

# Néhány nevezetes eloszlás

## Transzformált valószínűségi változók

Medvegyev Péter

2011

# Alapelv, integráltranszformációs tétel

Egy dimenzióban az

$$\int_{g(a)}^{g(b)} f(x) dx = \int_a^b f(g(y)) g'(y) dy$$

helyettesítési formula a Newton–Leibniz formula közvetlen folyománya. Mivel többdimenzióban a formula nem érvényes, ezért némiképpen át kell írni. Ha a  $g$  monoton nő, akkor mivel  $g([a, b]) = [g(a), g(b)]$ , ezért

$$\int_{g([a,b])} f(x) dx = \int_{g(a)}^{g(b)} f(x) dx = \int_a^b f(g(y)) |g'(y)| dy,$$

ha monoton csökken, akkor  $g([a, b]) = [g(b), g(a)]$

$$\int_{g([a,b])} f(x) dx = - \int_{g(a)}^{g(b)} f(x) dx = \int_a^b f(g(y)) |g'(y)| dy.$$

# Alapelv, integráltranszformációs tétel

$\mathbb{R}^n$  esetén a második megfogalmazás használható.

## Theorem

*Legyen  $U \subseteq \mathbb{R}^n$  egy nyílt halmaz és  $T : U \rightarrow \mathbb{R}^n$  egy invertálható és folytonosan differenciálható leképezés. Ekkor tetszőleges  $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$ ,  $B \subseteq U$  esetén*

$$\int_{T(B)} f(x) d\lambda_n(x) = \int_B f(T(y)) |\det(T'(y))| d\lambda_n(y),$$

*ahol  $T'(y)$  a  $T$  parciális deriváltjaiból álló Jacobi-mátrix és ahol  $\lambda_n$  szokásos a téglatestek térfogata által generált úgynevezett Lebesgue-mérték.*

# Alapelv, integráltranszformációs tétel

A tételben a leginkább meglepő elem, hogy miként kerül az integráltranszformációs tételbe a Jacobi-determináns. Ezt a következő némiképpen elnagyolt gondolatmenettel indokolhatjuk: Jelölje  $\text{vol}(B)$  valamely  $B \subseteq \mathbb{R}^n$  halmaz "térfogatát". Megmutatjuk, hogy ekkor tetszőleges  $\mathbf{A}$  lineáris leképezésre igaz a következő:

$$\lambda_n(\mathbf{A}B) \stackrel{\circ}{=} \text{vol}(\mathbf{A}B) = |\det(\mathbf{A})| \text{vol}(B) \stackrel{\circ}{=} |\det(\mathbf{A})| \lambda_n(B).$$

# Alapelv, integráltranszformációs tétel

A térfogat pontos tartalmát a mértékelmélet keretében szokás tisztázni, mi a következő feltételezésekkel élünk:

1. Az egységkocka térfogata 1, illetve tetszőleges téglatest térfogata az oldalak hosszának szorzata.
2. A térfogat invariáns a forgatásra és az eltolásra nézve.
3. A térfogat homogén abban az értelemben, hogy tetszőleges  $\alpha > 0$  szám esetén ha valamelyik koordinátát  $\alpha$ -val megszorozunk, akkor a térfogat is  $\alpha$ -val nő. Így többek között minden  $\alpha > 0$  esetén  $\text{vol}(\alpha B) = \alpha^n \text{vol}(B)$ , illetve, ha  $\Lambda$  egy diagonális mátrix, akkor  $\text{vol}(\Lambda B) = \lambda_1 \lambda_2 \cdots \lambda_n \text{vol}(B)$ , ahol  $\lambda_j$  a  $\Lambda$  diagonálisában levő elemek.

## Alapelv, integráltranszformációs tétel

Egyedül az utolsó tulajdonság nem tűnik evidensnek. Indoklása a következő: Nyilván a tulajdonság igaz koordináta irányú téglatestekre. Ebből következően igaz véges számú ilyen téglatest diszjunkt egyesítésére is. Ezeket a halmazokat szokás elemi halmazoknak nevezni. Elemi halmazok, metszete, egyesítése, illetve komplementere elemi halmaz, vagyis az elemi halmazok algebrát alkotnak, de nem alkotnak  $\sigma$ -algebrát. Ahhoz, hogy a térfogat használható fogalom legyen ki kell terjeszteni. Szemléletesen a térfogat fogalma olyan halmazokra használható, amelyek valamiképpen elemi halmazokkal jól közelíthetők. Ilyen közelítés például ha a halmaz elemi halmazok megszámlálható sorozatának monoton csökkenő metszete, vagy monoton növekedő egyesítése. A pontos részletek elmagyarázása messze vezetne, illetve a mértékelméleti tárgyalást igényel. (Egész pontosan a mértékelmélet egyik célja pontosan annak indoklása, hogy a térfogat fogalma egyértelműen kiterjeszthető egy az elemi halmazokat tartalmazó  $\sigma$ -algebrára.)

## Alapelv, integráltranszformációs tétel

A közvetlen szemlélet alapján is viszonylag könnyen elfogadható azonban, hogy a "szokásos" halmazok jól közelíthetők elemi halmazokkal, így a térfogat fogalma, a fenti tulajdonságokkal alkalmazható rájuk.

Érdemes megjegyezni, hogy a forgatásinvariancia gömbök esetén nyilvánvaló, a homogenitás pedig koordináta irányú téglatestek esetén nyilvánvaló. A fenti tulajdonságok indoklásához többek között azt is indokolni kell, hogy a téglatestek elforgatásakor a térfogatuk nem változik, vagy hogy a gömbök koordináta irányú nyújtásakor a térfogat a fenti homogén módon alakul. Vagyis, hogy a térfogat két alaptulajdonsága más és más "elemi" halmazok esetén nyilvánvaló, és amit indokolni kell, az az, hogy egyrészt van közös általánosítás, másrészt a megfelelő tulajdonságok egyszerre öröklődnek.

# Alapelv, integráltranszformációs tétel

A determinánsos képlet triviálisan teljesül, ha az  $\mathbf{A}$  oszlopai összefüggnek, ugyanis ilyenkor a determináns nulla, és mivel az  $\mathbf{AB}$  az  $\mathbb{R}^n$  egy valódi alterébe esik

$$\text{vol}(\mathbf{AB}) = 0 = |\det(\mathbf{A})| \text{vol}(B).$$

Az általános eset a komplex számok  $z = r \exp(i\varphi)$  felbontásának általánosításának tekinthető poláris felbontás következménye:

## Lemma

*Ha  $\mathbf{A}$  egy invertálható mátrix, akkor az  $\mathbf{A}$  felbontható  $\mathbf{A} = \mathbf{RU}$  alakba, ahol az  $\mathbf{R}$  pozitív definit, az  $\mathbf{U}$  pedig ortonormált.*



## Alapelv, integráltranszformációs tétel

Az  $\mathbf{AA}^T$  mátrix szimmetrikus és pozitív definit, így  $\mathbf{O}\Lambda\mathbf{O}^T$  alakba írható, ahol az  $\mathbf{O}$  az  $\mathbf{AA}^T$  sajátvektoraiból álló ortonormált mátrix,  $\Lambda$  a sajátértékeket tartalmazó diagonális mátrix. Mivel a  $\Lambda \geq 0$ , ezért az  $\mathbf{R} \doteq \mathbf{O}\sqrt{\Lambda}\mathbf{O}^T$  definíció értelmes. Értelmszerűen a gyökjel a  $\Lambda$  elemeire értendő. Az  $\mathbf{R}$  invertálható és elegendő igazolni, hogy az  $\mathbf{U} \doteq \mathbf{R}^{-1}\mathbf{A}$  mátrix ortonormált. Szimmetrikus mátrix inverze is szimmetrikus, így

$$\begin{aligned}\mathbf{UU}^T &= \mathbf{R}^{-1}\mathbf{A}(\mathbf{R}^{-1}\mathbf{A})^T = \mathbf{R}^{-1}\mathbf{AA}^T(\mathbf{R}^{-1})^T = \mathbf{R}^{-1}\mathbf{AA}^T\mathbf{R}^{-1} = \\ &= \mathbf{R}^{-1}\mathbf{O}\Lambda\mathbf{O}^T\mathbf{R}^{-1} = \mathbf{R}^{-1}\mathbf{O}\sqrt{\Lambda}\mathbf{I}\sqrt{\Lambda}\mathbf{O}^T\mathbf{R}^{-1} = \\ &= \mathbf{R}^{-1}\mathbf{O}\sqrt{\Lambda}(\mathbf{O}^T\mathbf{O})\sqrt{\Lambda}\mathbf{O}^T\mathbf{R}^{-1} \\ &= (\mathbf{R}^{-1}\mathbf{O}\sqrt{\Lambda}\mathbf{O}^T)(\mathbf{O}\sqrt{\Lambda}\mathbf{O}^T\mathbf{R}^{-1}) = \\ &= (\mathbf{R}^{-1}\mathbf{R})(\mathbf{R}\mathbf{R}^{-1}) = \mathbf{I}.\end{aligned}$$

## Alapelv, integráltranszformációs tétel

A poláris felbontással és a térfogat alaptulajdonságaival a determinánsos formula már egyszerűen igazolható. (Vegyük észre, hogy mivel az ortonormált mátrixok nem módosítják a skaláris szorzatot, ezért nem módosítják a vektorok hosszát sem, vagyis definíció szerint forgatások, így nem módosítják a térfogatot.) Ha az  $\mathbf{A}$  invertálható, akkor

$$\begin{aligned}\operatorname{vol}(\mathbf{A}B) &= \operatorname{vol}(\mathbf{R}UB) = \operatorname{vol}(\mathbf{R}(\mathbf{U}B)) = \\ &= \operatorname{vol}(\mathbf{R}B) = \operatorname{vol}(\mathbf{O}\sqrt{\Lambda}\mathbf{O}^T B) = \\ &= \operatorname{vol}(\mathbf{O}\sqrt{\Lambda}B) = \sqrt{\prod_{i=1}^n \lambda_i} \operatorname{vol}(\mathbf{O}B) = \sqrt{\prod_{i=1}^n \lambda_i} \operatorname{vol}(B) = \\ &= \sqrt{\det(\mathbf{R}\mathbf{R}^T)} \operatorname{vol}(B) = \sqrt{\det(\mathbf{R}) \det(\mathbf{R}^T)} \operatorname{vol}(B) = \\ &= \sqrt{\det(\mathbf{R}) \det(\mathbf{R})} \operatorname{vol}(B) = |\det(\mathbf{R})| \operatorname{vol}(B) = \det(\mathbf{R}) \operatorname{vol}(B).\end{aligned}$$

