A pénzügyi eszközök árazásának alaptétele diszkrét idejű modellekben

Medvegyev Péter[1]

Budapesti Közgazdaságtudományi és Államigazgatási Egyetem
Magyar Külkereskedelmi Bank vállalati katedra

2006. július 20.

[1]Köszönetet szeretnék mondani a Magyar Külkereskedelmi Banknak a vállalati professzori ösztöndíj keretében nyújtott támogatásért.

Kivonat

A dolgozatban a matematikai pénzügyek legegyszerűbb állításait ismertem. Diszkrét, véges időhorizont esetén belátom az eszközárazás első és második alaptételét.

In the article we discuss the simplest statements of the mathematical finance. Under finite, discrete time horizon we present the proof of the first and the second fundamental theorems of arbitrage pricing theory.

A dolgozatban a matematikai pénzügyek legegyszerűbb kérdéseit foglalom össze[1]. Némi absztrakcióval a matematikai pénzügyek legfontosabb kérdése a következő: Tegyük fel, hogy a jövő egy T időpontjában lehetőségünk[2] lesz egy H módon jelölt véletlen kifizetés megszerzésére. Mi jelenleg a H korrekt ára, mekkora kompenzáció jár nekünk jelenleg a H-ban foglalt jövőbeli kockázatért? Természetesen a kérdésre a válasz csak akkor adható meg, ha tisztázzuk a H véletlen kifizetés mögötti „fogadás" közgazdasági hátterét. Ha a fogadás H eredménye csakis külső, kontrolálatlan tényezőktől függ, akkor a H jelenlegi értékének meghatározása szigorú értelemben nem pénzügyi matematikai, sőt nem is közgazdasági feladat. A feladat akkor válik pénzügyi-matematikaivá, ha feltételezzük, hogy a H kifizetés mögötti kockázat pénzügyi eszközökkel, aktív pénzügy cselekvéssel módosítható. A pénzügyi matematikában a pénzügyi módszerekkel csökkenthető kockázatok nagyságát próbáljuk matematikai megfontolásokkal meghatározni. Ezt azért érdemes hangsúlyozni, ugyanis a pénzügyi matematikát felületesen ismerők gyakran gondolják úgy, hogy a terület tárgya, a „hogyan legyünk okosak a tőzsdén" kérdés megválaszolása. Annak ellenére, hogy ennek a kérdésnek a megválaszolását távolról sem tartom érdektelennek, nyomatékosan hangsúlyozni kell: nem erről van szó. Az elmélet kiinduló pontja éppen az, hogy semmilyen matematikai módszerrel nem lehetünk „okosabbak" a piacnál, és csak az átlagosnál nagyobb kockázatvállalással tudunk az átlagosnál nagyobb nyereséghez jutni. A pénzügyi matematika megfontolásai az elméleti pénzügyek terén felismert kockázatminimalizálási elvre épülnek. Ez egy általános „filozófiai" elv, amely szerint egy véletlen kifizetésből származó kockázat csak annyiban ismerhető el, amennyiben az szükséges, indokolt volt. A túlzott kockázatviselés miatt elszenvedett veszteségekért nem jár kompenzáció. Természetesen kézenfekvő a kérdés: ki és mi határozza meg, hogy a kockázat túlzó vagy sem? A válasz a közgazdaságtanban megszokott: a kockázat piaci ára. És mi határozza meg a kockázat piaci árát? Hát semmi más mint a kockázat iránti kereslet és a kínálat, vagyis a kockázati preferenciák. Ennek megfelelően a matematikai pénzügyek a matematikai közgazdaságtan egyik speciális fejezete. Bár ez a besorolás „filozófiai" szempontból helyes, a terület mind matematikai hátterét, mind gyakorlati alkalmazhatóságát, verifikáltságát tekintve

[1] A dolgozatban leírtak az irodalomban közismertek, v.ö.: [4], mégis úgy gondolom, hogy érdemes a magyar közgazdászok figyelmét felhívni rájuk, ugyanis a bemutatott állítások talán nem elég szélés körben ismertek. Különösen annak hangsúlyozását tartom fontosnak, hogy a pénzügyi derivatívák árazása matematikai szempontból nem tekinthető a matematikai közgazdaságtan önálló fejezetének. Ugyancsak fontosnak tartom a Dalang—Morton—Willinger-tétel itt tárgyalt bizonyításnak bemutatását, ugyanis a legutóbbi időszakig a tételt nehéz tételként tartották számon. Az itt közölt bizonyítás, v.ö.: [5], lényegében elemei, ugyanis az analízis néhány egyszerűbb tételétől eltekintve semmilyen komolyabb eredményre nem támaszkodik. A dolgozat a Budapesti Közgazdaságtudományi és Államigazgatási Egyetemen tartott előadásaimra támaszkodik, és lényegében megegyezik a diszkrét idejű modelleket tartalmazó tananyagrésszel.

