(\mathcal{E}(h \bullet w))(T) \stackrel{\circ}{=} \exp\left(\int_0^T h dw - \frac{1}{2}\int_0^T h^2 d[w]\right)$$

alakú függvények által generált lineáris tér sűrű az $L^2(\Omega, \mathcal{F}_T, \mathbf{P})$ térben. A $T = \infty$ megengedett, azonban ilyenkor is a h elemeinek tartója korlátos kell, hogy legyen, ellenkező esetben az integrálok értelmetlenek.

Merőlegesség felírása

Jelölje $\mathcal{U}$ az $(\mathcal{E}(h \bullet w))(T)$ alakú függvények által generált lineáris teret. Megmutatjuk, hogy ha a g függvény merőleges az $\mathcal{U}$-ra, akkor $g \overset{m.m.}{=} 0$. Vagyis ha minden

$$h \circeq \sum_{k=0}^{m} \lambda_k \chi\left((t_k, t_{k+1}]\right),$$

esetén

$$\begin{aligned} 0 &= \mathbf{E}\left(\exp\left(\sum_k \lambda_k \Delta w(t_k) - \frac{1}{2}\sum_k \lambda_k^2 \Delta t_k\right) \cdot g\right) \circeq \\ &\circeq C \cdot \mathbf{E}\left(\exp\left(\sum_k \lambda_k \Delta w(t_k)\right) \cdot g\right), \end{aligned}$$

akkor $g = 0$.

Merőlegesség feltétele, áttérés a komplex tengelyre

Evidens módon tetszőleges (λ_k, t_k) sorozat esetén $C \neq 0$, vagyis feltehetjük, hogy

$$\mathbf{E}\left(\exp\left(\sum_k \lambda_k \Delta w\left(t_k\right)\right) \cdot g\right) = 0.$$

A következő gondolatmenet célja, hogy a λ_k valós paraméterek helyébe az $i\lambda_k$ imaginárius értékeket tegyük.

Merőlegesség feltétele, áttérés a komplex tengelyre

Rögzítsük a λ_0 kivételével a λ_k konstansokat. Az

$$\exp\left(\lambda_k \Delta w\left(t_k\right)\right), \quad k = 1, 2, \ldots m$$

alakú kifejezések lognormálisak, így van szórásuk, vagyis $L^2\left(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P}\right)$-beli elemek. Mivel függetlenek egymástól, ezért a négyzetük szorzatának várható értéke éppen a négyzetek várható értékeinek szorzata. Így a szorzatuk is $L^2\left(\Omega\right)$-beli. A g szintén $L^2\left(\Omega\right)$-ban van. Két négyzetesen integrálható függvény szorzata integrálható, következésképpen a $g \in L^2\left(\Omega\right)$-vel szorozva az $\exp\left(\sum_{k=1}^{m} \lambda_k \Delta w\left(t_k\right)\right)$ változót egy $L^1\left(\Omega\right)$-beli u függvényt kapunk. Mivel erre a későbbiekben szükségünk lesz érdemes hangsúlyozni, hogy ugyanez a gondolatmenet érvényes az $\exp\left(\lambda_k \left|\Delta w\left(t_k\right)\right|\right)$ változókra is, egyedül azt kell csak felhasználni, hogy ha ξ normális eloszlású, akkor az $\exp\left(\left|\xi\right|\right)$ változónak van szórása.

Az szórás végessége

Legyen $\xi \cong N(0,\sigma)$. $\mathbf{E}\left((\exp(|\xi|))^2\right) = \mathbf{E}(2\exp(|\xi|))$ és így elegendő az $\mathbf{E}(\exp(c|\xi|))$-vel, $c \geq 0$ és $\xi \cong N(0,1)$ várható értékkel foglalkozni. A lognormális eloszlás várható értékének végessége miatt

$$\begin{aligned}
\mathbf{E}(\exp(c|\xi|)) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\exp(c|x|)\exp\left(-\frac{x^2}{2}\right)dx = \\
&= \frac{2}{\sqrt{2\pi}}\int_{0}^{\infty}\exp(cx)\exp\left(-\frac{x^2}{2}\right)dx \leq \\
&\leq 2\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\exp(cx)\exp\left(-\frac{x^2}{2}\right)dx < \infty.
\end{aligned}$$

A momentumgeneráló függvény felírása

$$\begin{aligned} M(\lambda_0) &\circeq \mathbf{E}\left(\exp\left(\sum_k \lambda_k \Delta w(t_k)\right)\cdot g\right) \circeq \\ &\circeq \mathbf{E}\left(\exp\left(\lambda_0 \Delta w(t_0)\right)\cdot u\right) \circeq \\ &\circeq \int_\Omega \exp\left(\lambda_0 \Delta w(t_0)\right)\cdot u d\mathbf{P} \circeq \\ &\circeq \int_\Omega \exp\left(\lambda_0 \Delta w(t_0)\right) d\mu \equiv 0, \end{aligned}$$

ahol $\mu(A) \circeq \int_A u d\mathbf{P}$ egy előjeles mérték. Minden előjeles mérték definíció szerint csak véges értékeket vehet fel, tehát fontos, hogy az u integrálható a $\mathbf{P}$-re nézve.