# Alapelv, integráltranszformációs tétel

Az  $\mathbf{U}$  mátrix ortonormált, ezért

$$1 = \det(\mathbf{I}) = \det(\mathbf{UU}^T) = \det(\mathbf{U}) \det(\mathbf{U}^T) = \det(\mathbf{U})^2$$

így  $\det(\mathbf{U}) = \pm 1$ . Ebből következően, felhasználva, hogy az  $\mathbf{R}$  pozitív definit, így a determinánása pozitív

$$\begin{aligned} \text{vol}(\mathbf{AB}) &= |\det(\mathbf{R}) \det(\mathbf{U})| \text{vol}(\mathbf{B}) = \\ &= |\det(\mathbf{RU})| \text{vol}(\mathbf{B}) = |\det(\mathbf{A})| \text{vol}(\mathbf{B}) \end{aligned}$$

## Alapelv, integráltranszformációs tétel

A determinánsos képlet alapján a tétel "indoklása" a következő:  
Tekintsük a  $B$  halmaz egy  $(V_i^{(k)})$  partícióját. Az invertálhatóság miatt ez a  $T(B)$  halmazon egy  $U_i^{(k)} \doteq T(V_i^{(k)})$  partíciót definiál. Az integrál definíciója szerint

$$\int_{T(B)} f(x) dx \approx \sum_i f(x_i) \text{vol}(U_i^{(k)}) = \sum_i f(T(y_i)) \text{vol}(U_i^{(k)}),$$

ahol  $x_i \in U_i^{(k)}$  és  $x_i = T(y_i)$  és  $y_i \in V_i^{(k)}$ . A bizonyítás lényege, hogy ha a  $V_i^{(k)}$  elég "kicsi", akkor a  $T$  a  $V_i^{(k)}$  halmazon jól közelíthető a deriváltjával.

## Alapelv, integráltranszformációs tétel

Ezért, felhasználva az eltolásinvarienciát

$$\begin{aligned}\operatorname{vol}\left(U_i^{(k)}\right) &= \operatorname{vol}\left(T\left(V_i^{(k)}\right)\right) = \\ &= \operatorname{vol}\left(T\left(y_i\right)+T'\left(y_i\right)\left(V_i^{(k)}-y_i\right)+o\left(\left\|V_i^{(k)}-y_i\right\|\right)\right) \approx \\ &\approx \operatorname{vol}\left(T\left(y_i\right)+T'\left(y_i\right)\left(V_i^{(k)}-y_i\right)\right) = \operatorname{vol}\left(T'\left(y_i\right)\left(V_i^{(k)}\right)\right) = \\ &= \left|\det\left(T'\left(y_i\right)\right)\right| \operatorname{vol}\left(V_i^{(k)}\right).\end{aligned}$$

## Alapelv, integráltranszformációs tétel

Így

$$\begin{aligned}\int_{T(B)} f(x) dx &\approx \sum_i f(T(y_i)) |\det(T'(y_i))| \text{vol}(V_i^{(k)}) \approx \\ &\approx \int_B f(T(y)) |\det(T'(y))| dy.\end{aligned}$$

## Alapelv, integráltranszformációs tétel

A bizonyítás során garantálni kell egyrészt, hogy a  $(V_i^{(k)})$  és az  $(U_i^{(k)})$  partíciók egyszerre legyenek infinitezimálisak, ha  $k \rightarrow \infty$ , másrészt hogy a másodrendű  $\text{vol} \left( o \left( \left\| V_i^{(k)} - y_i \right\| \right) \right)$  hibák elhagyása során a hibák összege is nullához tart. Az első a folytonos deriválhatóságból következik, ugyanis a folytonosság miatt a deriváltak a kompakt halmazokon korlátosak, így alkalmas  $K$ -ra, legalább a kompakt halmazokon  $\|T(x) - T(y)\| \leq K \|x - y\|$ . A második tulajdonság abból következik, hogy ha a  $V_i^{(k)}$  helyett  $\alpha V_i^{(k)}$ -t veszünk, például minden oldalt felezünk, akkor a térfogat  $\alpha^n \text{vol} (V_i^{(k)})$  lesz. Ugyanakkor ilyenkor  $1/\alpha^n$ -szeresére nő a partícióban levő halmazok száma. Összességében tehát az összeg továbbra is nullához fog tartani.

## Alapelv, integráltranszformációs tétel

Ha  $(\xi_k)_{k=1}^n$  az  $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$  téren értelmezett valószínűségi változók, és  $g$  az  $\mathbb{R}^n$  téren értelmezett Borel-mérhető függvény, akkor az

$$\eta \doteq g(\xi_1, \dots, \xi_n)$$

összefüggéssel definiált függvény szintén  $\mathcal{A}$ -mérhető, vagyis valószínűségi változó. Hogyan lehet meghatározni az  $\eta$  eloszlását?

### Theorem

*Ha a  $(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n)$  vektor együttes sűrűségfüggvénye  $f$ , és valamely  $h$  függvényre minden  $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$  halmazra*

$$\int_B h d\lambda = \int_{g^{-1}(B)} f d\lambda_n,$$

*akkor a  $h$  éppen az  $\eta \doteq g(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n)$  sűrűségfüggvénye.*



## Alapelv, integráltranszformációs tétel

**Bizonyítás:** Emlékeztetünk, hogy definíció szerint egy  $u : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}_+$  valamely  $\zeta$  vektorváltozó sűrűségfüggvénye, ha minden  $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$  esetén

$$\int_B u d\lambda_n = \mathbf{P}(\zeta \in B),$$

ahol  $\lambda_n$  jelöli az  $\mathbb{R}^n$ -en értelmezett szokásos mértéket, vagyis az úgynevezett Lebesgue-mértéket. Ha  $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ , akkor mivel  $f$  a  $(\zeta_1, \dots, \zeta_n)$  sűrűségfüggvénye, ezért

$$\begin{aligned} \int_B h d\lambda &= \int_{g^{-1}(B)} f d\lambda_n = \\ &= \mathbf{P}((\zeta_1, \zeta_2, \dots, \zeta_n) \in g^{-1}(B)) = \\ &= \mathbf{P}(g(\zeta_1, \zeta_2, \dots, \zeta_n) \in B) \stackrel{\circ}{=} \mathbf{P}(\eta \in B). \end{aligned}$$

# Alapelv, integráltranszformációs tétel

## Theorem

Ha  $f$  a  $(\xi_1, \dots, \xi_k)$  vektor sűrűségfüggvénye,

$$(\eta_1, \dots, \eta_k) \stackrel{\circ}{=} \varphi(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_k),$$

és a  $\varphi^{-1}$  függvény létezik és differenciálható, akkor az  $(\eta_1, \dots, \eta_k)$  sűrűségfüggvénye

$$h(x_1, \dots, x_k) \stackrel{\circ}{=} f(\varphi^{-1}(x_1, \dots, x_n)) \left| \det \left( \frac{d}{dx} \varphi^{-1}(x_1, \dots, x_n) \right) \right|.$$

# Alapelv, integráltranszformációs tétel

**Bizonyítás:** A többdimenziós integrál transzformációs tétel alapján minden  $B$  Borel-halmazra

$$\begin{aligned} & \mathbf{P}((\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_n) \in B) \stackrel{\circ}{=} \\ & \stackrel{\circ}{=} \mathbf{P}((\varphi_1(\xi_1, \dots, \xi_n), \dots, \varphi_n(\xi_1, \dots, \xi_n)) \in B) \\ & = \mathbf{P}((\xi_1, \dots, \xi_n) \in \varphi^{-1}(B)) = \int_{\varphi^{-1}(B)} f d\lambda_n = \\ & = \int_{T(B)} f d\lambda_n = \int_B f(T) |\det(T')| d\lambda_n, \end{aligned}$$

feltéve persze, hogy a tétel feltételei teljesülnek, vagyis a  $T \stackrel{\circ}{=} \varphi^{-1}$  létezik és differenciálható. Vagyis  $f(T) |\det(T')|$  az  $(\eta_k)$  vektor sűrűségfüggvénye.

# Alapelv, integráltranszformációs tétel

## Example

Határozzuk meg az összeg, a szorzat és a hányados sűrűségfüggvényét.

# Összeg sűrűségfüggvénye

1. Összeg: Ilyenkor

$$\begin{aligned}\varphi(x, y) &= (x + y, y) \stackrel{\circ}{=} (u, v). \\ \varphi^{-1}(u, v) &= (u - v, v) = (x, y).\end{aligned}$$

Feltéve, hogy a  $\xi$  sűrűségfüggvénye  $h$  az  $\eta$  sűrűségfüggvénye  $g$ . A feltételezett függetlenség miatt a  $(\xi, \eta)$  sűrűségfüggvénye  $f(x, y) = h(x)g(y)$ . A  $(\xi + \eta, \eta)$  sűrűségfüggvénye

$$\begin{aligned}f(T) |\det(T')| &= h(u - v)g(v) \left| \det \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right| = \\ &= h(u - v)g(v),\end{aligned}$$

A  $\xi + \eta$  eloszlása az első peremeloszlás, vagyis a  $\xi + \eta$  sűrűségfüggvénye

$$\int_{-\infty}^{\infty} h(u - v)g(v) dv.$$

Ha nem függetlenek, akkor az összeg sűrűségfüggvénye

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(u - v, v) dv$$

## Összeg sűrűségfüggvénye

$w = u - v$  helyettesítéssel

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(u - v, v) dv = \int_{\infty}^{-\infty} f(w, u - w) (-1) dw = \int_{-\infty}^{\infty} f(w, u - w) dw$$

amely egybevág avval, hogy az összeadás kommutatív.

# Szorzat sűrűségfüggvénye

2. Szorzat. Ilyenkor

$$\begin{aligned}\varphi(x, y) &= (xy, y) \stackrel{\circ}{=} (u, v). \\ \varphi^{-1}(u, v) &= (u/v, v) = (x, y).\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}f(T) |\det(T')| &= h(u/v) g(v) \left| \det \begin{pmatrix} 1/v & -u/v^2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right| = \\ &= h(u/v) g(v) \frac{1}{|v|},\end{aligned}$$

A  $\zeta\eta$  eloszlása az első peremeloszlás, vagyis a  $\zeta\eta$  sűrűségfüggvénye

$$\int_{-\infty}^{\infty} h\left(\frac{u}{v}\right) g(v) \frac{1}{|v|} dv.$$

Ha nem függetlenek, akkor  $\int_{-\infty}^{\infty} f\left(\frac{u}{v}, v\right) \frac{1}{|v|} dv$

## Szorzat sűrűségfüggvénye

$w = u/v$  helyettesítéssel

$$v = \frac{u}{w}, \frac{dv}{dw} = -\frac{u}{w^2}, \Rightarrow dv = -\frac{u}{w^2} dw$$

Ha az  $u$  pozitív, akkor a  $(0, \infty)$  ráképződik a  $(\infty, 0)$ -ra illetve a  $(-\infty, 0)$  a  $(0, -\infty)$  re képződik. Ezért a határokat fel kell cserélni.

