Amerikai opciók véges időhorizonton

Ez a tananyag legegyszerűbb része

Medvegyev Péter

2009

A probléma

Az amerikai származtatott termékek olyan termékek, amelyek tetszőleges időpontban lehívhatóak. Mivel az alapfeltevés az, hogy a jövő nem látható előre, a lehívás csak megállási idő mentén történhet. Legyen tehát adott egy $H = (H_n)$ folyamat. A folyamat tulajdonosának joga van egy τ megállási időt kiválasztani, és az ω kimenetel esetén a

$$(H_\tau)(\omega) \mathrel{\hat=} H_{\tau(\omega)}(\omega)$$

értéket „lekaszálni". Az európai származtatott termékek esetén csak a $\tau = T$ megengedett, ahol $T < \infty$ a származtatott termék lejárati ideje. A kérdés a következő: Mennyi a H ára?

A feltételek

Feltesszük, hogy az időhorizont véges, az utolsó időpont T. A H valamilyen értelemben a megfigyelhető eseményekhez kötött, vagyis felteszük, hogy a H adaptált az előre rögzített $(\mathcal{F}_n)$ filtrációra nézve. Feltesszük továbbá, hogy a definiált piac teljes, valamint, hogy a piacon nincsen arbitrázs. Feltesszük tehát, hogy az $(\Omega, \mathcal{A})$ mérhető struktúrán van, mégpedig egyetlen $\mathbf{Q}$ martingál mérték, amelyre nézve a árfolyamok martingált alkotnak. A feltevésekből következően az $(\Omega, \mathcal{A}) = (\Omega, \mathcal{F}_T)$ mező véges sok atomból áll.

Szuperreplikálás és az arbitrázsárazás

Az alapfeltétel, hogy a H származtatott terméket eladó, vagyis a H-ért kötelezettséget vállaló oldal a H lehívásának időpontjában fedezett állapotban akar lenni. Ehhez az szükséges, hogy a származtatott termék x árából egy olyan önfinanszírozó portfoliót tudjon építeni, amely $V(x)$ értékfolyamatára tetszőleges τ megállási idő esetén $V_\tau(x) \geq H_\tau$ legyen. Természetesen ehhez szükséges és elegendő, ha minden $0 \leq n \leq T$ időpontra $V_n(x) \geq H_n$.

Definition

Valamely x kezdőértékből kiinduló önfinanszírozó stratégia szuperreplikálja a H származtatott terméket, ha a $V(x)$ értékfolyamatra minden n időpontra $V_n(x) \geq H_n$.

A másik oldalnak miért jó?

Természetesen a vevő sem akar az üzleten veszíteni, ezért csak akkor hajlandó az x áron az üzletbe belemenni, ha van olyan τ megállási idő, amelyre

$$H_\tau = V_\tau \left(x\right).$$

Ugyanis ha ez nem teljesülne, akkor a szuperreplikáló tulajdonságú stratégia létezése miatt az eladó, vagyis a H kifizetését felvállaló oldal, szisztematikusan keresne rajta, így a vevő is inkább eladná mint megvenné a H származtatott terméket: Ha $\pi\left(H\right) > x$, akkor a származtatott termék drága, így eladva és az x-ből felépítve a szuperreplikáló portfoliót biztos nyereséghez jutunk. Ha pedig $x > \pi\left(H\right)$, akkor a szuperreplikáló portfoliót eladva x és a származtatott terméket megvéve és a τ időpontban lehívva és a H_τ bevételből a fedező portfoliót felszámolva biztos $x - \pi\left(H\right) > 0$ nyereséghez juthatunk.

Szuperreplikáló és likvidálható portfolió

Definition

Ha valamely $V(x)$ szuperreplikáló értékfolyamathoz van olyan τ megállási idő, amelyre $H_\tau = V_\tau(x)$, akkor a $V(x)$ értékfolyamatot likvidálható szuperreplikáló portfoliónak mondjuk.

Az elmondottakból világos, hogy ha valamely H követeléshez létezik $V(x)$ likvidálható szuperreplikáló portfólió, akkor a H arbitrázs elmélet szerinti ára éppen a portfólió induló értéke.x.

Az arbitrázsár egyértelmű

Tegyük fel, hogy egy (x_1, τ_1) és egy (x_2, τ_2) is megadható valamely H követeléshez. Ha $x_1 \neq x_2$, akkor az olcsóbb likvidálható, szuperreplikáló portfoliót megvéve, a drágábbat eladva, illetve a H-ra vonatkozó vételi és eladási pozíciót egyszerre biztosítva a $t = 0$ időpontban pozitív profitra tennénk szert. (Ugyanis a H követelés egyszerre való megvétele és eladása nulla költséget jelent.) A megfelelő τ_i időpontokban az eladott portfoliót a megvett követeléssel likvidálva, illetve a megvett portfolióval az eladott követelés lehívását megvárva arbitrázs lehetőséghez jutunk. Mivel a feltétel szerint nincsen arbitrázs $x_1 = x_2$.

Mit kell belátni?

Az amerikai opciók árazási problémájának megoldásához két kérdést kell tisztázni:

- Létezik-e a megadott tulajdonságú (τ, x) ,
- illetve hogyan számolható ki a (τ, x) pár a modellben szereplő paraméterekből?

Önfinanszírozó portfóliók

Definition

Egy előrejelezhető stratégiákból álló $\theta(t) = (\theta_1, \ldots, \theta_n)(t)$ portfolió folyamatot önfinanszírozónak mondunk, ha minden t időpontban

$$S(t)\,\theta(t) = S(t)\,\theta(t+1).$$

Értékfolyamat mint martingáltranszformáció

Az értékfolyamat definíciója szerint $V(t) = S(t)\theta(t)$. Az önfinanszírozás feltétele miatt

$$\begin{aligned} V(t) = S(t)\theta(t) = \\ = S(t)\theta(t) - S(t-1)\theta(t-1) + S(t-1)\theta(t-1)\ldots = \\ = S(t)\theta(t) - S(t-1)\theta(t) + S(t-1)\theta(t-1)\ldots = \\ = (S(t) - S(t-1))\theta(t) + S(t-1)\theta(t-1) - S(t-2)\theta(t-2)\ldots = \\ = \sum_{s=0}^{t} (S(s) - S(s-1))\theta(s) + S(0)\theta(0) \end{aligned}$$

vagyis minden önfinanszírozó portfolió „sztochasztikus integrálként” írható fel.