A momentumgeneráló függvény deriválása

Következésképpen az M a μ előjeles mérték momentumgeneráló függvénye. Könnyen látható, hogy az M végtelen sokszor deriválható és a deriválás elvégezhető az integrál alatt. (Emlékeztetünk, hogy ehhez elegendő, hogy a magfüggvény paraméter szerinti parciális deriválása után a deriváltnak legyen deriváláshoz használt paramétertől független integrálható majoránsa. Mivel a deriválás lokális művelet, az integrálható majoráns elegendő ha a deriválandó paraméter tetszőleges értéke esetén egy a paraméter érték köré rajzolt nyílt sávban létezik.) Formálisan az integrál alatt deriválva $M^{(n)}(\lambda_0) = \int_\Omega (\Delta w(t_0))^n \exp(\lambda_0 \Delta w(t_0))\, d\mu$. Mivel alkalmas k konstanssal $x^n \exp(x) \leq k \exp(x)$, $x \geq 0$, ha $\lambda_0 \in (\lambda_0 - \varepsilon, \lambda_0 + \varepsilon)$, akkor

$$\begin{aligned} \left|(\Delta w(t_0))^n \exp(\lambda_0 \Delta w(t_0))\right| &\leq \left|(\Delta w(t_0))^n\right| \exp(|\lambda_0 \Delta w(t_0)|) \leq \\ &\leq k \exp((|\lambda_0| + \varepsilon)\, \Delta w(t_0)) \end{aligned}$$

amely kifejezés miként láttuk, integrálható.

A momentumgeneráló függvény deriválása

A deriválást elvégezve az $M(\lambda) \equiv 0$ alapján

$$M^{(n)}(\lambda_0) = \int_\Omega (\Delta w(t_0))^n \exp(\lambda_0 \Delta w(t_0))\, d\mu = 0.$$

Ha $\lambda_0 = 0$, akkor

$$\int_\Omega (\Delta w(t_0))^n \, d\mu = 0, \quad n = 0, 1, 2, \ldots.$$

A komplex exponenciális függvény hatványsora

Tekintsük az

$$\int_{\Omega} \exp\left(i\lambda_0 \Delta w\left(t_0\right)\right) d\mu = \int_{\Omega} \sum_n \frac{\left(i\lambda_0 \Delta w\left(t_0\right)\right)^n}{n!} d\mu.$$

integrált. A bizonyítás alapgondolata, hogy az összegzést és az integrálást fel tudjuk cserélni. Ezt a majorált konvergencia tétellel fogjuk igazolni. A $\Delta w\left(t_0\right)$ eloszlása normális, így miként már megjegyeztük az $\exp\left(\left|\lambda_0 \Delta w\left(t_0\right)\right|\right)$ változónak van szórása. Az $u \in L^2\left(\Omega\right)$ miatt

$$\int_{\Omega} \sum_n \frac{\left|\left(i\lambda_0 \Delta w\left(t_0\right)\right)\right|^n}{n!} d\left|\mu\right| = \int_{\Omega} \sum_n \frac{\left|\lambda_0 \Delta w\left(t_0\right)\right|^n}{n!} d\left|\mu\right| =$$

$$= \int_{\Omega} \exp\left(\left|\lambda_0 \Delta w\left(t_0\right)\right|\right) d\left|\mu\right| = \int_{\Omega} \exp\left(\left|\lambda_0 \Delta w\left(t_0\right)\right|\right) \left|u\right| d\mathbf{P} < \infty.$$

A komplex exponenciális függvény hatványsora

Ezt felhasználva az alábbi sorban használhatjuk a majorált konvergencia tételt:

$$\int_{\Omega} \exp\left(i\lambda_0 \Delta w\left(t_0\right)\right) d\mu = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\left(i\lambda_0\right)^n}{n!} \int_{\Omega} \left(\Delta w\left(t_0\right)\right)^n d\mu = 0.$$

Indukcióval való továbblépés

Vagyis minden λ_0 esetén

$$\mathbf{E}\left(\exp\left(i\lambda_0 w\Delta\left(t_0\right)\right)\cdot u\right)=0.$$