Ilyenkor  $u = |u|$  és ezért

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} f\left(\frac{u}{v}, v\right) \frac{1}{|v|} dv &= - \int_{-\infty}^{\infty} f\left(w, \frac{u}{w}\right) \frac{|w|}{|u|} \left(-\frac{u}{w^2}\right) dw = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} f\left(w, \frac{u}{w}\right) \frac{1}{|w|} dw \end{aligned}$$

Ha az  $u$  negatív a  $(0, \infty)$  ráképződik a  $(-\infty, 0)$ -ra illetve a  $(-\infty, 0)$  a  $(0, \infty)$  re képződik. Ilyenkor  $|u| = -u$

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} f\left(\frac{u}{v}, v\right) \frac{1}{|v|} dv &= \int_{-\infty}^{\infty} f\left(w, \frac{u}{w}\right) \frac{|w|}{|u|} \left(-\frac{u}{w^2}\right) dw = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} f\left(w, \frac{u}{w}\right) \frac{1}{|w|} dw. \end{aligned}$$



# Hányados sűrűségfüggvénye

3. Hányados. Ilyenkor

$$\begin{aligned}\varphi(x, y) &= (x/y, y) \doteq (u, v). \\ \varphi^{-1}(u, v) &= (u \cdot v, v) = (x, y).\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}f(T) |\det(T')| &= h(u \cdot v) g(v) \left| \det \begin{pmatrix} v & u \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right| = \\ &= h(u \cdot v) g(v) |v|,\end{aligned}$$

A  $\xi/\eta$  eloszlása az első peremeloszlás, vagyis a  $\xi/\eta$  sűrűségfüggvénye

$$\int_{-\infty}^{\infty} h(uv) g(v) |v| dv.$$

Ha nem függetlenek, akkor  $\int_{-\infty}^{\infty} f(uv, v) |v| dv$ .

# Hányados sűrűségfüggvénye

$w = uv$  helyettesítéssel, ha  $u$  pozitív, akkor a határokat nem kell módosítani

$$\frac{dw}{dv} = u \Rightarrow dv = \frac{dw}{u}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(uv, v) |v| dv = \int_{-\infty}^{\infty} f\left(w, \frac{w}{u}\right) \left|\frac{w}{u}\right| \frac{dw}{u}$$

ami egybevág avval, hogy az osztás nem kommutatív.

## Valószínűségi változók szimulálása

Ha a  $\xi$  eloszlása egyenletes a  $[0, 1]$  intervallumon és  $\eta \stackrel{\circ}{=} F^{-1}(\xi)$ , ahol  $F$  egy folytonos, szigorúan monoton növekedő eloszlásfüggvény, akkor

$$\mathbf{P}(\eta < x) = \mathbf{P}(F^{-1}(\xi) < x) = \mathbf{P}(\xi < F(x)) = F(x),$$

vagyis az  $\eta$  eloszlásfüggvénye  $F$ . Megfordítva, ha az  $\eta$  eloszlásfüggvénye  $F$ , és  $0 < x < 1$ , akkor

$$\mathbf{P}(F(\eta) < x) = \mathbf{P}(\eta < F^{-1}(x)) = F(F^{-1}(x)) = x,$$

vagyis ilyenkor az  $F(\eta)$  eloszlása egyenletes.

# Valószínűségi változók szimulálása

## Example

Exponenciális eloszlású változó generálása.

$F(x) = 1 - \exp(-\lambda x)$ . Ebből

$$F^{-1}(y) = -\lambda^{-1} \ln(1 - y).$$

Mivel ha  $\zeta$  egyenletes a  $[0, 1]$ -en, akkor az  $1 - \zeta$  is az, így az

$$\eta \stackrel{\circ}{=} -\lambda^{-1} \ln \zeta$$

eloszlása  $\lambda$  paraméterű exponenciális.

# Valószínűségi változók szimulálása

## Example

Cauchy-eloszlású változó szimulálása

Ha  $\eta$  egy Cauchy-eloszlású valószínűségi változó, akkor az  $\eta$  sűrűségfüggvénye

$$f(x) = \frac{1}{\pi(1+x^2)}.$$

Ebből az eloszlásfüggvénye

$$\begin{aligned} F(x) &= \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^x \frac{1}{1+t^2} dt = [\arctan]_{-\infty}^x = \frac{1}{\pi} \left( \arctan x + \frac{\pi}{2} \right) = \\ &= \frac{1}{\pi} \arctan x + \frac{1}{2}, \end{aligned}$$

$$F^{-1}(y) = \tan \pi \left( y - \frac{1}{2} \right),$$

vagyis ha a  $\xi$  egyenletes a  $[0, 1]$  szakaszon, akkor az  $\eta \stackrel{\circ}{=} \tan \pi (\xi - 1/2)$  Cauchy-eloszlású.

# Valószínűségi változók szimulálása

## Example

Standard normális eloszlású valószínűségi változó szimulálása.

Az előzőek alapján kézenfekvőnek látszik, hogy az  $N(0, 1)$  változók szimulálására a  $\Phi^{-1}(y)$  függvényt használjuk. Azonban ennek kiszámolása bonyolult, így ritkán használatos. Az itt bemutatott módszert szokás Box–Müller módszernek is mondani.

## Theorem

*Ha  $\delta_1, \delta_2$  független, a  $(0, 1)$  intervallumon egyenletes eloszlású változók, akkor a*

$$\xi \stackrel{\circ}{=} \sqrt{-2 \ln \delta_1} \cos(2\pi\delta_2), \quad \eta \stackrel{\circ}{=} \sqrt{-2 \ln \delta_1} \sin(2\pi\delta_2)$$

*változók függetlenek, és  $\xi \cong \eta \cong N(0, 1)$ .*

## Valószínűségi változók szimulálása

**Bizonyítás:** A módszer igazolása céljából vegyünk két független  $N(0, 1)$  változót, és a  $(\zeta, \eta)$  párt tekintsük az  $\mathbb{R}^2$  sík véletlenül kiválasztott pontjának.

$$\begin{aligned} f(x, y) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{x^2}{2}\right) \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{y^2}{2}\right) = \\ &= \frac{1}{2\pi} \exp\left(-\frac{1}{2}(x^2 + y^2)\right). \end{aligned}$$

Mi történik, ha  $(\rho, \varphi)$  polárkoordinátákra térünk át? Legyen

$$T(\rho, \varphi) \stackrel{\circ}{=} \rho(\cos \varphi, \sin \varphi) = (\zeta, \eta)$$

a polárkoordinátákról való visszatérést megadó inverz leképezés. A  $T$  az origón kívül, vagyis a  $\rho > 0$  tartományon injektív, és az origótól eltekintve teljesíti az integráltranszformációs tétel feltételeit.

$$|\det(T')| = \left| \det \begin{pmatrix} \cos \varphi & -\rho \sin \varphi \\ \sin \varphi & \rho \cos \varphi \end{pmatrix} \right| = \rho.$$

## Valószínűségi változók szimulálása

A már bemutatott módon a polárkoordinátákban a sűrűségfüggvény

$$s(r, t) = f(T) |\det(T')| = \frac{1}{2\pi} \exp\left(-\frac{r^2}{2}\right) r = g(r) h(t),$$

ahol

$$g(r) \stackrel{\circ}{=} r \exp\left(-\frac{r^2}{2}\right), \quad r > 0,$$

$$h(t) \stackrel{\circ}{=} \frac{1}{2\pi}, \quad t \in (0, 2\pi),$$

vagyis a polárkoordináták is függetlenek, a  $\varphi$  szög a  $(0, 2\pi)$  intervallumban egyenletes eloszlású, a  $\rho$  sugár eloszlásának sűrűségfüggvénye pedig

$$g(r) = r \exp(-r^2/2).$$



## Valószínűségi változók szimulálása

A gondolatmenet megfordítható: ha a  $(\rho, \varphi)$  pár eloszlása éppen ilyen, akkor a  $(\xi, \eta)$  két független normális eloszlást definiál. Normális eloszlású változók szimulálása tehát visszavezethető egy egyenletes, és egy  $r \exp(-r^2/2)$  sűrűségfüggvényű változó szimulálására. Ha a  $\delta$  a  $(0, 1)$  intervallumon egyenletes eloszlású, akkor a  $\rho \stackrel{\circ}{=} \sqrt{-2 \ln \delta}$  eloszlása

$$\mathbf{P}(\rho < r) = \mathbf{P}\left(\delta > \exp\left(-\frac{1}{2}r^2\right)\right) = 1 - \exp\left(-\frac{1}{2}r^2\right),$$

amely sűrűségfüggvénye éppen az  $r \exp(-r^2/2)$ .

## Khi-négyzet eloszlás

Az  $n$  szabadságfokú  $\chi_n^2$  változót mint  $n$  darab független, standard normális eloszlású változó négyzetének összegét definiáljuk. A  $\chi_n^2$  eloszlását  $\chi_n^2$  eloszlásnak mondjuk. Ha  $n = 1$ , akkor, miként már láttuk, a  $\chi_1^2 \cong N(0, 1)^2$  sűrűségfüggvénye  $\Gamma(1/2, 1/2)$

$$k_1(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi x}} \exp\left(-\frac{x}{2}\right), \quad x > 0.$$

Az általános esetben  $\Gamma(n/2, n/2)$

$$k_n(x) = \frac{1}{2^{n/2} \Gamma(n/2)} x^{n/2-1} \exp\left(-\frac{x}{2}\right), \quad x > 0.$$

amely a gamma eloszlás additív tulajdonsága miatt evidens.