A fordított irány

A gondolatmenet fordítva is működik. Természetesen közgazdaságilag a „sztochasztikus integrálok” csak akkor értelmesek, ha az $S(s) - S(s-1)$ növekmények azonos időszakra vonatkoznak, vagyis az S alaptermékek már diszkontált árfolyamokat adnak meg. Ilyenkor az egyik termék ára, amelyet általában a nulla index jelöl, azonosan egy, ugyanis a diszkonttényezőt diszkontálva éppen azonosan egyet kapunk. Ilyenkor azonban a „sztochasztikus integrálként” felírt portfoliókban a diszkonttényezőhöz tartozó θ_0 súly értéke irreleváns. Vagyis minden „sztochasztikus integrálként” felírt $V(t)$ sorozathoz a θ_0 alkalmas megválasztásával egyértelműen elkészíthető egy önfinanszírozó értékfolyamat: a $\theta_0(t+1)$-et úgy kell meghatározni, hogy teljesüljön az önfinanszírozás feltétele.

Mikor kell diszkontálni?

Világos, hogy egy portfolió sorozat pontosan akkor önfinanszírozó, ha a diszkontált verziója önfinanszírozó, ugyanis az önfinanszírozás definícióban mind a két oldalon azonos időpontra vonatkozó $S(t)$ ár szerepel. Ha feltesszük, hogy a diszkontényező ára a $t = 0$ időpontban éppen egy, akkor a likvidálható, önfinanszírozó portfolió induló költsége független attól, hogy a H követelést vagy a $\overline{H}$ diszkontált követelést szuperreplikáljuk.

Mikor kell diszkontálni?

A származtatott termékek árainak meghatározásában matematikailag döntő szerepe van annak, hogy az S alaptermékek árai alkalmas $\mathbf{Q}$ mérték mellett martingálok legyenek, illetve hogy a replikáló.portfolió „sztochasztikus integrál” legyen. Az elsőt pusztán mértékcserével általában nem lehet elérni, ugyanis ha az S termékek között ott szerepel a diszkontálásban használt kötvény is, akkor annak ára általában egy szigorúan monoton növekedő folyamat, amely nyilván semmilyen $\mathbf{Q}$ esetén sem lesz martingál. Ha azonban a diszkontált árfolyamokat tekintjük, akkor a kötvény ára azonosan egy lesz, így automatikusan martingál lesz.

Mikor kell diszkontálni?

Ilyenkor a hozzá tartozó sztochasztikus integrálban az integrátor növekménye nulla lesz, így a súlya kiesik a feladatból, de a többi súly ismeretében az önfinanszírozás feltétele miatt az értéke mindig visszaszámolható, vagyis diszkontált árfolyamokra áttérve az önfinanszírozó portfoliókkal előállítható követelések halmaza nem változik. Ennek megfelelően amennyiben az alaptermékek között a diszkonttényező is szerepel a H követelésről, illetve a S alaptermékekről mindig feltesszük, hogy már eleve a diszkontált termékekre vonatkoznak.

Mikor kell diszkontálni?

Másképpen fogalmazva az $S(t) - S(t-1)$ eltérés csak akkor értelmes közgazdaságilag, ha az árfolyamok diszkontálva vannak. Ha nem diszkontált árfolyamokat tekintünk, akkor árfolyamdifferenciákkal számolva mindig lehet arbitrálni, vagyis biztos pozitív nyereséget létrehozni, illetve a diszkonttényezőként használt kötvény nem lesz semmilyen mérték mellett martingál. Vagyis az eszközárazás első és második alaptételében mindig a diszkontált árfolyamok szerepelnek.

Összefoglalva

Ha a modellben az S alaptermékek között ott szerepel a diszkonttényező, akkor mivel az monoton nő csak úgy kaphatunk martingálmértéket, ha a diszkontált árfolyamokat tekintjük. Ilyenkor a diszkonttényező súlyát a replikáló portfolióban csak az önfinanszírozás feltételével tudjuk egyértelműen, közgazdaságilag értelmes módon rögzíteni. Ha a diszkontényező nem szerepel közvetlenül a modellben, akkor nincsen szükség az önfinanszírozás feltételére, közvetlenül alkalmazhatjuk a „sztochasztikus integrál" alakot, de közgazdaságilag csak a diszkontált változók esetén értelmes a modell.

Alulról korlátos lokális martingálok szupermartingálok

Egy gyakran használt alapvető észrevétel a következő:

Theorem

Ha L egy alulról korlátos lokális martingál, akkor az L egy szupermartingál.

Feltehető, hogy $L \geq 0$. A lokális martingál tulajdonság miatt ha $s < t$, akkor

$$\mathbf{E}\left(L\left(t \wedge \tau_n\right) \mid \mathcal{F}_s\right) = L\left(s \wedge \tau_n\right).$$

Ha $n \nearrow \infty$, akkor a Fatou-lemma miatt

$$\begin{aligned} L(s) &= \lim_{n\to\infty} L\left(s \wedge \tau_n\right) = \lim_{n\to\infty} \mathbf{E}\left(L\left(t \wedge \tau_n\right) \mid \mathcal{F}_s\right) \geq \\ &\geq \mathbf{E}\left(\lim_{n\to\infty} L\left(t \wedge \tau_n\right) \mid \mathcal{F}_s\right) = \mathbf{E}\left(L(t) \mid \mathcal{F}_s\right). \end{aligned}$$

Megállási opciókról szóló tétel

Theorem

Ha $(\xi_n, \mathcal{F}_n)_n$ *diszkrét időtartományon értelmezett integrálható szubmartingál, és van olyan* $N < \infty$, *hogy a* τ_1, τ_2 *megállási időkre*

$$\mathbf{P}(\tau_1 \leq \tau_2) = \mathbf{P}(\tau_2 \leq N) = 1,$$

akkor

$$\xi_{\tau_1} \leq \mathbf{E}\left(\xi_{\tau_2} \mid \mathcal{F}_{\tau_1}\right)$$

és

$$\mathbf{E}(\xi_0) \leq \mathbf{E}\left(\xi_{\tau_1}\right) \leq \mathbf{E}\left(\xi_{\tau_2}\right) \leq \mathbf{E}(\xi_N).$$

Martingálok esetén mind a két sorban mindenhol egyenlőség van.