Ezt követően a g helyébe írjunk az

$$\exp\left(i\lambda_0 w\Delta\left(t_0\right)\right)g$$

függvényt. Mivel a komplex exponenciális függvény korlátos az új függvény szintén négyzetesen integrálható marad. Ezt követően vegyük a λ_1 változót, majd ismételjük meg a gondolatmenetet a λ_1-re stb. Véges lépés után az

$$M\left(\lambda_0,\ldots,\lambda_n\right)\triangleq\mathbf{E}\left(\exp\left(\sum_k i\lambda_k\Delta w\left(t_k\right)\right)\cdot g\right)\equiv 0$$

azonossághoz jutunk.

A monoton osztály tétel használata

Az olyan $f(x_1, x_2, \ldots, x_m)$ korlátos függvények, amelyekre

$$\mathbf{E}\left(f\left(\Delta w\left(t_1\right), \ldots, \Delta w\left(t_k\right)\right) \cdot g\right) = 0$$

λ-rendszert alkotnak. Az $\exp(i\lambda_k x)$ korlátos függvények π-rendszert alkotnak, így alkalmazhatjuk a monoton osztály tételt. Következésképpen minden $f(x_1, \ldots, x_m)$ Borel-mérhető, korlátos függvényre

$$\mathbf{E}\left(f\left(\Delta w\left(t_1\right), \ldots, \Delta w\left(t_k\right)\right) \cdot g\right) = 0.$$

Ha $f = \chi_B$, ahol B az $\mathbb{R}^n$ egy Borel-mérhető halmaza, akkor

$$\mathbf{E}\left(\chi_B\left(\Delta w\left(t_1\right), \ldots, \Delta w\left(t_k\right)\right) \cdot g\right) = 0.$$

A generált σ-algebra korábban említett konstrukciója miatt ha

$$A \in \sigma\left(\Delta w\left(t_0\right), \ldots, \Delta w\left(t_m\right)\right) = \sigma\left(w\left(t_0\right), \ldots, w\left(t_m\right)\right),$$

akkor $\mathbf{E}(\chi_A g) = 0$.

A sűrűségi lemma bizonyítása

Vegyük észre, hogy a

$$\nu(A) \circeq \int_A g d\mathbf{P}$$

egy előjeles mérték. A monoton osztály tétel miatt a már korábban említett észrevétel alapján

$$\mathbf{E}(\chi_A g) = 0, \quad \text{ha} \quad A \in \sigma(w(s), \quad s \leq T) = \mathcal{F}_T^w.$$

Az $\mathcal{F}$ filtráció a feladat megfogalmazása szerint a w által generált filtráció, ezért

$$\int_A g d\mathbf{P} = 0, \quad A \in \mathcal{F}_T.$$

A g függvény $\mathcal{F}_T$-mérhető, következésképpen $g \overset{m.m.}{=} 0$, ugyanis ha például az $A \circeq \{g > 0\}$ halmaz mértéke pozitív lenne, akkor

$$\int_A g d\mathbf{P} > 0$$

lenne, ami lehetelen, ugyanis $A \in \mathcal{F}_T$.

A tétel kimondása

Theorem (Itô)

Legyen w Wiener-folyamat és jelölje $\mathcal{F}$ a w által generált filtrációt. Ha

$$\xi \in L^2 \left(\Omega, \mathcal{F}_T, \mathbf{P}\right),$$

akkor található, mégpedig egyetlen olyan $X \in \mathcal{L}^2 \left(w\right)$, amelyre

$$\xi = \mathbf{E}\left(\xi\right) + \int_0^T X dw.$$

Itô-izometria

A bizonyítás kulcsa a következő Itô-izometria:

Theorem

Tetszőleges M folytonos lokális martingál esetén ha $X \in \mathcal{L}^2(M)$, akkor az $X \bullet M \in \mathcal{H}^2$, vagyis $X \bullet M$ négyzetesen integrálható martingál és

$$\begin{aligned} \|X \bullet M\|_{\mathcal{H}^2}^2 &\stackrel{\circ}{=} \mathbf{E}\left((X \bullet M)^2(T)\right) = \mathbf{E}([X \bullet M](T)) = \\ &= \mathbf{E}\left(\left(X^2 \bullet [M]\right)(T)\right) \stackrel{\circ}{=} \|X\|_M^2 . \end{aligned}$$