A várható értéket és a szórás

$$\mathbf{E}(\chi_n^2) = n\mathbf{E}(\chi_1^2) = n, \quad \mathbf{D}^2(\chi_n^2) = n\mathbf{D}^2(\chi_1^2) = n(3 - 1) = 2n.$$

## Khi- eloszlás

A  $\chi_n^2$  -ből gyökvonással

$$\begin{aligned}h_n(x) &= k_n(x^2) 2x = \frac{(x^2)^{n/2-1} \exp(-x^2/2)}{2^{n/2} \Gamma(n/2)} 2x = \\ &= \frac{1}{2^{n/2-1} \Gamma(n/2)} x^{n-1} \exp\left(-\frac{x^2}{2}\right).\end{aligned}$$

$$\mathbf{E}(\chi_n) = \int_0^\infty x h_n(x) dx = \frac{1}{2^{n/2-1} \Gamma(n/2)} \int_0^\infty x^n \exp\left(-\frac{x^2}{2}\right) dx.$$

A szokásos  $t = x^2/2$  helyettesítéssel

$$\begin{aligned}\mathbf{E}(\chi_n) &= \frac{1}{2^{n/2-1} \Gamma(n/2)} \int_0^\infty 2^{n/2} t^{n/2} \exp(-t) \frac{1}{\sqrt{2t}} dt = \\ &= \frac{\sqrt{2}}{\Gamma(n/2)} \int_0^\infty t^{(n+1)/2-1} \exp(-t) dt = \sqrt{2} \frac{\Gamma((n+1)/2)}{\Gamma(n/2)}.\end{aligned}$$

$$\mathbf{D}^2(\chi_n) = \mathbf{E}(\chi_n^2) - \mathbf{E}(\chi_n)^2 = n - 2 \frac{\Gamma((n+1)/2)^2}{\Gamma(n/2)^2}.$$

## Student t

Legyen  $\xi \cong N(0, 1)$  és  $t_n \stackrel{\circ}{=} \xi/\chi_n$ , ahol a  $\chi_n$ -ről feltesszük, hogy független a  $\xi$ -től és értelemszerűen  $\chi_n$  eloszlású. A  $t_n$  változó eloszlását  $n$  szabadságfokú Student-eloszlásnak mondjuk.

$$f_{\xi}(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{x^2}{2}\right),$$

$$f_{\eta}(x) = h_n(x) = \frac{1}{2^{n/2-1}\Gamma(n/2)} x^{n-1} \exp\left(-\frac{x^2}{2}\right), \quad x \geq 0$$

A hányados sűrűségfüggvényének képlete szerint

$$\begin{aligned} t_n(x) &= \\ &= \frac{1}{2^{n/2-1}\Gamma(n/2)} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{\infty} y \exp\left(-\frac{(xy)^2}{2}\right) y^{n-1} \exp\left(-\frac{y^2}{2}\right) dy = \\ &= \frac{1}{2^{n/2-1}\Gamma(n/2)} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{\infty} y^n \exp(-y^2(1+x^2)/2) dy. \end{aligned}$$

## Student t

A megszokott  $u = y^2 (1 + x^2) / 2$  helyettesítéssel

$$\begin{aligned}t_n(x) &= \\&= \frac{1}{2^{n/2-1}\Gamma(n/2)} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^\infty \left( \sqrt{\frac{2u}{1+x^2}} \right)^n \exp(-u) \frac{dy}{du} du = \\&= \frac{1}{\sqrt{\pi}\Gamma(n/2)} \frac{1}{(1+x^2)^{(n+1)/2}} \Gamma\left(\frac{n}{2} - \frac{1}{2} + 1\right) = \\&= \frac{\Gamma((n+1)/2)}{\sqrt{\pi}\Gamma(n/2)} \frac{1}{(1+x^2)^{(n+1)/2}}.\end{aligned}$$

## Cauchy eloszlás

Ha  $n = 1$ , akkor

$$t_1(x) = \frac{\Gamma(2/2)}{\sqrt{\pi}\Gamma(1/2)} \frac{1}{(1+x^2)} = \frac{1}{\sqrt{\pi}\sqrt{\pi}} \frac{1}{(1+x^2)} = \frac{1}{\pi(1+x^2)}.$$

Vagyis ha  $\xi$  és  $\eta$  független  $N(0, 1)$  eloszlásúak, akkor a  $\xi/|\eta|$  hányados Cauchy-eloszlású. Ugyanakkor ha  $\xi$  és  $\eta$  normális eloszlásúak, akkor a  $\xi/\eta$  sűrűségfüggvénye

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left(-\frac{(xy)^2}{2}\right) \exp\left(-\frac{y^2}{2}\right) |y| dy = \\ & = \frac{2}{2\pi} \int_0^{\infty} y \exp\left(-\frac{y^2(1+x^2)}{2}\right) dy = \\ & = \frac{1}{\pi} \left[ -\frac{1}{1+x^2} \exp\left(-\frac{y^2(1+x^2)}{2}\right) \right]_0^{\infty} = \frac{1}{\pi} \frac{1}{1+x^2}, \end{aligned}$$

amely szintén Cauchy eloszlású.

## Student t eloszlás

Mivel a sűrűségfüggvény páros, és így a várható érték, ha létezik, csak nulla lehet. Ha azonban  $n = 1$ , akkor nincs várható érték. Ha  $n \geq 2$ , akkor

$$\begin{aligned} \mathbf{D}^2(t_n) &= \\ &= \frac{1}{\sqrt{\pi}} \frac{\Gamma((n+1)/2)}{\Gamma(n/2)} \int_{\mathbb{R}} \frac{x^2}{(1+x^2)^{(n+1)/2}} dx = \\ &= \frac{1}{\sqrt{\pi}} \frac{\Gamma((n+1)/2)}{\Gamma(n/2)} 2 \int_0^{\infty} \frac{x^2}{(1+x^2)^{(n+1)/2}} dx. \end{aligned}$$

## Student t eloszlás

Ha  $t = x^2 / (1 + x^2)$ , vagyis ha  $x = \sqrt{t / (1 - t)}$ , akkor

$$\begin{aligned} \mathbf{D}^2(t_n) &= \frac{1}{\sqrt{\pi}} \frac{\Gamma((n+1)/2)}{\Gamma(n/2)} 2 \int_0^1 t(1-t)^{(n-1)/2} \frac{dx}{dt} dt = \\ &= \frac{1}{\sqrt{\pi}} \frac{\Gamma((n+1)/2)}{\Gamma(n/2)} \int_0^1 t(1-t)^{(n-1)/2} \frac{\sqrt{1-t}}{\sqrt{t}} \frac{1}{(1-t)^2} dt = \\ &= \frac{1}{\sqrt{\pi}} \frac{\Gamma((n+1)/2)}{\Gamma(n/2)} \int_0^1 t^{1/2} (1-t)^{n/2-2} dt = \\ &= \frac{1}{\sqrt{\pi}} \frac{\Gamma((n+1)/2)}{\Gamma(n/2)} B\left(\frac{3}{2}, \frac{n}{2} - 1\right). \end{aligned}$$



## Student t eloszlás

A levezetésből világos, hogy amennyiben  $n/2 - 1 \leq 0$ , vagyis  $n < 3$ , akkor a szórás végtelen. Ha  $n \geq 3$ , akkor

$$\begin{aligned} \mathbf{D}^2(t_n) &= \frac{1}{\sqrt{\pi}} \frac{\Gamma((n+1)/2)}{\Gamma(n/2)} \frac{\Gamma(1/2+1) \Gamma(n/2-1)}{\Gamma(3/2+(n-2)/2)} = \\ &= \frac{\frac{1}{2} \sqrt{\pi} \Gamma(n/2-1)}{\sqrt{\pi} \Gamma(n/2)} = \\ &= \frac{1}{2} \frac{\Gamma(n/2-1)}{(n/2-1) \Gamma(n/2-1)} = \frac{1}{n-2}. \end{aligned}$$

## Student t eloszlás

Esetenként Student-eloszláson a

$$\tilde{t}_n = \sqrt{n}t_n = \sqrt{n}\frac{\zeta}{\chi_n} = \frac{\zeta}{\sqrt{(\zeta_1^2 + \dots + \zeta_n^2) / n}}$$

változó eloszlását szokás érteni. A  $t_n$  eloszlásából a  $\tilde{t}_n$  eloszlása

$$\tilde{F}(x) = \mathbf{P}(\tilde{t}_n < x) = \mathbf{P}(\sqrt{n}t_n < x) = F\left(\frac{x}{\sqrt{n}}\right),$$

amiből a sűrűségfüggvény

$$\frac{\Gamma((n+1)/2)}{\sqrt{\pi n} \Gamma(n/2)} \frac{1}{(1+x^2/n)^{(n+1)/2}}.$$

A már belátottak alapján világos, hogy ha  $n \geq 2$ , akkor a várható érték nulla, ha pedig  $n \geq 3$ , akkor a variancia

$$\mathbf{D}^2(\tilde{t}_n) = \frac{n}{n-2}.$$

# Student t eloszlás

## Lemma

Legyenek  $\xi = (\xi_1, \dots, \xi_n)$  független  $N(0, 1)$  változók. Legyen  $\mathbf{C}$  ortogonális mátrix. Ha  $\eta = \mathbf{C}\xi$  akkor az  $\eta_1, \dots, \eta_n$  változók is független  $N(0, 1)$  változók és

$$\sum_{k=1}^n \xi_k^2 = \sum_{k=1}^n \eta_k^2.$$

Ha a változók függetlenek, akkor a többdimenziós eloszlás is normális. Többdimenziós normális eloszlások lineáris kombinációja is normális. A várható érték triviálisan nulla. Normális eloszlású változók esetén a függetlenség következik a korrelálatlanságból.

$$\begin{aligned} \mathbf{E}(\eta_k \eta_j) &= \mathbf{E}\left(\sum_i c_{ki} \xi_i \sum_l c_{jl} \xi_l\right) = \\ &= \sum_i \sum_l c_{ki} c_{jl} \mathbf{E}(\xi_i \xi_l) = \sum_i c_{ki} c_{ji} = \begin{cases} 0 & \text{ha } k \neq j \\ 1 & \text{ha } k = j \end{cases}. \end{aligned}$$

# Student t eloszlás

Hasonlóan

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^n \eta_k^2 &= \sum_{k=1}^n \left( \sum_{i=1}^n c_{ki} \tilde{\zeta}_i \right)^2 = \sum_{k=1}^n \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n c_{ki} c_{kj} \tilde{\zeta}_i \tilde{\zeta}_j = \\ &= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \tilde{\zeta}_i \tilde{\zeta}_j \sum_{k=1}^n c_{ki} c_{kj} = \sum_{i=1}^n \tilde{\zeta}_i^2.\end{aligned}$$

## Student t eloszlás

Tekintsük a  $\bar{\xi} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \xi_i$  átlagot és az

$$\begin{aligned} s^2 &= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (\xi_i - \bar{\xi})^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (\xi_i^2 + \bar{\xi}^2 - 2\xi_i\bar{\xi}) = \\ &= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \xi_i^2 + \bar{\xi}^2 - 2\bar{\xi}^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \xi_i^2 - \bar{\xi}^2 \end{aligned}$$

empirikus szórásnégyzetet. Legyen  $\mathbf{C}$  olyan ortogonális mátrix, amely első sora csupa  $1/\sqrt{n}$ . Ekkor

$$\begin{aligned} \bar{\xi} &= \frac{1}{\sqrt{n}}\eta_1, s^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \xi_i^2 - \bar{\xi}^2 = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \eta_k^2 - \frac{1}{n}\eta_1^2 = \\ &= \frac{1}{n} \sum_{k=2}^n \eta_k^2, \end{aligned}$$

vagyis a  $\bar{\xi}$  és az  $s^2$  függetlenek, a  $\bar{\xi}$  eloszlása  $N(0, 1) / \sqrt{n}$  és az  $ns^2$  tőle független  $\chi_{n-1}^2$ .