A megállási opciókról szóló tétel

Legyen $\tau_1 \leq \tau_2 \leq N$ és

$$\varphi_k \circeq \chi(\tau_1 < k \leq \tau_2).$$

Vegyük észre, hogy

$$\begin{aligned} \{\varphi_k = 1\} &= \{\tau_1 < k, \tau_2 \geq k\} = \\ &= \{\tau_1 \leq k-1\} \cap \{\tau_2 \leq k-1\}^c \in \mathcal{F}_{k-1}. \end{aligned}$$

A feltétel szerint a ξ_k minden k-ra integrálható, így a $\xi_k - \xi_{k-1}$ is integrálható, következésképpen a $\xi_k - \xi_{k-1}$ változónak létezik az $\mathcal{F}_{k-1}$ szerinti feltételes várható értéke, így a φ_k korlátosságát, illetve az N végességét felhasználva

$$\begin{aligned} \mathbf{E}(\eta) &\circeq \mathbf{E}\left(\sum_{k=1}^{N} \varphi_k(\xi_k - \xi_{k-1})\right) = \sum_{k=1}^{N} \mathbf{E}(\mathbf{E}(\varphi_k(\xi_k - \xi_{k-1}) \mid \mathcal{F}_{k-1})) = \\ &= \sum_{k=1}^{N} \mathbf{E}\left(\varphi_k \mathbf{E}\left(\xi_k - \xi_{k-1} \mid \mathcal{F}_{k-1}\right)\right) \geq 0. \end{aligned}$$

A megállási opciókról szóló tétel

Ha valamilyen ω kimenetelre $\tau_1(\omega) = \tau_2(\omega)$, akkor minden k indexre $\varphi_k(\omega) = 0$, így $\eta(\omega) \stackrel{\circ}{=} 0$. Ha $\tau_1(\omega) < \tau_2(\omega)$, akkor

$$\begin{aligned}\eta(\omega) &\stackrel{\circ}{=} \xi(\tau_1(\omega)+1) - \xi(\tau_1(\omega)) + \\ &\quad +\xi(\tau_1(\omega)+2) - \xi(\tau_1(\omega)+1) + \ldots \\ &\quad +\xi(\tau_2(\omega)) - \xi(\tau_2(\omega)-1),\end{aligned}$$

amely összeg $\xi(\tau_2(\omega)) - \xi(\tau_1(\omega))$, vagyis

$$\eta = \xi(\tau_2) - \xi(\tau_1),$$

tehát az $\mathbf{E}(\eta) \geq 0$ miatt, felhasználva, hogy mivel a ξ_k minden k-ra integrálható, ezért az $\mathbf{E}(\xi(\tau_k))$ véges

$$\mathbf{E}(\xi(\tau_2)) \geq \mathbf{E}(\xi(\tau_1)).$$

A megállási opciókról szóló tétel

Ha $A \in \mathcal{F}_{\tau_1} \subseteq \mathcal{F}_{\tau_2}$, akkor a

$$\tau_k^*(\omega) \circeq \begin{cases} \tau_k(\omega) & \text{ha} \quad \omega \in A \\ N+1 & \text{ha} \quad \omega \notin A \end{cases}$$

változók megállási idők, ugyanis ha $n \leq N$, akkor

$$\{\tau_k^* \leq n\} = A \cap \{\tau_k \leq n\} = A \cap \{\tau_k \leq n\} \in \mathcal{F}_n.$$

A már belátottak alapján

$$\begin{aligned} \mathbf{E}(\xi(\tau_2^*)) &= \int_A \xi(\tau_2)\, d\mathbf{P} + \int_{A^c} \xi(N+1)\, d\mathbf{P} \geq \mathbf{E}(\xi(\tau_1^*)) = \\ &= \int_A \xi(\tau_1)\, d\mathbf{P} + \int_{A^c} \xi(N+1)\, d\mathbf{P}. \end{aligned}$$

A megállási opciókról szóló tétel

Következésképpen a ξ_{N+1} integrálhatósága miatt az $\int_{A^c} \xi(N+1)\, d\mathbf{P}$ a két oldalról törölhető, tehát

$$\int_A \xi(\tau_2)\, d\mathbf{P} \geq \int_A \xi(\tau_1)\, d\mathbf{P}.$$

A $\xi(\tau_1)$ $\mathcal{F}_{\tau_1}$-mérhető, ezért

$$\mathbf{E}\left(\xi(\tau_2) \mid \mathcal{F}_{\tau_1}\right) \geq \xi(\tau_1).$$

Nem negatív követelések

Tegyük fel, hogy $H \geq 0$. Ilyenkor a $V \geq H \geq 0$ szuperreplikálás miatt nem negatív, így szupermartingál. Következésképpen minden $0 \leq \tau \leq T$ megállási időre a megállási opciókról szóló tétel alapján veszíti a várható értéket. Így

$$x = V_0(x) = V_0(x) \geq \mathbf{E}^{\mathbf{Q}}(V_\tau(x)) \geq \mathbf{E}^{\mathbf{Q}}(H_\tau).$$

Mivel ez minden τ esetén teljesül, ezért

$$\pi(H) = x = V_0(x) \geq \sup_\tau \mathbf{E}^{\mathbf{Q}}(H_\tau).$$

(A $V(x)$ alulról korlátos szupermartingál, tehát pontosan akkor integrálható, ha a $V_0(x)$ integrálható. Ez azonban teljesül, mivel $V_0(x) = x$, így integrálható. Vagyis a megállási opciókról szóló tétel használható.)

Az optimális megállítás problémája

Definition

Tetszőleges $(\Omega, \mathcal{A}, \mathcal{F}, \mathbf{P})$ sztochasztikus alaptér és H folyamat esetén a

$$\sup_{\tau} \mathbf{E}\left(H\left(\tau\right)\right)$$

feladatot, ahol a τ a lehetséges megállási idők halmazán fut végig, az optimális megállítás problémájának nevezzük.

Az elmondottak miatt a $\mathbf{Q}$ alatti, a H-ra vonatkozó optimális megállítás problémájának értéke az ár alsó korlátja. Ha valamilyen τ-ra $V_{\tau}\left(x\right) = H_{\tau}$, akkor a fenti becslés utolsó egyenlőtlenségében egyenlőség van. Mivel a teljesség és az arbitrázsmentesség miatt a valószínűségi mező véges sok atomból áll a V nem csak lokális martingál, hanem valódi martingál. Következésképpen az első egyenlőtlenség is egyenlőségre teljesül, vagyis a sorban egyenlőség van.