Az izometria alkalmazása

Legyen $\mathcal{U}$ az olyan ξ változók halmaza, amelyekre a tételben szereplő előállítás valamilyen $X \in \mathcal{L}^2(w)$ folyamattal lehetséges. Az $\mathcal{U}$ triviálisan lineáris tér. Ha $\xi \in \mathcal{U}$, akkor az előállítás két oldalát négyzetre emelve az Itô-izometria alapján

$$\mathbf{E}\left(\xi^2\right) = \left(\mathbf{E}(\xi)\right)^2 + 2\mathbf{E}(\xi)\cdot\mathbf{E}\left(\int_0^T Xdw\right) + \mathbf{E}\left(\left(\int_0^T Xdw\right)^2\right) =$$

$$= \left(\mathbf{E}(\xi)\right)^2 + \mathbf{E}\left(\left(\int_0^T Xdw\right)^2\right) = \left(\mathbf{E}(\xi)\right)^2 + \left\|(X \bullet w)(T)\right\|_2^2 \overset{\circ}{=}$$

$$\overset{\circ}{=} \left(\mathbf{E}(\xi)\right)^2 + \left\|X \bullet w\right\|_{\mathcal{H}^2}^2 = \left(\mathbf{E}(\xi)\right)^2 + \left\|X\right\|_w^2,$$

ugyanis a feltétel szerint $X \in \mathcal{L}^2(w)$, így az $X \bullet w$ négyzetesen integrálható martingál, tehát

$$\mathbf{E}\left((X \bullet w)(T)\right) = \mathbf{E}\left((X \bullet w)(0)\right) = 0.$$

A előállítható halmazok zártsága

Az $\mathcal{U}$ zárt, ugyanis ha $(\xi_n) \subseteq \mathcal{U} \subseteq L^2(\Omega, \mathcal{F}_T, \mathbf{P})$ és $\xi_n \to \xi_\infty$, akkor $\mathbf{E}(\xi_n) \to \mathbf{E}(\xi_\infty)$ és ezért a (ξ_n), illetve az $(\mathbf{E}(\xi_n))$ Cauchy-sorozatok. Így a megfelelő (X_n) is Cauchy-sorozat az $\mathcal{L}^2(w)$ térben. Mivel az $\mathcal{L}^2(w)$, miként minden L^2-tér, teljes, ezért az (X_n) sorozatnak van $X_\infty \in \mathcal{L}^2(w)$ határértéke, természetesen az $\mathcal{L}^2(w)$-ben definiált konvergencia szerint. Ugyancsak az Itô-izometria szerint az $L^2(\Omega)$ térben

$$\int_0^T X_n dw \to \int_0^T X_\infty dw,$$

ezért az előállítás teljesül a ξ_∞ határértékre is.

Egy sűrű részhalmaz megadása

Jelölje λ a Lebesgue-mértéket. Megmutatjuk, hogy az $\mathcal{U}$ tartalmazza a

$$\xi \stackrel{\circ}{=} \mathcal{E}(h \bullet w)(T) \stackrel{\circ}{=} \exp\left(h \bullet w - \frac{1}{2}h^2 \bullet \lambda\right)(T)$$

alakú változókat, ahol h egy lépcsős függvény. Természetesen $h^2 \bullet \lambda$ értelemszerűen a h^2 integrálfüggvénye a λ Lebesgue-mérték szerint.

Exponenciális martingálok

Az Itô-formula alapján tetszőleges M folytonos szemimartingálra ha

$$\mathcal{E}(M) \circeq \exp\left(M - \frac{1}{2}[M]\right),$$

akkor

$$\begin{aligned} &\mathcal{E}(M) - \mathcal{E}(M)(0) = \\ &= \mathcal{E}(M) \bullet (M - 1/2\,[M]) + \frac{1}{2}\mathcal{E}(M) \bullet [M - 1/2\,[M]] = \\ &= \mathcal{E}(M) \bullet (M - 1/2\,[M]) + \frac{1}{2}\mathcal{E}(M) \bullet [M] = \\ &= \mathcal{E}(M) \bullet M. \end{aligned}$$

Így ha az M lokális martingál, akkor az $\mathcal{E}(M)$ mindig lokális martingál.

Exponenciális martingálok

Ha $M \overset{\circ}{=} h \bullet w$, akkor

$$\mathcal{E}(M) \bullet M = \mathcal{E}(M) \bullet (h \bullet w) = (\mathcal{E}(M)\, h) \bullet w,$$

így

$$\mathcal{E}(M) = \mathcal{E}(M)(0) + (\mathcal{E}(M)\, h) \bullet w.$$

Elegendő belátni, hogy tetszőleges lépcsős h esetén a $[0, T]$ szakaszon

$$h\mathcal{E}(M) = h \exp\left(h \bullet w - \frac{1}{2} h^2 \bullet \lambda\right) \in \mathcal{L}^2(w),$$

ugyanis ekkor az $\mathcal{E}(M)$ valódi martingál, így, felhasználva, hogy az $\mathcal{F}_0$ a triviális σ-algebra

$$\mathbf{E}(\mathcal{E}(M)(T)) = \mathbf{E}(\mathcal{E}(M)(0)) = \mathcal{E}(M)(0).$$