# Student $t$ eloszlás

Így a

$$t_{n-1} = \frac{\sqrt{n}\bar{\xi}}{\sqrt{ns^2}} = \frac{\bar{\xi}}{s} = \frac{\bar{\xi}}{\sqrt{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (\xi_i - \bar{\xi})^2}}.$$

$n - 1$  szabadságfokú Student  $t$  eloszlás. Illetve

$$\tilde{t}_{n-1} = \sqrt{n-1}t_{n-1} = \frac{\bar{\xi}}{\sqrt{\frac{1}{(n-1)n} \sum_{i=1}^n (\xi_i - \bar{\xi})^2}}.$$

# F-eloszlás

Az  $m, n$  szabadságfokú Fisher-féle  $F$  eloszláson az

$$F(m, n) \doteq \frac{1/m \sum_{i=1}^m \xi_i^2}{1/n \sum_{i=1}^n \eta_i^2}$$

változó eloszlását értjük, ahol a  $\xi_i$  és az  $\eta_j$  független  $N(0, 1)$  eloszlású változók. Legyen  $\kappa = (m/n) F(m, n)$ . A  $\kappa$  két független  $\chi^2$  eloszlás hányadosa.

## Theorem

*Ha  $\xi \cong \Gamma(a, \lambda)$  és  $\eta \cong \Gamma(b, \lambda)$  valamint a  $\xi$  és az  $\eta$  függetlenek, akkor*

$$\frac{\xi}{\eta} \cong \tilde{B}(a, b), \quad \frac{\xi}{\xi + \eta} \cong B(a, b).$$

# F-eloszlás

## Definition

Ha  $\alpha$  és  $\beta$  pozitív paraméterek, akkor a

$$g(x) \doteq \frac{\Gamma(\alpha + \beta)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} x^{\alpha-1} \frac{1}{(1+x)^{\alpha+\beta}}, \quad x > 0$$

sűrűségfüggvénnyel rendelkező eloszlást általánosított, vagy másodfajú béta eloszlásnak nevezzük. Az eloszlást  $\tilde{B}(\alpha, \beta)$ -val fogjuk jelölni. Béta eloszláson a

$$h(x) \doteq \frac{\Gamma(\alpha + \beta)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} x^{\alpha-1} (1-x)^{\beta-1}, \quad 0 < x < 1$$

sűrűségfüggvénnyel rendelkező eloszlást értjük.



## F-eloszlás

**Bizonyítás:** A hányados valószínűségi változó sűrűségfüggvényének képletét felírva, és kihasználva a két változó nem negativitását, ha  $u > 0$ , akkor

$$\begin{aligned} & \int_0^\infty \frac{\lambda^a}{\Gamma(a)} (uy)^{a-1} \exp(-\lambda uy) \frac{\lambda^b}{\Gamma(b)} y^{b-1} \exp(-\lambda y) y dy = \\ &= \frac{\lambda^{a+b}}{\Gamma(a)\Gamma(b)} u^{a-1} \int_0^\infty y^{a+b-1} \exp(-\lambda y(u+1)) dy = \\ &= \frac{\lambda^{a+b}}{\Gamma(a)\Gamma(b)} u^{a-1} \int_0^\infty \left( \frac{t}{\lambda(1+u)} \right)^{a+b-1} \exp(-t) \frac{1}{\lambda(1+u)} dt = \\ &= \frac{1}{\Gamma(a)\Gamma(b)} u^{a-1} \frac{1}{(1+u)^{a+b}} \int_0^\infty t^{a+b-1} \exp(-t) dt = \\ &= \frac{\Gamma(a+b)}{\Gamma(a)\Gamma(b)} u^{a-1} \frac{1}{(1+u)^{a+b}}, \end{aligned}$$

## F-eloszlás

Mivel

$$\frac{\xi}{\eta + \xi} = \frac{\xi/\eta}{1 + \xi/\eta}$$

elegendő a  $\xi/\eta$  változón  $\varphi(x) = x/(1+x)$  transzformációt végezni.

$$\varphi^{-1}(x) = x/(1-x), 0 < x < 1.$$

A transzformált sűrűségfüggvény

$$\begin{aligned} & \frac{\Gamma(a+b)}{\Gamma(a)\Gamma(b)} \left(\frac{x}{1-x}\right)^{a-1} \frac{1}{\left(1 + \frac{x}{1-x}\right)^{a+b}} \frac{1}{(1-x)^2} = \\ & = \frac{\Gamma(a+b)}{\Gamma(a)\Gamma(b)} \left(\frac{x}{1-x}\right)^{a-1} (1-x)^{a+b} \frac{1}{(1-x)^2} = \\ & = \frac{\Gamma(a+b)}{\Gamma(a)\Gamma(b)} x^{a-1} (1-x)^{b-1}. \end{aligned}$$

# Többdimenziós normális eloszlás

A többdimenziós normális eloszlás definíciójánál a probléma abból származik, hogy egy egységes tárgyalást akarunk adni az elfajult és a nem elfajult esetre. Az  $m$ -dimenziós elfajult esetben az eloszlás az  $\mathbb{R}^m$  egy valódi alterére koncentrálódik, ezért nincs sűrűségfüggvénye. A többdimenziós normális eloszlás definícióját visszavezetjük az egydimenziós esetre.

## Definition

Az  $\mathbb{R}^m$  értékű  $\boldsymbol{\zeta} = (\zeta_1, \dots, \zeta_m)$  változót normálisnak mondjuk, ha tetszőleges  $\mathbf{t} \in \mathbb{R}^m$  vektorra a  $(\mathbf{t}, \boldsymbol{\zeta}) \doteq \sum_{i=1}^m t_i \zeta_i$  skaláris szorzat eloszlása normális.

# Többdimenziós normális eloszlás

A definíció szerint tetszőleges  $\mathbf{t}$  vektorra a  $(\mathbf{t}, \boldsymbol{\zeta})$  eloszlását egyértelműen meghatározza az  $m_{\mathbf{t}}$  várható értéke és  $\sigma_{\mathbf{t}}$  szórása. Könnyen látható, hogy  $m_{\mathbf{t}} = (\mathbf{m}, \mathbf{t})$ , ahol  $\mathbf{m}$  a  $\boldsymbol{\zeta}$  várható értéke, valamint

$$\sigma_{\mathbf{t}}^2 = \mathbf{E} \left( (\mathbf{t}, \boldsymbol{\zeta})^2 \right) - (\mathbf{m}, \mathbf{t})^2 = \left( \mathbf{t}, \mathbf{E} \left( \boldsymbol{\zeta} \boldsymbol{\zeta}^T \right) \mathbf{t} \right) - (\mathbf{m}, \mathbf{t})^2 = (\mathbf{t}, \mathbf{S} \mathbf{t}),$$

ahol az  $\mathbf{S}$  mátrix  $s_{ij}$  eleme éppen  $\mathbf{E} \left( (\zeta_i - m_i) (\zeta_j - m_j) \right)$ , vagyis a  $\zeta_i$  és  $\zeta_j$  változók kovarianciája. Az  $\mathbf{S}$  evidens módon pozitív szemidefinít.

# Többdimenziós normális eloszlás

Az egydimenziós normális eloszlás karakterisztikus függvényének képlete alapján a  $(\mathbf{t}, \boldsymbol{\zeta})$  szorzat eloszlásának karakterisztikus függvénye

$$\varphi_{\mathbf{t}}(s) = \exp\left(im_{\mathbf{t}}s - \sigma_{\mathbf{t}}^2 \frac{s^2}{2}\right) = \exp\left(i(\mathbf{t}, \mathbf{m})s - (\mathbf{t}, \mathbf{S}\mathbf{t}) \frac{s^2}{2}\right),$$

amely az  $s = 1$  helyen éppen a  $\boldsymbol{\zeta}$  karakterisztikus függvénye a  $\mathbf{t}$  helyen, amiből

$$\varphi(\mathbf{t}) = \exp\left(i(\mathbf{t}, \mathbf{m}) - \frac{1}{2}(\mathbf{t}, \mathbf{S}\mathbf{t})\right).$$

# Többdimenziós normális eloszlás

A többdimenziós normális eloszlás egy másik szokásos bevezetése szerint az eloszlást a karakterisztikus függvényén keresztül érdemes definiálni. A többdimenziós normális eloszlással kapcsolatos bizonyításokban legtöbbször az eloszlás helyett a karakterisztikus függvényét vizsgáljuk, így ez a megközelítés igen célratoró.