Az optimális megállítás problémája

Következésképpen, ha az amerikai opciónak van az arbitrázselmélet alapján meghatározható ára, akkor ez az ár éppen az optimális megállítás problémájának értéke.
Megfordítva, tegyük fel, hogy tudjuk, hogy az optimális megállítás problémájának van véges megoldása és tegyük fel, hogy a szuprémum helyébe maximum írható. Legyen τ^* a feladat egy optimális megoldása. Tegyük fel továbbá, hogy az

$$x \stackrel{\circ}{=} \sup_{\tau} \mathbf{E}^{\mathbf{Q}}\left(H_{\tau}\right) = \mathbf{E}^{\mathbf{Q}}\left(H_{\tau^*}\right)$$

értékből kiindulva elkészíthető egy önfinanszírozó, szuperreplikáló portfolió. Ekkor mivel a V szuperreplikáló, ismételten a megállási opciókról szóló tétel miatt a V veszíti a várható értéket

$$\begin{aligned} \mathbf{E}^{\mathbf{Q}}\left(V\left(\tau^*\right)\right) &\leq V_0\left(x\right) = x = \\ &= \mathbf{E}^{\mathbf{Q}}\left(H_{\tau^*}\right) \leq \mathbf{E}^{\mathbf{Q}}\left(V\left(\tau^*\right)\right). \end{aligned}$$

Ami csak akkor teljesülhet, ha egyenlőség van, vagyis

$$\mathbf{E}^{\mathbf{Q}}\left(H_{\tau^*}\right) = \mathbf{E}^{\mathbf{Q}}\left(V\left(\tau^*\right)\right).$$

A szuperreplikálás miatt a **Q** mérték alatt

$$H\left(\tau^*\right) \overset{m.m.}{=} V\left(\tau^*\right).$$

Így a **P** és a **Q** ekvivalenciája miatt a **P** alatt is. Vagyis ha az optimális megállítás problémájának van τ^* optimális megoldása és az optimum értékéből kiindulva felépíthető egy szuperreplikáló portfolió, akkor a már bemutatott gondolatmenet alapján a H-nak meghatározható az ára és ilyenkor $\pi\left(H\right) = x$.

Mit kell akkor belátni?

A kérdés tehát a következő:

1. Miként számolható ki az

$$x \stackrel{\circ}{=} \sup_{\tau} \mathbf{E}^{\mathbf{Q}} \left(H_{\tau} \right)$$

érték?
2. Van-e olyan τ, és az miként határozható meg, ahol a szuprémum felvevődik?
3 Van-e olyan szuperreplikáló portfolió, amely az x kezdőértékből indul ki?

Amerikai call opció

Example

Amerikai call opció.

Legyen H amerikai call opció. Ilyenkor $H_n = (S_n - K)^+$. A diszkontált kifizetés

$$\overline{H}_n = \left(\frac{S_n}{S_n^0} - \frac{K}{S_n^0}\right)^+ .$$

Az $\overline{S}$ a $\mathbf{Q}$ alatt martingál. Ha feltesszük, hogy az $1/S_n^0$ diszkonttényező csökken, akkor a $-K/S_n^0$ kifejezés várható értéke nő, vagyis az

$$\frac{S_n}{S_n^0} - \frac{K}{S_n^0}$$

folyamat növeli a feltételes várható értéket, vagyis szubmartingál.

Amerikai call opció

Szubmartingálok konvex és monoton növekedő függvénye szintén szubmartingál. A szubmartingálokra vonatkozó megállási opciókról szóló tétel miatt tetszőleges τ megállási idő esetén

$$\mathbf{E}^{\mathbf{Q}}\left(\frac{H_\tau}{S_\tau^0}\right) \leq \mathbf{E}^{\mathbf{Q}}\left(\frac{H_T}{S_T^0}\right).$$

Így az elmondottak miatt a call opció ára, ha felépíthető önfinanszírozó, szuperreplikáló portfolió, $\pi(H) = \mathbf{E}^{\mathbf{Q}}\left(H_T / S_T^0\right)$, amely azonos az európai call opció árával.

Amerikai putl opció

Example

Amerikai put opció.

A put opciók esetén $H_n \mathrel{\hat{=}} (K - S_n)^+$. A

$$\frac{K}{S_n^0} - \frac{S_n}{S_n^0}$$

kifejezés azonban szupermartingál. Szupermartingálok monoton növő konkáv és nem konvex függvénye lesz szupermartingál, így a bemutatott gondolatmenet a put opció esetén nem alkalmazható.

Snell-burkoló

Mivel a valószínűségi mező véges, ezért az optimális megállítás problémájában a szuprémum maximum. A keresett értéket visszafelé való indukcióval tudjuk kiszámolni. Jelölje Δ_n az $n \leq \tau \leq T$ egyenlőtlenséget kielégítő megállási idők halmazát. Speciálisan Δ_0 az összes megállási idők halmaza. Legyen

$$X_n \circeq \sup_{\tau \in \Delta_n} \mathbf{E}\left(H_\tau \mid \mathcal{F}_n\right) = \max_{\tau \in \Delta_n} \mathbf{E}\left(H_\tau \mid \mathcal{F}_n\right).$$

Ha feltesszük, hogy $\mathcal{F}_0 = \{\emptyset, \Omega\}$, akkor X_0 egy véges konstans és az értéke éppen az optimális megállítás feladatának megoldása.

Definition

Az

$$X_n \circeq \max_{\tau \in \Delta_n} \mathbf{E}\left(H\left(\tau\right) \mid \mathcal{F}_n\right)$$

sorozatot a H Snell-féle burkolójának szokás mondani.

A numerikus algoritmus

Theorem (Indukciós algoritmus)

Ha $H \geq 0$, akkor a Snell-burkoló elemei kiszámolhatóak a következő hátrafelé haladó indukcióval:

$$
\begin{aligned}
X_T &= H_T \\
X_n &= \max\left(H_n, \mathbf{E}\left(X_{n+1} \mid \mathcal{F}_n\right)\right).
\end{aligned}
$$

A numerikus algoritmus

Jelölje $\widehat{X}_n$ az állításban szereplő, hátrafelé haladó indukciós eljárás eredményét. Az $X_T = H_T = \widehat{X}_T$ egyenlőség nyilvánvaló, ugyanis $\Delta_T = \{T\}$ és a H adaptált, így a H_T nyilván $\mathcal{F}_T$-mérhető. Az n konstans megállási idő, $n \in \Delta_n$, a H adaptált, így nyilván

$$X_n = \max_{\tau \in \Delta_n} \mathbf{E}\left(H_\tau \mid \mathcal{F}_n\right) \overset{m.m.}{\geq} \mathbf{E}\left(H_n \mid \mathcal{F}_n\right) \overset{m.m.}{=} H_n.$$