Az integrál eloszlása

Mivel a h lépcsős és determinisztikus, ezért felhasználva, hogy a w független növekményű

$$(h \bullet w)(s) = \sum_{t_i \leq s} \lambda_i \Delta w (t_i \wedge s) = N\left(0, \sqrt{\int_0^s h^2(u)\,du}\right).$$

A lognormalitás felhasználása

$$\left\| h\mathcal{E}\left(M\right)\right\|_{w}^{2} = \mathbf{E}\left(\int_{0}^{T}\left(h\exp\left(\left(h\bullet w\right)-\frac{1}{2}\left(h^{2}\bullet\lambda\right)\right)\right)^{2}\left(s\right)ds\right) =$$

$$= \int_{0}^{T}\mathbf{E}\left(\left(h\exp\left(h\bullet w-\frac{1}{2}h^{2}\bullet\lambda\right)\right)^{2}\left(s\right)\right)ds =$$

$$= \int_{0}^{T}h^{2}\left(s\right)\exp\left(-\left(\int_{0}^{s}h^{2}\left(u\right)du\right)\right)\cdot\mathbf{E}\left(\exp\left(\left(h\bullet w\right)\left(s\right)\right)^{2}\right)ds =$$

$$= \int_{0}^{T}h^{2}\left(s\right)\exp\left(-\int_{0}^{s}h^{2}\left(u\right)du\right)\cdot\mathbf{E}\left(\exp\left(2N\left(0,\sqrt{\int_{0}^{s}h^{2}\left(u\right)du}\right)\right)\right)ds =$$

$$= \int_{0}^{T}h^{2}\left(s\right)\exp\left(-\int_{0}^{s}h^{2}\left(u\right)du\right)\exp\left(2\int_{0}^{s}h^{2}\left(u\right)du\right)ds =$$

$$= \int_{0}^{T}h^{2}\left(s\right)\exp\left(\int_{0}^{s}h^{2}\left(u\right)du\right)ds = \exp\left(\int_{0}^{T}h^{2}\left(s\right)ds\right)-1<\infty.$$

A tétel bizonyítása

Következésképpen, miként állítottuk, a $[0, T]$ szakaszon

$$h\mathcal{E}(M) \in \mathcal{L}^2(w).$$

Így az $\mathcal{E}(h \bullet w)(T)$ alakú változókra teljesül a tétel, vagyis minden h lépcsős függvényre $\mathcal{E}(h \bullet w)(T) \in \mathcal{U}$. Ha $\mathcal{F}$ a Wiener-folyamat által generált filtráció, akkor az $\mathcal{E}(h \bullet w)(T)$ alakú változók által generált lineáris tér sűrű az $L^2(\mathcal{F}_T)$ térben, az $\mathcal{U}$ zárt lineáris tér, így $\mathcal{U} = L^2(\mathcal{F}_T)$.

Az egyértelműség bizonyítása

Az egyértelműség igazolása céljából tegyük fel, hogy

$$\xi = \mathbf{E}(\xi) + \int_0^T X_1 dw = \mathbf{E}(\xi) + \int_0^T X_2 dw,$$

vagyis

$$\int_0^T X_1 dw - \int_0^T X_2 dw = 0.$$

Az Itô-izometria felhasználásával

$$0 = \mathbf{E}\left(\left(\int_0^T X_1 - X_2 dw\right)^2\right) = \mathbf{E}\left(\int_0^T (X_1 - X_2)^2 d\lambda\right).$$

Definíció szerint az $\mathcal{L}^2(w)$ az $(\mathbb{R}_+ \times \Omega, \mathcal{R}, \alpha_w)$, ahol $\alpha_w \stackrel{\circ}{=} \lambda \times \mathbf{P}$ a Wiener-folyamathoz tartozó Doléans-mérték, szerint ekvivalens folyamatokból áll, így $X_1 = X_2$ vagyis az α_w szerint majdnem mindenhol megegyeznek.

A konstans meghatározása

Corollary

Az Itô-féle reprezentációs tételben a konstans egyértelmű, vagyis ha előírjuk, hogy $X \in \mathcal{L}^2(w)$, *akkor a* $\lambda = \mathbf{E}(\xi)$ *az egyetlen olyan konstans, amelyre*

$$\xi = \lambda + \int_0^T X dw.$$

Ha $X \in \mathcal{L}^2(w)$, akkor a sztochasztikus integrál valódi martingál és ezért a várható értéke nulla. Ebből következően $\lambda = \mathbf{E}(\xi)$.