## Definition

A  $\boldsymbol{\xi} = (\xi_1, \dots, \xi_m)$  vektor eloszlását normálisnak mondjuk, ha a karakterisztikus függvénye

$$\varphi(\mathbf{t}) = \exp\left(i(\mathbf{t}, \mathbf{m}) - \frac{1}{2}(\mathbf{t}, \mathbf{S}\mathbf{t})\right)$$

alakú, ahol az  $\mathbf{S}$  ( $m \times m$ )-es pozitív szemidefinit mátrix, az  $\mathbf{m}$   $m$ -dimenziós vektor. Az  $(\mathbf{m}, \mathbf{S})$  paraméterekhez tartozó többdimenziós normális eloszlást  $N(\mathbf{m}, \mathbf{S})$  módon jelöljük

# Többdimenziós normális eloszlás

Az alábbiak során többször fogunk hivatkozni a következő lineáris algebrai állításra:

## Theorem (Spektrálfelbontási tétel)

*Tetszőleges  $\mathbf{S}$  szimmetrikus, valós értékű mátrixhoz létezik az  $\mathbf{S}$  sajátvektoraiból alkotott olyan ortonormált bázis, amelyben az  $\mathbf{S}$  diagonális alakra hozható, vagyis az  $\mathbf{S}$  mátrixhoz található olyan  $\mathbf{C}$  ortonormált mátrix, hogy*

$$\mathbf{D} = \mathbf{C}^T \mathbf{S} \mathbf{C} = \mathbf{C}^{-1} \mathbf{S} \mathbf{C},$$

*ahol a  $\mathbf{D}$  diagonális, és a diagonálisban levő elemek éppen az  $\mathbf{S}$  sajátértékei.*

# Többdimenziós normális eloszlás

**Bizonyítás:** Miként ismert az algebra alaptétele miatt tetszőleges lineáris leképezés rendelkezik komplex sajátértékekkel, vagyis tetszőleges  $\mathbf{S}$  mátrix esetén van olyan  $\lambda \in \mathbb{C}$  szám és  $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$  vektor, mindkettő esetlegesen komplex, amelyekre  $\mathbf{S}\mathbf{x} = \lambda\mathbf{x}$ . Ha  $\lambda$  komplex lenne, akkor a konjugáltja  $\bar{\lambda}$  szintén sajátérték lenne, ugyanis az  $\mathbf{S}\mathbf{x} = \lambda_1\mathbf{x}$  egyenletet konjugálva, felhasználva, hogy az  $\mathbf{S}$  valós

$$\mathbf{S}\bar{\mathbf{x}} = \overline{\mathbf{S}\mathbf{x}} = \overline{\lambda\mathbf{x}} = \bar{\lambda}\bar{\mathbf{x}}.$$

Ha  $\mathbf{x}$  sajátvektor, akkor

$$\begin{aligned}\lambda(\mathbf{x}, \mathbf{x}) &= (\mathbf{x}, \lambda\mathbf{x}) = (\mathbf{x}, \mathbf{S}\mathbf{x}) = (\overline{\mathbf{S}}^T \mathbf{x}, \mathbf{x}) = \\ &= (\mathbf{S}\mathbf{x}, \mathbf{x}) = (\lambda\mathbf{x}, \mathbf{x}) = \bar{\lambda}(\mathbf{x}, \mathbf{x}),\end{aligned}$$

amiből az  $(\mathbf{x}, \mathbf{x}) \neq 0$  miatt  $\lambda = \bar{\lambda}$ , vagyis a  $\lambda$  valós. Ebből következően nem csak a sajátértékek, hanem a sajátvektorok is valósak.



## Többdimenziós normális eloszlás

Ha  $\lambda_1$  és  $\lambda_2$  az  $\mathbf{S}$  szimmetrikus, valós értékű mátrix két különböző sajátértéke és  $\lambda_2 \neq 0$  és  $\mathbf{x}_1$ , illetve  $\mathbf{x}_2$  a megfelelő sajátvektorok, akkor

$$\begin{aligned}(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2) &= \left( \mathbf{x}_1, \frac{1}{\lambda_2} \mathbf{S} \mathbf{x}_2 \right) = \left( \mathbf{S}^T \mathbf{x}_1, \frac{1}{\lambda_2} \mathbf{x}_2 \right) = \\ &= \frac{1}{\lambda_2} (\mathbf{S} \mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2) = \left( \lambda_1 \mathbf{x}_1, \frac{1}{\lambda_2} \mathbf{x}_2 \right) = \\ &= \frac{\lambda_1}{\lambda_2} (\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2),\end{aligned}$$

ami csak akkor lehetséges, ha  $(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2) = 0$ .

## Többdimenziós normális eloszlás

Ha  $\mathbf{x}_1 \neq 0$  egy sajátvektor, akkor  $\mathbf{x}_1 / \|\mathbf{x}_1\|$  egységnyi hosszú sajátvektor. Tegyük fel, hogy  $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_k$  ortonormált sajátvektorai az  $\mathbf{S}$ -nak. Legyen  $L \stackrel{\circ}{=} \text{lin}(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_k)$  a kifeszített altér. Ha az  $L$  dimenziója nem azonos az  $\mathbf{S}$  dimenziójával, akkor az  $L^\perp \stackrel{\circ}{=} \{\mathbf{x} : (\mathbf{x}, \mathbf{x}_i) = 0, i = 1, 2, \dots, k\}$  altér nem üres. Ha  $\mathbf{x} \in L^\perp$ , akkor

$$(\mathbf{S}\mathbf{x}, \mathbf{x}_i) = (\mathbf{x}, \mathbf{S}^T \mathbf{x}_i) = (\mathbf{x}, \mathbf{S}\mathbf{x}_i) = \lambda_i (\mathbf{x}, \mathbf{x}_i) = 0,$$

vagyis az  $\mathbf{S}$  az  $L^\perp$  alteret önmagára képezi. Így az  $\mathbf{S}$ -nak van sajátvektora az  $L^\perp$  altérben. Ha  $\mathbf{x}_{k+1}$  a megfelelő normalizált sajátvektor, akkor  $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_{k+1}$  egy  $k + 1$  elemből álló ortonormált sajátvektor rendszer.

# Többdimenziós normális eloszlás

Legyen az  $\mathbf{S}$  dimenziója  $n$ . Az elmondottak alapján léteznek az  $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_n$  ortonormált sajátvektorok. Ha  $\mathbf{C}$  oszlopai éppen az  $(\mathbf{x}_k)_{k=1}^n$  sajátvektorok és a  $\mathbf{D}$  diagonális mátrix átlójában éppen a sajátértékek vannak, akkor  $\mathbf{SC} = \mathbf{CD}$ , amit  $\mathbf{C}^T$ -vel megszorozva

$$\mathbf{C}^T \mathbf{S} \mathbf{C} = \mathbf{C}^T (\mathbf{C} \mathbf{D}) = (\mathbf{C}^T \mathbf{C}) \mathbf{D} = \mathbf{D},$$

ami éppen a kívánt összefüggés.

# Többdimenziós normális eloszlás

## Corollary

*Ha  $\mathbf{S}$  olyan  $(m \times m)$ -es szimmetrikus, pozitív szemidefinit mátrix, amely rangja  $r$ , akkor létezik olyan  $\mathbf{A}$   $(m \times r)$ -es mátrix, amelyre*

$$\mathbf{S} = \mathbf{A}\mathbf{A}^T.$$

*Az  $\mathbf{A}$  mátrix oszlopai az  $\mathbf{S}$  sajátvektorai és az  $\mathbf{A}$  minden  $\mathbf{a}_j$  oszlopára*

$$\|\mathbf{a}_j\| = \sqrt{\lambda_j},$$

*ahol  $\lambda_j$  az  $\mathbf{S}$  valamelyik nullától különböző sajátértéke.*

# Többdimenziós normális eloszlás

**Bizonyítás:** A spektrálfelbontási tétel alapján az  $\mathbf{S}$  sajátvektoraiból készíthető ortonormált bázis. Ha a bázisvektorokból egy  $\mathbf{C}$  mátrixot képezünk, akkor a sajátvektor definíciójából  $\mathbf{S}\mathbf{C} = \mathbf{C}\mathbf{D}$ , ahol  $\mathbf{D}$  a sajátértékekből álló diagonális mátrix. Felhasználva a sajátvektorok ortonormalitását,  $\mathbf{S} = \mathbf{C}\mathbf{D}\mathbf{C}^T$ . Mivel az  $\mathbf{S}$  pozitív szemidefinit, ezért a  $\mathbf{D}$  átlójában szereplő sajátértékek nem negatívak, tehát képezhetjük a négyzetgyökeikből álló  $\mathbf{D}^{1/2}$  mátrixot. Evidens módon a  $\mathbf{B} \doteq \mathbf{C}\mathbf{D}^{1/2}$  mátrixra

$$\begin{aligned}\mathbf{B}\mathbf{B}^T &\doteq \mathbf{C}\mathbf{D}^{1/2} \left(\mathbf{C}\mathbf{D}^{1/2}\right)^T = \mathbf{C}\mathbf{D}^{1/2} \left(\mathbf{D}^{1/2}\right)^T \mathbf{C}^T = \\ &= \mathbf{C}\mathbf{D}^{1/2}\mathbf{D}^{1/2}\mathbf{C}^T = \mathbf{C}\mathbf{D}\mathbf{C}^T = \mathbf{S}.\end{aligned}$$

# Többdimenziós normális eloszlás

Mivel az  $\mathbf{S}$  rangja  $r$ , ezért a  $\mathbf{D}$  átlójában pontosan  $r$  pozitív elem található. Alkalmas indexelés mellett  $\mathbf{B} \doteq (\mathbf{A} \ \mathbf{0})$ , ahol az  $\mathbf{A}$  dimenziója  $(m \times r)$ . Evidens módon

$$\mathbf{S} = \mathbf{B}\mathbf{B}^T = (\mathbf{A} \ \mathbf{0}) \begin{pmatrix} \mathbf{A}^T \\ \mathbf{0} \end{pmatrix} = \mathbf{A}\mathbf{A}^T.$$

# Többdimenziós normális eloszlás

## Theorem

*Teljesülnek az alábbi állítások:*

- ▶ Ha  $\mathbf{m}$  tetszőleges  $\mathbb{R}^m$ -beli vektor, és  $\mathbf{S}$  ( $m \times m$ )-es pozitív szemidefinit mátrix, akkor az  $(\mathbb{R}^m, \mathcal{B}(\mathbb{R}^m))$  téren létezik olyan eloszlás, amelynek karakterisztikus függvénye éppen a megadott.
- ▶ Az  $N(\mathbf{m}, \mathbf{S})$  eloszlás várható érték vektora  $\mathbf{m}$ , kovariancia mátrixa  $\mathbf{S}$ .
- ▶ Ha  $\xi \cong N(\mathbf{m}, \mathbf{S})$  és  $\mathbf{T} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$  lineáris leképezés, akkor

$$\mathbf{T}\xi \cong N(\mathbf{Tm}, \mathbf{TST}^T).$$

# Többdimenziós normális eloszlás

## Theorem

- ▶ Ha  $\xi \cong N(\mathbf{m}, \mathbf{S})$ , az  $\mathbf{S}$  mátrix diagonális és a diagonális elemek rendre  $\sigma_i^2$ , ( $i = 1, \dots, m$ ), akkor az egyes  $\xi_i$  változók  $N(m_i, \sigma_i)$  egydimenziós normális eloszlásúak, ahol feltételezzük, hogy definíció szerint a nulla szórású egydimenziós normális eloszlású valószínűségi változók majdnem mindenhol konstansok. Általában tetszőleges  $\mathbf{t}$  vektorra

$$(\mathbf{t}, \xi) \cong N\left((\mathbf{t}, \mathbf{m}), (\mathbf{t}, \mathbf{S} \mathbf{t})^{1/2}\right).$$