Mivel a mező véges, ezért a Δ_n halmazok végesek, így a Snell-burkoló definíciójában maximum van így alkalmas $\tau_{n+1} \in \Delta_{n+1} \subseteq \Delta_n$ megállási időre:

$$\begin{aligned} \mathbf{E}\left(X_{n+1} \mid \mathcal{F}_n\right) &= \mathbf{E}\left(\mathbf{E}\left(H_{\tau_{n+1}} \mid \mathcal{F}_{n+1}\right) \mid \mathcal{F}_n\right) = \mathbf{E}\left(H_{\tau_{n+1}} \mid \mathcal{F}_n\right) \leq \\ &\leq \max_{\tau \in \Delta_n} \mathbf{E}\left(H_\tau \mid \mathcal{F}_n\right) = X_n, \end{aligned}$$

Ebből

$$X_n \overset{m.m.}{\geq} \max\left(H_n, \mathbf{E}\left(X_{n+1} \mid \mathcal{F}_n\right)\right) \stackrel{\circ}{=} \widehat{X}_n.$$

A numerikus algoritmus

Most térjünk rá a másik irány igazolására. Tetszőleges $\tau \in \Delta_n$ esetén $\tau \geq n$, így

$$H(\tau) = H_n \chi(\tau = n) + H_{\tau \vee (n+1)} \chi(\tau > n),$$

Fontos hangsúlyozni, hogy $\tau \vee (n+1) \in \Delta_{n+1}$, így az X_{n+1} definíciója szerint

$$\mathbf{E}\left(H_{\tau \vee (n+1)} \mid \mathcal{F}_{n+1}\right) \leq \max_{\sigma \in \Delta_{n+1}} \mathbf{E}\left(H_\sigma \mid \mathcal{F}_{n+1}\right) \overset{\circ}{=} X_{n+1}.$$

A két oldalon $\mathcal{F}_n$ szerint feltételes várható értéket véve

$$\mathbf{E}\left(\mathbf{E}\left(H_{\tau \vee (n+1)} \mid \mathcal{F}_{n+1}\right) \mid \mathcal{F}_n\right) = \mathbf{E}\left(H_{\tau \vee (n+1)} \mid \mathcal{F}_n\right) \leq \mathbf{E}\left(X_{n+1} \mid \mathcal{F}_n\right).$$

Így minden $\tau \in \Delta_n$ esetén

$$
\begin{aligned}
\mathbf{E}\left(H_\tau \mid \mathcal{F}_n\right) &= \mathbf{E}\left(H_n \chi\left(\tau = n\right) + H_{\tau \vee (n+1)} \chi\left(\tau > n\right) \mid \mathcal{F}_n\right) = \\
&= H_n \chi\left(\tau = n\right) + \mathbf{E}\left(H_{\tau \vee (n+1)} \mid \mathcal{F}_n\right) \chi\left(\tau > n\right) \leq \\
&\leq H_n \chi\left(\tau = n\right) + \mathbf{E}\left(X_{n+1} \mid \mathcal{F}_n\right) \chi\left(\tau > n\right) \leq \\
&\leq \max\left(H_n, \mathbf{E}\left(X_{n+1} \mid \mathcal{F}_n\right)\right) = \widehat{X}_n,
\end{aligned}
$$

következésképpen

$$
X_n \circeq \max_{\tau \in \Delta_n} \mathbf{E}\left(H_\tau \mid \mathcal{F}_n\right) \leq \widehat{X}_n.
$$

Összefoglalva: $X = \widehat{X}$.

Optimalitási kritérium

Theorem

Ha $H \geq 0$, akkor az X Snell-burkoló a legkisebb olyan $(\mathcal{F}_n)$-szupermartingál, amely dominálja a H folyamatot.

Az indukciós algoritmus szerint $X_n \geq H_n \geq 0$, és $X_n \geq \mathbf{E}\left(X_{n+1} \mid \mathcal{F}_n\right)$, következésképpen az X dominálja a H folyamatot és az X nem negatív szupermartingál. Legyen Y egy másik olyan szupermartingál, amely dominálja a H folyamatot. Ekkor $Y_T \geq H_T \stackrel{\circ}{=} X_T$. Az Y szupermartingál, így

$$Y_{T-1} \geq \mathbf{E}\left(Y_T \mid \mathcal{F}_{T-1}\right) \geq \mathbf{E}\left(H_T \mid \mathcal{F}_{T-1}\right) = \mathbf{E}\left(X_T \mid \mathcal{F}_{T-1}\right),$$

így

$$Y_{T-1} \geq \max\left(H_{T-1}, \mathbf{E}\left(X_T \mid \mathcal{F}_{T-1}\right)\right) = X_{T-1}.$$

Optimalitási kritérium

Általában visszafelé haladó indukcióval, felhasználva, hogy az Y szupermartingál

$$Y_{n-1} \geq \mathbf{E}\left(Y_n \mid \mathcal{F}_{n-1}\right) \geq \mathbf{E}\left(X_n \mid \mathcal{F}_{n-1}\right).$$

Felhasználva, hogy az Y dominálja a H folyamatot

$$Y_{n-1} \geq \max\left(H_{n-1}, \mathbf{E}\left(X_n \mid \mathcal{F}_{n-1}\right)\right) = X_{n-1}.$$

Optimalitási kritérium

Theorem

Ha $H \geq 0$, akkor a

$$\tau^* = \min \{n \geq 0 : H_n = X_n\}$$

változó megállási idő, $\tau^* \leq T$ és a τ^* optimális megállási idő.

A τ^* megállási idő, ugyanis

$$\begin{aligned} \{\tau^* = 0\} &= \{H_0 = X_0\} \in \mathcal{F}_0 \\ \{\tau^* = n\} &= \{H_n = X_n\} \cap \left(\bigcap_{k=0}^{n-1} \{H_k < X_k\} \right) \in \mathcal{F}_n \end{aligned}$$

ugyanis az X és a H adaptáltak. (A τ^* éppen a $H - X$ találati ideje a $B \overset{\circ}{=} \{0\}$ halmaz esetén.) A Snell-burkoló definíciója alapján $X_T = H_T$, így biztosan

$$0 \leq \tau^* \leq T.$$

Optimalitási kritérium

Megmutatjuk, hogy az $X_n^{\tau^*} \circeq X_{n\wedge\tau^*}$ megállított folyamat martingál. Legyen

$$\varphi_n \circeq \chi\left(\tau^* \geq n\right).$$

A τ^* megállási idő, így

$$\left\{\varphi_n = 1\right\} = \left\{\tau^* \geq n\right\} = \left\{\tau^* \leq n-1\right\}^c \in \mathcal{F}_{n-1},$$

következésképpen a φ folyamat előrejelezhető. Nyilván

$$\begin{aligned} X_n^{\tau^*} - X_{n-1}^{\tau^*} &= X\left(\tau^* \wedge n\right) - X\left(\tau^* \wedge (n-1)\right) = \\ &= \chi\left(\tau^* \geq n\right)\left(X_n - X_{n-1}\right) = \\ &= \varphi_n\left(X_n - X_{n-1}\right). \end{aligned}$$

Mivel a τ^* az első olyan n, amelyre $H_n = X_n$, így a $\left\{\tau^* \geq n\right\}$ halmazon $X_{n-1} > H_{n-1}$.