Előrejelezhető folyamatok

Definition

A folytonos trajektóriájú és adaptált folyamatok mint kétváltozós függvények által az $\mathbb{R}_+ \times \Omega$ téren generált σ-algebrára mérhető folyamatokat előrejelezhetőnek mondjuk.

A folytonos függvények által generált σ-algebra éppen a számegyenes Borel-halmazai. Világos hogy ezért minden determinisztikus Borel-mérhető függvény, mint folyamat, előrejelezhető.

Frame Title

Example

A balról folytonos, adaptált folyamatok előrejelezhetőek.

Legyen $\left(t_k^{(n)}\right)$ egy $[0, T]$ szakasz infinitezimális felbontássorozata.

Ha (X_n) trajektóriái a $\left(t_{k-1}^{(n)}, X\left(t_{k-1}^{(n)}\right)\right)$ és $\left(t_k^{(n)}, X\left(t_k^{(n)}\right)\right)$ pontokra támaszkodó lineáris törtfüggvények, akkor az X_n adaptált és folyatonos. Az X balról való folytonossága miatt $X_n \to X$, így az X előrejelezhető.
Megmutatható, hogy a Poisson-folyamat nem előrejelezhető.

Előrejelezhető folyamatok

Theorem

Az Itô-féle reprezentációban szereplő X folyamat választható előrejelezhetőnek.

A $h\mathcal{E}(h \bullet w)$ kifejezés előrejelezhető, ugyanis az $\mathcal{E}(h \bullet M)$ folyamat folytonos, a h pedig determinisztikus lépcsős függvény és így triviálisan előrejelezhető. Az általános eset következik abból, hogy az $\mathcal{L}^2(w)$ azon altere, amely tartalmaz előrejelezhető reprezentánst zárt. Valóban, ha az (X_n) osztályok mindegyike tartalmaz egy $\widetilde{X}_n$ előrejelezhető reprezentánst és $X_n \to X_\infty$ az $\mathcal{L}^2$ térben, akkor van olyan részsorozat, hogy $\widetilde{X}_n \to X$ majdnem mindenhol a Doléans-mérték szerint. De akkor az $\widetilde{X}_\infty \circeq \liminf_n \widetilde{X}_n$ előrejelezhető, és így az $\widetilde{X}_\infty$ az X_∞ egy előrejelezhető reprezentánsa.

Lokális martingálok előállítása

Az Itô és a Dudley integrálreprezentációs tételek közötti alapvető eltérés, hogy az Itô-féle tételben az előállítás egyértelmű. Ez kulcs szerepet játszik a következő állításban.

Theorem

Legyen w Wiener-folyamat. Ha $\mathcal{F}$ a w által generált filtráció, akkor tetszőleges M $\mathcal{F}$-lokális martingálra

$$M = M(0) + X \bullet w,$$

ahol $X \in \mathcal{L}^2_{loc}(w)$. Ha $M \in \mathcal{H}^2$, akkor $X \in \mathcal{L}^2(w)$. A reprezentáló X folyamat választható előrejelezhetőnek.

Lokális martingálok előállítása

Ha $M \in \mathcal{H}^2$, akkor $M(\infty) \in L^2(\Omega)$ és

$$M(t) = \mathbf{E}(M(\infty) \mid \mathcal{F}_t).$$

Az Itô-féle integrálreprezentációs tétel szerint $M(\infty) = M(0) + \int_0^\infty X dw$, ahol $X \in \mathcal{L}^2(w)$. Így

$$\begin{aligned} M(t) &= \mathbf{E}(M(\infty) \mid \mathcal{F}_t) = \mathbf{E}\left(\mathbf{E}(M(0)) + \int_0^\infty X dw \mid \mathcal{F}_t\right) = \\ &= \mathbf{E}(M(0)) + \int_0^t X dw, \end{aligned}$$

ugyanis mivel $X \in \mathcal{L}^2(w)$ ezért az $X \bullet w \in \mathcal{H}^2$ integrálfüggvény martingál. Megjegyezzük, hogy az X az α_w Doléans-mérték erejéig egyértelmű.

Lokális martingálok előállítása

Ilyenkor tehát az állítás teljesül. Vegyük észre, hogy elvileg csak minden t időpontra majdnem mindenhol értelemben azonos a két oldal, de mivel mind a két oldalon jobbról reguláris folyamatok vannak a nullmértékű halmazok egyetlen nullmértékű halmazba egyesíthetőek. A későbbiek miatt hangsúlyozni kell, hogy az M az előállítás miatt rendelkezik folytonos verzióval.