# Többdimenziós normális eloszlás

## Theorem

- ▶ Ha  $\xi \cong N(\mathbf{m}, \mathbf{S})$  és az  $\mathbf{S}$  kovariancia mátrix rangja  $r$ , akkor létezik olyan  $\mathbf{A}$  ( $m \times r$ ) mátrix, és  $\eta \cong N(\mathbf{0}, \mathbf{E}_r)$ , ahol  $\mathbf{E}_r$  az  $r$ -dimenziós egységmátrix, hogy  $\xi = \mathbf{A}\eta + \mathbf{m}$ . Az  $\mathbf{A}$  mátrix oszlopai az  $\mathbf{S}$  olyan sajátvektorai, amelyekhez az  $\mathbf{S}$  nem nulla sajátértékei tartoznak. Az  $\mathbf{A}$  mátrix oszlopainak hossza éppen a megfelelő pozitív sajátérték négyzetgyöke.
- ▶ Ha az  $\mathbf{S}$  kovariancia mátrixa szigorúan pozitív definit, vagyis ha az  $\mathbf{S}$  mátrix invertálható, akkor az  $N(\mathbf{m}, \mathbf{S})$  eloszlás abszolút folytonos a  $\lambda_m$  Lebesgue-mértékre nézve, vagyis az eloszlásnak van sűrűségfüggvénye. A sűrűségfüggvény képlete:

$$f(\mathbf{x}) = \frac{1}{(\sqrt{2\pi})^n} \frac{1}{\sqrt{\det(\mathbf{S})}} \exp\left(-\frac{1}{2}(\mathbf{x} - \mathbf{m}, \mathbf{S}^{-1}(\mathbf{x} - \mathbf{m}))\right).$$

# Többdimenziós normális eloszlás

## Theorem

- ▶ Ha  $\xi \cong N(\mathbf{m}, \mathbf{S})$ ,  $\mathbf{S} \doteq (s_{ij})$  és  $s_{ij} = 0$ , ha  $i \neq j$ , akkor a  $\xi_i$  és  $\xi_j$  változók függetlenek.
- ▶ Ha valamely  $\mathbf{W}$  mátrixra  $\mathbf{S} = \mathbf{W}\mathbf{W}^T$ , és a  $\xi$  várható értéke nulla, akkor a  $\xi$  1 valószínűséggel eleme a  $\mathbf{W}$  oszlopvektorai által kifeszített  $H \doteq \text{lin}(\mathbf{W})$  altérnek. Ha  $\mathbf{M}(\xi) = \mathbf{m}$ , akkor  $\mathbf{P}(\xi \in \mathbf{m} + H) = 1$ .

# Többdimenziós normális eloszlás

**Bizonyítás:** Ha az  $\mathbf{S}$  rangja  $r$ , akkor létezik  $(m \times r)$ -es  $\mathbf{A}$  mátrix, hogy  $\mathbf{S} = \mathbf{A}\mathbf{A}^T$ . Tetszőleges  $\boldsymbol{\eta}$   $r$ -dimenziós változóra, ha  $\boldsymbol{\zeta} \stackrel{\circ}{=} \mathbf{A}\boldsymbol{\eta} + \mathbf{m}$ , akkor a  $\boldsymbol{\zeta}$  karakterisztikus függvénye

$$\begin{aligned}\varphi_{\boldsymbol{\zeta}}(\mathbf{t}) &= \mathbf{E}(\exp(i(\mathbf{t}, \boldsymbol{\zeta}))) = \mathbf{E}(\exp(i(\mathbf{t}, \mathbf{A}\boldsymbol{\eta}) + i(\mathbf{t}, \mathbf{m}))) = \\ &= \mathbf{E}\left(\exp\left(i\left(\mathbf{A}^T\mathbf{t}, \boldsymbol{\eta}\right) + i(\mathbf{t}, \mathbf{m})\right)\right) = \exp(i(\mathbf{t}, \mathbf{m}))\varphi_{\boldsymbol{\eta}}\left(\mathbf{A}^T\mathbf{t}\right).\end{aligned}$$

## Többdimenziós normális eloszlás

Ha  $\boldsymbol{\eta}$   $r$  darab független, standard normális eloszlású változóból álló vektor, akkor

$$\varphi_{\boldsymbol{\eta}}(\mathbf{s}) = \prod_{i=1}^r \varphi_i(s_i) = \prod_{i=1}^r \exp\left(-\frac{1}{2}s_i^2\right) = \exp\left(-\frac{1}{2}(\mathbf{s}, \mathbf{s})\right),$$

amiből

$$\begin{aligned}\varphi_{\boldsymbol{\zeta}}(\mathbf{t}) &= \exp\left(i(\mathbf{t}, \mathbf{m}) - \frac{1}{2}(\mathbf{A}^T \mathbf{t}, \mathbf{A}^T \mathbf{t})\right) = \\ &= \exp\left(i(\mathbf{t}, \mathbf{m}) - \frac{1}{2}(\mathbf{t}, \mathbf{A} \mathbf{A}^T \mathbf{t})\right) = \\ &= \exp\left(i(\mathbf{t}, \mathbf{m}) - \frac{1}{2}(\mathbf{t}, \mathbf{S} \mathbf{t})\right),\end{aligned}$$

ami éppen az első állítás.

# Többdimenziós normális eloszlás

Elemi számolással látható, hogy

$$\begin{aligned}\mathbf{E}(\boldsymbol{\zeta}) &= \mathbf{E}(\mathbf{A}\boldsymbol{\eta} + \mathbf{m}) = \mathbf{A} \cdot \mathbf{E}(\boldsymbol{\eta}) + \mathbf{m} = \mathbf{m}, \\ \mathbf{E}\left((\boldsymbol{\zeta} - \mathbf{m})(\boldsymbol{\zeta} - \mathbf{m})^T\right) &= \mathbf{E}\left((\mathbf{A}\boldsymbol{\eta})(\mathbf{A}\boldsymbol{\eta})^T\right) = \mathbf{E}\left(\mathbf{A}\boldsymbol{\eta}\boldsymbol{\eta}^T\mathbf{A}^T\right) = \\ &= \mathbf{A} \cdot \mathbf{E}\left(\boldsymbol{\eta}\boldsymbol{\eta}^T\right) \cdot \mathbf{A}^T = \mathbf{A}\mathbf{E}_r\mathbf{A}^T = \mathbf{S},\end{aligned}$$

vagyis teljesül a második állítás is.

## Többdimenziós normális eloszlás

$$\begin{aligned}\varphi_{\boldsymbol{\eta}}(\mathbf{u}) &= \mathbf{E}(\exp(i(\mathbf{u}, \mathbf{T}\boldsymbol{\zeta}))) = \mathbf{E}(\exp(i(\mathbf{T}^T \mathbf{u}, \boldsymbol{\zeta}))) = \\ &= \varphi_{\boldsymbol{\zeta}}(\mathbf{T}^T \mathbf{u}) = \exp\left(\left(\mathbf{T}^T \mathbf{u}, \mathbf{m}\right) + \frac{1}{2} \left(\mathbf{T}^T \mathbf{u}, \mathbf{S} \mathbf{T} \mathbf{u}\right)\right) = \\ &= \exp\left(\left(\mathbf{u}, \mathbf{T} \mathbf{m}\right) + \frac{1}{2} \left(\mathbf{u}, \mathbf{T} \mathbf{S} \mathbf{T}^T \mathbf{u}\right)\right).\end{aligned}$$

# Többdimenziós normális eloszlás

Vegyük a  $\mathbf{t} \mapsto (\mathbf{t}, \boldsymbol{\zeta})$  lineáris leképezést. Az előző alapján az  $\eta = (\mathbf{t}, \boldsymbol{\zeta})$  eloszlása

$$N((\mathbf{t}, \mathbf{m}), (\mathbf{t}, \mathbf{St})),$$

amely karakterisztikus függvénye

$$\psi(s) = \exp\left(s(\mathbf{t}, \mathbf{m}) - \frac{1}{2}s^2(\mathbf{t}, \mathbf{St})\right).$$

Ha  $\mathbf{t} = \mathbf{e}_j$ , akkor

$$\psi(s) = \exp\left(m_j - \frac{1}{2}s^2\sigma_j^2\right).$$

Tehát a  $\zeta_j \cong N(m_j, \sigma_j)$ .

## Többdimenziós normális eloszlás

Feltehetjük, hogy a  $\zeta$  várható értéke nulla. Legyen  $\mathbf{D} \doteq \mathbf{C}^T \mathbf{S} \mathbf{C}$  az  $\mathbf{S}$  spektrálfelbontása. Ha

$$\zeta \doteq \mathbf{C}^T \xi = \mathbf{C}^{-1} \xi,$$

akkor a harmadik állítás alapján a  $\zeta$  kovariancia mátrixa

$$\mathbf{C}^T \mathbf{S} \mathbf{C}^T \mathbf{C} = \mathbf{C}^T \mathbf{S} \mathbf{C} = \mathbf{D},$$

vagyis diagonális. Az  $\mathbf{S}$  rangjára tett feltétel szerint feltehető, hogy a  $\mathbf{D}$  diagonálisában levő első  $r$  elem pozitív, a többi pedig nulla.

Mivel a  $\zeta$  várható érték vektora nulla, ezért  $\zeta \doteq \begin{pmatrix} \eta_1 \\ \mathbf{0} \end{pmatrix}$ , ahol az  $\eta_1$   $r$ -dimenziós normális eloszlású vektor. Ebből

$$\xi = \mathbf{C} \zeta = \begin{pmatrix} \mathbf{U} & \mathbf{V} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \eta_1 \\ \mathbf{0} \end{pmatrix} = \mathbf{U} \eta_1.$$

Az  $\mathbf{U}$  oszlopait az  $\eta_1$  szórásával, vagyis  $\sqrt{d_{ii}}$ -vel, megszorozva az  $\eta_1$  standardizálható, vagyis az ötödik állítás teljesül.