Optimalitási kritérium

Mivel az indukciós formula szerint

$$X_{n-1} = \max\left(H_{n-1}, \mathbf{E}\left(X_n \mid \mathcal{F}_{n-1}\right)\right),$$

ezért a $\{\tau^* \geq n\}$ halmazon az első tag nem lehet "éles", így

$$X_{n-1} = \mathbf{E}\left(X_n \mid \mathcal{F}_{n-1}\right).$$

Következésképpen

$$\chi\left\{\tau^* \geq n\right\}\left(\mathbf{E}\left(X_n \mid \mathcal{F}_{n-1}\right) - X_{n-1}\right) = 0.$$

Így felhasználva, hogy a φ_n változó $\mathcal{F}_{n-1}$-mérhető

$$\begin{aligned}
\mathbf{E}\left(X_n^{\tau^*} - X_{n-1}^{\tau^*} \mid \mathcal{F}_{n-1}\right) &= \mathbf{E}\left(\varphi_n\left(X_n - X_{n-1}\right) \mid \mathcal{F}_{n-1}\right) = \\
&= \varphi_n \mathbf{E}\left(X_n - X_{n-1} \mid \mathcal{F}_{n-1}\right) = \\
&= \chi\left\{\tau^* \geq n\right\}\left(\mathbf{E}\left(X_n \mid \mathcal{F}_{n-1}\right) - X_{n-1}\right) = 0,
\end{aligned}$$

következésképpen az X^{τ^*} martingál.

Optimalitási kritérium

Az X_0 konstans, ugyanis a modell definíciója szerint $\mathcal{F}_0 = \{\emptyset, \Omega\}$, így az X^{τ^*} martingál tulajdonsága szerint

$$X_0 = X_0^{\tau^*} = \mathbf{E}\left(X_T^{\tau^*}\right) = \mathbf{E}\left(X\left(\tau^* \wedge T\right)\right) = \mathbf{E}\left(X_{\tau^*}\right) = \mathbf{E}\left(H_{\tau^*}\right),$$

ahol az utolsó egyenlőség a τ^* definíciója miatt teljesülő $X_{\tau^*} = H_{\tau^*}$ következménye. Mivel X_0 éppen az optimális megállítás problémájának megoldása a τ^* valóban egy optimális megállási idő.

Optimalitási kritérium

Általában az optimális megállási idő nem egyértelmű. Érvényes a következő karakterizáció:

Corollary

Ha $H \geq 0$, *akkor valamely* τ *megállási idő optimális a* H *kifizetés esetén pontosan akkor, ha*

1. $H(\tau) \overset{m.m.}{=} X(\tau)$
2. *az* X^{τ} *megállított folyamat martingál, ahol*

X *a* H *Snell-burkolója.*

Az egyik irány az előző állítás bizonyításának vége alapján világos: Ha az 1. és 2. feltételek teljesülnek, akkor a τ optimális.

Optimalitási kritérium

Csak azt kell belátni, hogy ha a τ optimális, akkor érvények az 1. és a 2. feltételek. Mivel az X dominálja a H kifizetést, vagyis mivel $H \leq X$, ezért tetszőleges ρ megállási idő esetén

$$H(\rho) \leq X(\rho).$$

Ha a τ optimális megállási idő, akkor a megállási opciókról szóló tétel alapján, felhasználva, hogy az X integrálható szupermartingál

$$X(0) = \mathbf{E}(H(\tau)) \leq \mathbf{E}(X(\tau)) \leq \mathbf{E}(X(0)) = X(0),$$

ami csak úgy teljesülhet, ha mindenhol egyenlőség van, következésképpen teljesül az első feltétel, vagyis $H(\tau) = X(\tau)$.

Optimalitási kritérium

Be akarjuk látni a második feltételt. Az X integrálható szupermartingál, így a megállási opciókról szóló tétel szerint a $\tau \wedge n \leq \tau$ miatt

$$X(0) \geq \mathbf{E}(X(\tau \wedge n)) \geq \mathbf{E}(X(\tau)) = \mathbf{E}(H(\tau)) = X(0),$$

ahol az utolsó lépésben felhasználtuk, hogy a már belátott első feltétel, illetve a τ optimalitása miatt

$$\mathbf{E}(X(\tau)) = \mathbf{E}(H(\tau)) = X(0).$$

Optimalitási kritérium

Tehát a becslésből következő egyenlőség és a torony szabály felhasználásával

$$\mathbf{E}\left(X\left(\tau \wedge n\right)\right) = \mathbf{E}\left(X\left(\tau\right)\right) = \mathbf{E}\left(\mathbf{E}\left(X\left(\tau\right) \mid \mathcal{F}_n\right)\right).$$

Az alábbi lemma alapján egy megállított szupermartingál szintén szupermartingál, így az X^τ szupermartingál. Ezt felhasználva

$$\begin{aligned} X\left(\tau \wedge n\right) &= X^\tau\left(n\right) \geq \mathbf{E}\left(X^\tau\left(T\right) \mid \mathcal{F}_n\right) = \\ &= \mathbf{E}\left(X\left(\tau \wedge T\right) \mid \mathcal{F}_n\right) = \mathbf{E}\left(X\left(\tau\right) \mid \mathcal{F}_n\right). \end{aligned}$$

Az első sor miatt az előző sorban valójában csak egyenlőség lehet, így

$$X_n^\tau = \mathbf{E}\left(X\left(\tau\right) \mid \mathcal{F}_n\right),$$

következésképpen az X^τ az $X\left(\tau\right)$ fix változó $\left(\mathcal{F}_n\right)$ szerinti feltételes várható értékeiből áll, így valóban martingál.

Corollary

A korábban definiált τ^* megállási idő a legkisebb optimális megállási idő.

A τ^* a legkisebb olyan megállási időpont, amelyre az első optimalitási kritérium teljesül.

Integrálható szubmartingálok

Lemma

Ha X egy integrálható szubmartingál és τ egy tetszőleges megállítási idő, akkor az X^{τ} megállított folyamat szintén integrálható szubmartingál.