Lokális martingálok előállítása

Legyen $M(\infty) \in L^1(\Omega)$. Mivel a majorált konvergencia tétel miatt a korlátos függvények sűrűek az $L^1(\Omega)$-ban, ezért $L^2(\Omega)$ sűrű az $L^1(\Omega)$ térben, így van olyan $\xi_n \in L^2(\Omega)$ sorozat, amelyre $\xi_n \to M(\infty)$ az $L^1(\Omega)$ konvergenciában. Tekintsük az

$$M_n(t) \mathrel{\circeq} \mathbf{E}(\xi_n \mid \mathcal{F}_t)$$

martingálokat. A Doob-egyenlőtlenség miatt

$$\mathbf{P}\left(\sup_t |M_n(t) - M(t)| > \lambda\right) \leq \frac{\|M_n(\infty) - M(\infty)\|_1}{\lambda}.$$

Mivel $\|M_n(\infty) - M(\infty)\|_1 \to 0$, ezért valószínűségben

$$\sup_t |M_n(t) - M(t)| \to 0.$$

Lokális martingálok előállítása

Mivel minden sztochasztikusan konvergens sorozatnak van majdnem mindenhol konvergens részsorozata, ezért részsorozatra áttérve feltehető, hogy a konvergencia majdnem mindenhol értelemben is teljesül, vagyis az egyenletes konvergencia topológiában az (M_n) trajektóriái egy nulla valószínűségű halmaztól eltekintve az M-hez konvergálnak. Miként a bizonyítás előző pontjában megjegyeztük M_n-ről feltehető, hogy folytonos, és az egyenletes konvergenciából következően az M is folytonos.

Lokális martingálok előállítása

Ha M lokális martingál, akkor létezik korlátos megállási időkből álló (τ_n) lokalizációs sorozat. Így az M^{τ_n} megállított martingálokra feltehető, hogy $M^{\tau_n}(\infty) \in L^1(\Omega)$. Így az M^{τ_n} folytonos minden n-re. Ebből következően az M is folytonos. Így feltehető, hogy a lokalizált folyamatok korlátosak, vagyis hogy az M^{τ_n} folyamatok $\mathcal{H}^2$-ben vannak, vagyis teljesül rájuk az állítás. Ennek megfelelően

$$M^{\tau_n} = M^{\tau_n}(0) + X_n \bullet w \overset{\circ}{=} M(0)\chi(\tau_n > 0) + X_n \bullet w.$$

Ugyanakkor

$$\begin{aligned} M^{\tau_{n-1}} &= \left(M^{\tau_n}\right)^{\tau_{n-1}} = \left(M(0)\chi(\tau_n > 0) + X_n \bullet w\right)^{\tau_{n-1}} = \\ &= M(0)\chi(\tau_{n-1} > 0) + \left(X_n \bullet w\right)^{\tau_{n-1}} = \\ &= M(0)\chi(\tau_{n-1} > 0) + X_n\chi([0,\tau_{n-1}]) \bullet w. \end{aligned}$$

Ez előállítás egyértelműsége miatt $X_{n-1} \overset{m.m.}{=} X_n\chi([0,\tau_{n-1}])$, és az X_n-ek „összeragaszthatók” egyetlen $X \in \mathcal{L}^2_{\text{loc}}$ folyamattá.

Lokális martingálok előállítása

Corollary

Legyen w Wiener-folyamat és legyen $\mathcal{F}$ a w által generált filtráció. Ha L lokális martingál az $\mathcal{F}$ filtrációra nézve, akkor az L folytonos.

Az előző állítás szerint az $\mathcal{F}$ szerinti lokális martingálok sztochasztikus integrálként írhatók fel a w folyamat szerint, így folytonosak.

Folytonos trajektória és folytonos filtráció

A folytonos filtráció fontos következménye, hogy ha M egy martingál, akkor tetszőleges t időpontban

$$\lim_{s \searrow t} M(s) = M(t) \overset{m.m.}{=} \lim_{s \nearrow t} M(s).$$

Az első egyenlőség azért igaz, mert a martingálokat eleve jobbról regularizálva definiáljuk. A második egyenlőség a Lévy-féle konvergencia tétel következménye, amely szerint

$$\lim_{s \nearrow t} M(s) \overset{m.m.}{=} \lim_{s \nearrow t} \mathbf{E}\left(M(t) \mid \mathcal{F}_s\right) \overset{m.m.}{=} \mathbf{E}\left(M(t) \mid \mathcal{F}_{t-}\right) =$$