## Többdimenziós normális eloszlás

Ha  $\mathbf{S}$  invertálható, és  $\mathbf{S} = \mathbf{A}\mathbf{A}^T$ , akkor az  $\mathbf{A}$  is invertálható. Ha  $\boldsymbol{\zeta} = \mathbf{A}\boldsymbol{\eta} + \mathbf{m}$ , ahol  $\boldsymbol{\eta} \cong N(\mathbf{0}, \mathbf{E})$ , akkor  $\boldsymbol{\zeta} \cong N(\mathbf{m}, \mathbf{S})$ . Az integráltranszformációs-tétel alapján minden  $B$  Borel-halmazra

$$\begin{aligned} \mathbf{P}(\boldsymbol{\zeta} \in B) &= \mathbf{P}(\mathbf{A}\boldsymbol{\eta} + \mathbf{m} \in B) = \mathbf{P}(\boldsymbol{\eta} \in \mathbf{A}^{-1}(B - \mathbf{m})) = \\ &= \int_{\mathbf{A}^{-1}(B - \mathbf{m})} \prod_{i=1}^n \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{1}{2}s_i^2\right) ds = \\ &= \frac{1}{(\sqrt{2\pi})^n} \int_{\mathbf{A}^{-1}(B - \mathbf{m})} \exp\left(-\frac{(\mathbf{s}, \mathbf{s})}{2}\right) ds = \\ &= \frac{|\det \mathbf{A}^{-1}|}{(\sqrt{2\pi})^n} \int_B \exp\left(-\frac{(\mathbf{A}^{-1}(\mathbf{s} - \mathbf{m}), \mathbf{A}^{-1}(\mathbf{s} - \mathbf{m}))}{2}\right) ds \end{aligned}$$

## Többdimenziós normális eloszlás

$$\begin{aligned} &= \frac{|\det \mathbf{A}^{-1}|}{(\sqrt{2\pi})^n} \int_B \exp \left( -\frac{\left( (\mathbf{s} - \mathbf{m}), (\mathbf{A}^{-1})^T \mathbf{A}^{-1} (\mathbf{s} - \mathbf{m}) \right)}{2} \right) d\mathbf{s} = \\ &= \frac{|\det \mathbf{A}^{-1}|}{(\sqrt{2\pi})^n} \int_B \exp \left( -\frac{\left( (\mathbf{s} - \mathbf{m}), (\mathbf{A}\mathbf{A}^T)^{-1} (\mathbf{s} - \mathbf{m}) \right)}{2} \right) d\mathbf{s} = \\ &= \frac{|\det \mathbf{A}^{-1}|}{(\sqrt{2\pi})^n} \int_B \exp \left( -\frac{1}{2} \left( (\mathbf{s} - \mathbf{m}), \mathbf{S}^{-1} (\mathbf{s} - \mathbf{m}) \right) \right) d\mathbf{s}. \end{aligned}$$

Mivel  $\mathbf{S} = \mathbf{A}\mathbf{A}^T$ , ezért  $|\det \mathbf{A}^{-1}| = 1/\sqrt{|\det \mathbf{S}|}$ , következésképpen a  $\xi$  sűrűségfüggvénye éppen az állításban szereplő alakkal rendelkezik.

# Többdimenziós normális eloszlás

A  $(\xi_i, \xi_j)$  pár eloszlásának karakterisztikus függvénye az eredetiből úgy kapható, hogy a többi változóhoz tartozó  $t_k$  ( $k \neq i, j$ ) értékét nullának válasszuk. Ha  $i \neq j$ , és  $s_{ij} = 0$ , akkor a  $(\xi_i, \xi_j)$  eloszlásának karakterisztikus függvényében szereplő kovariancia mátrix diagonális. Ha a két eloszlás egyike sem elfajuló, akkor a kétváltozós eloszlásnak van sűrűségfüggvénye, és ennek alakjából a függetlenség már következik, hiszen a két dimenziós eloszlás sűrűségfüggvénye az egyes peremeloszlások sűrűségfüggvényének szorzata. Ha valamelyik eloszlás elfajult, akkor az állítás következik abból, hogy minden konstans valószínűségi változó minden más változótól független.

## Többdimenziós normális eloszlás

Legyen  $\boldsymbol{\eta}$  független standard normális eloszlású változókból álló oszlopvektor. Az elmondottak alapján tetszőleges  $\mathbf{W}$  mátrixra a  $\boldsymbol{\zeta} \doteq \mathbf{W}\boldsymbol{\eta}$  biztosan a  $H \doteq \text{lin}(\mathbf{W})$  altérre koncentrálódó normális eloszlású vektor. A  $\boldsymbol{\zeta}$  kovariancia mátrixa éppen

$$\begin{aligned}\mathbf{M}(\boldsymbol{\zeta} \cdot \boldsymbol{\zeta}^T) &\doteq \mathbf{M}(\mathbf{W}\boldsymbol{\eta} \cdot (\mathbf{W}\boldsymbol{\eta})^T) = \mathbf{M}(\mathbf{W}\boldsymbol{\eta} \cdot \boldsymbol{\eta}^T \mathbf{W}^T) = \\ &= \mathbf{W} \cdot \mathbf{M}(\boldsymbol{\eta} \cdot \boldsymbol{\eta}^T) \cdot \mathbf{W}^T = \mathbf{W}\mathbf{W}^T \doteq \mathbf{S},\end{aligned}$$

tehát a  $\boldsymbol{\xi}$  és a  $\boldsymbol{\zeta}$  karakterisztikus függvénye megegyezik így a  $\boldsymbol{\xi}$  és a  $\boldsymbol{\zeta} \doteq \mathbf{W}\boldsymbol{\eta}$  eloszlása megegyezik, tehát  $\mathbf{P}(\boldsymbol{\xi} \in H) = 1$ .

# Többdimenziós normális eloszlás

## Example

A kétdimenziós normális eloszlás sűrűségfüggvénye.

Tegyük fel, hogy a  $(\xi, \eta)$  pár kétdimenziós normális eloszlású.

Tegyük fel, hogy az eloszlás nem elfajuló. Legyen

$$\mathbf{S} = \begin{pmatrix} s_{11} & s_{12} \\ s_{21} & s_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sigma_1^2 & r\sigma_1\sigma_2 \\ r\sigma_1\sigma_2 & \sigma_2^2 \end{pmatrix}$$

a kovariancia mátrix.

$$|\mathbf{S}| = \sigma_1^2\sigma_2^2 - r^2(\sigma_1\sigma_2)^2 = (1 - r^2)\sigma_1^2\sigma_2^2.$$

$$\mathbf{S}^{-1} = \frac{1}{(1 - r^2)\sigma_1^2\sigma_2^2} \begin{pmatrix} \sigma_2^2 & -r\sigma_1\sigma_2 \\ -r\sigma_1\sigma_2 & \sigma_1^2 \end{pmatrix}.$$

# Többdimenziós normális eloszlás

Ebből a sűrűségfüggvény

$$f(x, y) = \frac{1}{\sigma_1 \sigma_2 \sqrt{1 - r^2} (\sqrt{2\pi})^2} \times \\ \times \exp\left(-\frac{1}{2(1 - r^2)} \left( \left(\frac{x - m_1}{\sigma_1}\right)^2 - 2r \frac{(x - m_1)(y - m_2)}{\sigma_1 \sigma_2} + \left(\frac{y - m_2}{\sigma_1}\right)^2 \right)\right)$$

# Többdimenziós normális eloszlás

## Example

A korrelátlanságból csak akkor következik a függetlenség, ha az együttes eloszlás normális.

Legyen  $\zeta = N(0, 1)$  és  $\eta = \zeta^2$ .  $\mathbf{E}(\eta) = 1$ , így

$$\begin{aligned}\mathbf{E}((\zeta - \mathbf{E}(\zeta))(\eta - \mathbf{E}(\eta))) &= \mathbf{E}(\zeta(\eta - 1)) = \\ &= \mathbf{E}(\zeta^3) - \mathbf{E}(\zeta) = 0\end{aligned}$$

# Többdimenziós normális eloszlás

## Example

Két normális eloszlású valószínűségi változó összege nem feltétlenül normális!

Természetesen az előzőek alapján ez csak akkor fordulhat elő, ha az összeadandók együttes eloszlása nem normális. Legyenek  $F_1$  illetve  $F_2$  kétdimenziós normális eloszlások. Tekintsük az  $F \doteq (F_1 + F_2) / 2$  eloszlásfüggvényt. Tegyük fel, hogy mind a két eloszlásra nézve mind a két peremeloszlás várható értéke nulla, szórása egy, és az  $F_1$ -hez tartozó  $r_1$  korrelációs együttható különbözik az  $F_2$ -höz tartozó  $r_2$  együtthatótól.



## Többdimenziós normális eloszlás

Az  $F$ -nek van sűrűségfüggvénye, amely a két sűrűségfüggvény  $1/2$  súllyal vett kombinációja.

$$f(x, y) = \frac{1}{4\pi\sqrt{1-r_1^2}} \exp\left(-\frac{1}{2(1-r_1^2)}(x^2 - 2r_1xy + y^2)\right) + \frac{1}{4\pi\sqrt{1-r_2^2}} \exp\left(-\frac{1}{2(1-r_2^2)}(x^2 - 2r_2xy + y^2)\right).$$

## Többdimenziós normális eloszlás

A definíciókból világos, hogy az  $x$  és  $y$  szerinti peremeloszlásokra

$$g(x) \stackrel{\circ}{=} \int_{\mathbb{R}} f(x, y) dy = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{x^2}{2}\right),$$

$$h(y) \stackrel{\circ}{=} \int_{\mathbb{R}} f(x, y) dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{y^2}{2}\right).$$

Ha a  $(\xi, \eta)$  eloszlása  $F$ , akkor a  $\xi$  és az  $\eta$  standard normális eloszlású. Számoljuk ki a  $\xi + \eta$  összeg eloszlását!

$$\int_{\mathbb{R}} f(z - y, y) dy = \frac{1}{2} \frac{1}{\sigma_1 \sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{z^2}{2\sigma_1^2}\right) + \frac{1}{2} \frac{1}{\sigma_2 \sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{z^2}{2\sigma_2^2}\right)$$

ahol  $\sigma_1 \stackrel{\circ}{=} \sqrt{2(1+r_1)}$ ,  $\sigma_2 \stackrel{\circ}{=} \sqrt{2(1+r_2)}$ . Mivel  $r_1 \neq r_2$ , ezért  $\sigma_1 \neq \sigma_2$ , ezért az összeg eloszlása nem normális.