Először megmutatjuk, hogy az X^{τ} integrálható. Szubmartingálok konvex, növekedő függvénye szubmartingál. Így ha az X szubmartingál, akkor az X^{+} is szubmartingál. Mivel a szubmartingálok pozitív része definíció szerint integrálható ezért az X^{+} egy tetszőleges szubmartingál esetén egy integrálható szubmartingál. A megállási opciókról szóló tétel miatt

$$\mathbf{E}\left(\left(X^{\tau}\right)^{+}(t)\right)=\mathbf{E}\left(X^{+}(\tau\wedge t)\right)\leq\mathbf{E}\left(X^{+}(t)\right)<\infty,$$

vagyis az $X^{\tau}(t)$ pozitív része integrálható. Az $X(0)$ integrálható, így a megállási opciókról szóló tétel miatt a várható érték monotonitása alapján

$$\mathbf{E}\left(X^{\tau}(t)\right)=\mathbf{E}\left(X(\tau\wedge t)\right)\geq\mathbf{E}\left(X(0)\right)>-\infty$$

így az $X^{\tau}(t)$ negatív része is integrálható, vagyis az $X^{\tau}(t)$ integrálható.

Integrálható szubmartingálok

Most mutassuk meg, hogy az X^{τ} szubmartingál. Vegyük az $s < t$ időpontokat. Ha $F \in \mathcal{F}_s$ és

$$\sigma(\omega) \circeq \begin{cases} s & \text{ha} \quad \omega \notin F \\ t & \text{ha} \quad \omega \in F \end{cases},$$

akkor a megállási opciókról szóló tétel és az $s \leq \sigma$ miatt

$$\mathbf{E}(X(\tau \wedge \sigma)) = \int_{F^c} X(\tau \wedge s)\, d\mathbf{P} + \int_F X(\tau \wedge t)\, d\mathbf{P} \geq \mathbf{E}(X(\tau \wedge s)).$$

Vagy ami ugyanaz

$$\int_F X(\tau \wedge t)\, d\mathbf{P} \geq \int_F X(\tau \wedge s)\, d\mathbf{P}.$$

Vagyis

$$\mathbf{E}(X^{\tau}(t) \mid \mathcal{F}_s) \geq X^{\tau}(s),$$

ami éppen a kívánt egyenlőtlenség.

Doob–Meyer felbontás

Térjünk rá az amerikai opciók árazási problémájára.

Theorem

Ha X integrálható szubmartingál, akkor van, mégpedig egyetlen olyan M martingál és A előrejelezhető, növekedő folyamat, hogy

$$X = M + A, \quad A_0 = 0.$$

Legyen $M_0 \circeq X_0$, $A_0 \circeq 0$, és

$$M_n \circeq X_0 + \sum_{j=0}^{n-1} \left(X_{j+1} - \mathbf{E}\left(X_{j+1} \mid \mathcal{F}_j\right)\right), \quad A_n \circeq \sum_{j=0}^{n-1} \left(\mathbf{E}\left(X_{j+1} \mid \mathcal{F}_j\right) - X_j\right).$$

Mivel az X_n változók integrálhatóak, ezért a feltételes várható értékek értelmesek és világos, hogy az M_n változók integrálhatóak. Könnyen látható, hogy $X = M + A$.

Doob–Meyer felbontás

$$
\begin{aligned}
\mathbf{E}\left(M_{n+1} \mid \mathcal{F}_n\right) &\circeq \mathbf{E}\left(X_0 + \sum_{j=0}^{n}\left(X_{j+1} - \mathbf{E}\left(X_{j+1} \mid \mathcal{F}_j\right)\right) \mid \mathcal{F}_n\right) = \\
&= \mathbf{E}\left(X_0 \mid \mathcal{F}_n\right) + \sum_{j=0}^{n} \mathbf{E}\left(X_{j+1} - \mathbf{E}\left(X_{j+1} \mid \mathcal{F}_j\right) \mid \mathcal{F}_n\right) = \\
&= X_0 + \sum_{j=0}^{n-1}\left(X_{j+1} - \mathbf{E}\left(X_{j+1} \mid \mathcal{F}_j\right)\right) + 0,
\end{aligned}
$$

így M martingál. Az X szubmartingál, így $\mathbf{E}\left(X_{j+1} \mid \mathcal{F}_j\right) - X_j \geq 0$ következésképpen az A_n $\mathcal{F}_{n-1}$-mérhető és növekedő.

Doob–Meyer felbontás

Megmutatjuk, hogy a felbontás egyértelmű. Ha $X_n = M'_n + A'_n$ egy másik felbontás, akkor

$$
\begin{aligned}
A'_{n+1} - A'_n &= \left(X_{n+1} - M'_{n+1}\right) - \left(X_n - M'_n\right) = \\
&= \left(X_{n+1} - X_n\right) - \left(M'_{n+1} - M'_n\right) = \\
&= \left(A_{n+1} - A_n\right) + \left(M_{n+1} - M_n\right) - \left(M'_{n+1} - M'_n\right).
\end{aligned}
$$

Ha az $\mathcal{F}_n$-szerint feltételes várható értéket veszünk, majd felhasználjuk, hogy az A és az A' előrejelezhető, valamint, hogy az M és az M' martingál

$$A'_{n+1} - A'_n = A_{n+1} - A_n + 0 - 0.$$

Mivel $A_0 = A'_0 = 0$, ezért minden n-re $A_n = A'_n$. Ezt felhasználva az $M_n = M'_n$ egyenlőség már evidens.

Szuperreplikáló portfolió létezése

Theorem

Ha a piac teljes és nincsen arbitrázs, akkor minden $H \geq 0$ kifizetés esetén az amerikai opciónak van ára és az ár éppen a kockázatsemleges mérték mellett értelmezett optimális megállítás feladatának optimális értékével azonos.