$$= \mathbf{E}\left(M(t) \mid \mathcal{F}_t\right) \overset{m.m.}{=} M(t).$$

Folytonos trajektória és folytonos filtráció

Mivel az egyenlőségek minden lépésben csak majdnem mindenhol teljesülnek, ezért a filtráció folytonossága csak azt implikálja, hogy minden t időpontban a trajektóriák közül majdnem mindegyik folytonos, vagyis egy adott t időpontban az ugrás valószínűség nulla. Ugyanakkor a „nullmértékű halmazok bosszújának" típikus esetéről van szó. Mivel a lehetséges időpontok halmaza nem megszámlálható, nem tudjuk igazolni, hogy majdnem mindegyik trajektória folytonos. A tipikus példa a Poisson-folyamat, amely minden időpontban nulla valószínűséggel ugrik, de a trajektóriái egy valószínűséggel nem folytonosak.

Folytonos trajektória és folytonos filtráció

Example

Az állítás nem igaz minden folytonos filtrációra nézve. (A példa azért fontos, mert a Sztochasztikus analízis könyvben az idevágó állítás hibás.)

Legyen X egy Poisson-folyamat. Az X által generált filtrációról könnyen igazolható, hogy jobbról folytonos. (Elegendő felhasználni, hogy a trajektóriák minden t időpontban egy ideig konstansok.) Ha az $\mathcal{F}^X$-et kiegészítjük a nullmértékű halmazokkal, akkor az így kapott kibővített filtráció balról is folytonos lesz, ugyanis ha $t_n \nearrow t$, akkor majdnem minden kimenetelre $X(t_n) \nearrow X(t)$, ugyanis minden t időpontban az ugrás valószínűsége nulla, vagyis minden t időpontban a trajektóriák majdnem minden kimenetelre folytonosak. Így minden t-re az $X(t)$ mérhető az $\mathcal{F}_{t-}$ σ-algebrára nézve, így $\mathcal{F}_{t-} = \mathcal{F}_t$. Ugyanakkor az $\mathcal{F}$ hordozza, a nem folytonos trajektóriákkal rendelkező X Poisson-folyamatot.

Ellenpélda

Legyen $((w_1, w_2), \mathcal{G})$ független koordinátákból álló kétdimenziós Wiener-folyamat. Legyen $X \circeq w_1 \bullet w_2$, és $\mathcal{F}$ legyen az X által generált filtráció. Evidens módon $\mathcal{F}_t \subseteq \mathcal{G}_t$, és az $[X]$ kvadratikus variáció $\mathcal{F}$-adaptált. Mivel

$$[X](t) = \int_0^t w_1^2 d[w_2] = \int_0^t w_1^2(s)\, ds,$$

ezért a w_1^2 éppen az $[X]$ deriváltja, tehát a w_1^2 szintén $\mathcal{F}$-adaptált, következésképpen az Itô-formula szerint a

$$Z(t) \circeq w_1 \bullet w_1(t) = \frac{1}{2}\left(w_1^2 - [w_1]\right)(t)$$

is $\mathcal{F}$-adaptált. A Z $\mathcal{F}$-martingál, ugyanis ha $s < t$, akkor, felhasználva, hogy a $Z \circeq w_1^2 - [w_1]$ $\mathcal{G}$-martingál

$$\mathbf{E}(Z(t) \mid \mathcal{F}_s) = \mathbf{E}(\mathbf{E}(Z(t) \mid \mathcal{G}_s) \mid \mathcal{F}_s) = \mathbf{E}(Z(s) \mid \mathcal{F}_s) = Z(s).$$

Ellenpélda

Mivel analóg módon

$$\mathbf{E}(X(t) \mid \mathcal{F}_s) = \mathbf{E}(\mathbf{E}(X(t) \mid \mathcal{G}_s) \mid \mathcal{F}_s) = \mathbf{E}(X(s) \mid \mathcal{F}_s) = X(s),$$

ezért az X is $\mathcal{F}$-martingál. Tegyük fel, hogy az $(X, \mathcal{F})$ párra teljesül a reprezentációs tulajdonság és legyen

$$Z = Y \bullet X \overset{\circ}{=} Y \bullet (w_1 \bullet w_2) = Y w_1 \bullet w_2.$$

A w_1 és w_2 függetlenek, ezért $[w_1, w_2] = 0$, és így

$$\begin{aligned} 0 &< [Z \bullet Z] = [w_1 \bullet w_1, Y \bullet X] = [w_1 \bullet w_1, Y w_1 \bullet w_2] = \\ &= Y w_1^2 \bullet [w_1, w_2] = 0, \end{aligned}$$

lenne, ami lehetetlen.