A feltételek miatt nincsen arbitrázs, így létezik $\mathbf{Q}$ martingálmérték. Legyen H a kifizetésekből álló folyamat. Jelölje X a H-hoz tartozó Snell-burkolót. Az X szupermartingál, és az alaptér véges atomossága miatt a $-X$ integrálható szubmartingál, tehát rendelkezik Doob–Meyer felbontással: $X = M - A$, ahol M martingál, $A \geq 0$, $A_0 = 0$. Mivel a modell teljes, ezért létezik olyan x^*, hogy a hozzá tartozó portfolió értékfolyamatára $V_T(x^*) = M_T$. A V lokális martingál a $\mathbf{Q}$ martingálmérték mellett. Mivel az M_T integrálható a $V(x^*)$ nem csak lokális martingál, hanem valódi martingál, tehát

$$V_n(x^*) = \mathbf{E}^{\mathbf{Q}}(V_T(x^*) \mid \mathcal{F}_n) = \mathbf{E}^{\mathbf{Q}}(M_T \mid \mathcal{F}_n) = M_n.$$

Szuperreplikáló portfolió létezése

Mivel $A_0 = 0$, és mivel létezik τ^* optimális megállási idő, ezért a megállási opciókról szóló tétel miatt

$$\begin{aligned} \mathbf{E}^{\mathbf{Q}}\left(V_{\tau^*}\left(x^*\right)\right) &= V_0\left(x^*\right) = M_0 = M_0 - A_0 = X_0 = \\ &= \max_{\tau} \mathbf{E}^{\mathbf{Q}}\left(H_\tau\right) = \mathbf{E}^{\mathbf{Q}}\left(H_{\tau^*}\right). \end{aligned}$$

és

$$\begin{aligned} V_n\left(x^*\right) &= M_n = \left(X_n + A_n\right) \geq \left(H_n + A_n\right) \geq \\ &\geq H_n, \end{aligned}$$

vagyis a $V\left(x^*\right)$ szuperreplikáló és az első egyenlőség miatt

$$V_{\tau^*}\left(x^*\right) \overset{m.m.}{=} H_{\tau^*}.$$

Szuperreplikáló portfolió létezése

Természetesen a szuperreplikálás és a megállítás időpontjában való majdnem mindenhol való egyezés a $\mathbf{Q}$ mérték mellett majdnem mindenhol teljesül. De mivel a $\mathbf{P}$ és a $\mathbf{Q}$ ekvivalensek ezért a relációk az eredeti „statisztikai" mérték esetén is teljesülnek. Miként a bevezetőben elmondtuk, ilyenkor a H ára éppen x^{*}.

Mégegyszer a diszkontálásról

Hangsúlyozni kell, hogy a H kifizetésen, illetve az S alaptermékeken általában a diszkontált folyamatokat értjük. Vagyis az optimális megállítási problémát a diszkontált értékfolyamatra kell megoldani. A modell közgazdaságilag csak így értelmes. Ugyanakkor matematikai szempontból a feladat akkor is megoldható, ha portfolióként közvetlenül a „sztochasztikus integrálokat" tekintjük és az első és második alaptételt közvetlenül az alaptermékekre alkalmazzuk. Ilyenkor természetesen a H kifizetést nem kell diszkontálni. Matematikai szempontból csak az a lényeg, hogy az M felírható legyen replikáló portfolióként.

Az utolsó optimális megállítási idő

Vegyük észre, hogy az előző állításban nem használtuk ki, hogy a Doob–Meyer felbontásban szereplő A előrejelezhető. Erre az alábbiakban lesz szükségünk. A Doob–Meyer felbontás segítségével további optimális megállási időket is meghatározhatunk.

Definition

Legyen $H \geq 0$ tetszőleges és legyen X a H Snell-burkolója. Legyen $X = M - A$ az X Doob–Meyer felbontása. Legyen

$$\tau^{**}(\omega) \doteq \begin{cases} T & \text{ha} \quad A_T(\omega) = 0 \\ \min\{n : A_{n+1}(\omega) > 0\} & \text{ha} \quad A_T(\omega) > 0 \end{cases}.$$

Az utolsó optimális megállítási idő

Theorem

A τ^{**} a H egy optimális megállási ideje. A τ^{**} az utolsó optimális megállási idő.

Mivel az A előrejelezhető, ezért az A_{n+1} változó $\mathcal{F}_n$-mérhető, így

$$\{\tau^{**} = n\} = \cap_{k \leq n} \{A_k = 0\} \cap \{A_{n+1} > 0\} \in \mathcal{F}_n$$

tehát a τ^{**} megállási idő. A τ^{**} optimalitását az optimalitási kritérium segítségével fogjuk igazolni. Nyilván $A^{\tau^{**}} = 0$, tehát

$$X^{\tau^{**}} = M^{\tau^{**}} - A^{\tau^{**}} = M^{\tau^{**}}.$$

Az M martingál, minden megállított martingál martingál, tehát az $X^{\tau^{**}}$martingál, így a második feltétel teljesül.

Megmutatjuk, hogy $X(\tau^{**}) = H(\tau^{**})$.

$$\begin{aligned} X(\tau^{**}) &= \sum_{k=0}^{T-1} \chi(\tau^{**} = k) X_k + \chi(\tau^{**} = T) X_T = \\ &= \sum_{k=0}^{T-1} \chi(\tau^{**} = k) \max(H_k, \mathbf{E}(X_{k+1} \mid \mathcal{F}_k)) + \chi(\tau^{**} = T) H_T. \end{aligned}$$

Mivel az A előrejelezhető és az M martingál, ezért

$$\mathbf{E}(X_{k+1} \mid \mathcal{F}_k) = \mathbf{E}(M_{k+1} - A_{k+1} \mid \mathcal{F}_k) = M_k - A_{k+1}.$$

A $\{\tau^{**} = k\}$ halmazon $A_k = 0$ miközben $A_{k+1} > 0$, így ezen a halmazon

$$\mathbf{E}(X_{k+1} \mid \mathcal{F}_k) = M_k - A_{k+1} < M_k - A_k = X_k,$$

így a $\{\tau^{**} = k\}$ halmazon

$$X_k = \max(H_k, \mathbf{E}(X_{k+1} \mid \mathcal{F}_k)) = H_k$$

következésképpen $X_{\tau^{**}} = H_{\tau^{**}}$, amely éppen az első feltétel.

Az utolsó optimális megállítási idő

Végül megmutatjuk, hogy a τ^{**} az utolsó optimális megállási idő. Legyen τ egy optimális megállási idő és tegyük fel, hogy egy pozitív mértékű halmazon $\tau > \tau^{**}$. Ezen a halmazon az $A(\tau)$ pozitív. Mivel $A \geq 0$, ezért $\mathbf{E}(A(\tau)) > 0$, így a megállási opciókról szóló tétel szerint

$$\begin{aligned} \mathbf{E}(H(\tau)) &\leq \mathbf{E}(X(\tau)) = \mathbf{E}(M(\tau)) - \mathbf{E}(A(\tau)) < \\ &< \mathbf{E}(M(\tau)) = \mathbf{E}(M(0)) = \mathbf{E}(X(0)) = X(0), \end{aligned}$$

tehát a τ nem lehet optimális.