[2] A H kifizetés nem feltétlenül előnyös. A H mögötti kifizetés lehet negatív is.

igencsak elkülönül az általános közgazdasági elmélettől. A döntő különbség nem elméleti, filozófiai karakterű. Sokkal inkább az alkalmazások nagy számában és jellegében nyilvánul meg. Szokás a matematikai pénzügyek közgazdaságtanon belüli elkülönülését a preferenciákra való közvetlen hivatkozás hiányával indokolni, és azt mondani, hogy a pénzügyek a közgazdaságtan azon területe, ahol az árakat a preferenciákra való explicite hivatkozás nélkül is meg tudjuk határozni. Ez részben helyes, részben azonban félrevezető. Félrevezető annyiban, hogy miként alább hangsúlyozni fogjuk, a preferenciákra csak akkor nem szükséges hivatkozni, ha a piac teljes, de nem teljes piacokon elvileg csak a preferenciák ismeretében határozható meg az ár. Ugyanakkor a konkrét alkalmazásokon alapuló pénzügyi modellekben a piaci szereplők preferenciái a legritkább esetekben jelennek meg explicite. Ennek oka az alkalmazásokkal való élő, szoros kapcsolattartás, amely következtében a modellekben az olyan megfigyelhetelen paraméterek mint a preferenciák szerepeltetése, a nevetségesség elkerülése és a komolyság látszatának megőrzése végett, kerülendő.

Az alábbi tárgyalás során csak a diszkrét időhorizont esetére szorítkozom, vagyis felteszem, hogy a kereskedés csak véges számú, előre rögzített időpontokban lehetséges. Általában ugyancsak feltételezem, hogy a modellekben szereplő különböző valószínűségi változók, sztochasztikus folyamatok értékészlete véges[3]. Ennek a leegyszerűsített megközelítésnek túlbecsülhetetlen előnye, hogy matematikailag elemi. Miként látni fogjuk, a lineáris algebra, illetve a lineáris programozás legegyszerűbb, közismert tételein kívül semmilyen más komolyabb eredményre nem lesz szükségünk. Ezt azért érdemes hangsúlyozni, mert a matematikai pénzügyekkel kapcsolatos általános elképzelés szerint a terület matematikailag rendkívül igényes. Ez igaz is, de csak akkor, ha folytonos időparamétert tételezünk fel. Ha az időhorizont diszkrét és véges, akkor semmilyen matematikai nehézség nem lép fel. Ugyanakkor hangsúlyozni kell, hogy a folytonos időparaméter esetén elengedhetetlen martingálelmélet nyelvezetét a véges, diszkrét időhorizont tárgyalása során is érdemes használni, ugyanis egyrészt a martingálelmélet nyelvezete igen hatékonyan használható, másrészt a diszkrét idejű problémákon keresztül némi betekintést kaphatunk a jóval nehezebb, folytonos idejű tételek körébe. Nyomatékosan hangsúlyozzuk, hogy csakis terminológiai szinten hivatkozunk a martingálelméletre, annak állításaira érdemben nincs szükségünk, a martingálokra kimondott állítások mindegyike véges összegek elemi átrendezésével igazolható.

A matematikai pénzügyek bevezető tárgyalását általában a binomiális modellre szokás építeni. Ennek két előnye van. Egyrészt a modell igen egyszerű, másrészt a modellből kiindulva folytonos határátmenetként éppen a matematikai pénzügyek kedvenc sztochasztikus folyamatát, a Wiener-folyamatot kapjuk. De ami a

[3] Kivételt képez a Dalang—Morton—Willinger-tétel bizonyítását tartalmazó alpont.

tárgyalás előnye, az egyben a hátránya is, ugyanis mind a binomiális modell, mind a Wiener-folyamat esetén a modell teljes, vagyis az árazás elméletének legfontosabb kérdése, a piac teljességének hiánya automatikusan rejtve marad. A dolgozat nem titkolt célja a binomiális modell „kiszorítása” a magyar oktatási gyakorlatból, és annak bemutatása, hogy nem túl sok extra erőfeszítéssel egy jóval általánosabb és áttekinthetőbb és lényegretörőbb tárgyalási módhoz juthatunk.

0.1. Az egyperiódusos modell

Első lépésként az egyperiódusos modellt tárgyaljuk. Ekkor összesen két időpontunk van: a jelen és a jövő. A jelen időszak árait ismerjük, és ismerjük a termékek jövőbeli viselkedését, vagyis tudjuk a lehetséges jövőbeli árakat, kifizetéseket. Az alapvető kérdés a következő: a jövőbeli lehetséges kifizetések ismeretében a jelenlegi árak konzisztensek-e vagy sem?

0.1.1. Kockázatsemleges valószínűségek

Legyen adva M darab kockázatos pénzügyi instrumentum, w_m jelölje az m-edik instrumentum jelenlegi árát, és $s_m(\omega)$ az m-edik termék árát a jövőben, feltéve ha az eszköz árát befolyásoló valamilyen külső véletlen paraméter éppen az ω értéket veszi fel. Ha $(\omega_n)_{n=1}^{N}$ a lehetséges kimenetelek[4] vektora, akkor definiálhatjuk az $(N \times M)$-es

$$\mathbf{A} = (a_{ij}) \mathrel{\hat{=}} \begin{pmatrix} s_1(\omega_1) - w_1 & \cdots & s_M(\omega_1) - w_M \\ s_1(\omega_2) - w_1 & \cdots & s_M(\omega_2) - w_M \\ \vdots & \cdots & \vdots \\ s_1(\omega_N) - w_1 & \cdots & s_M(\omega_N) - w_M \end{pmatrix}$$

mátrixot. Vegyük észre, hogy a jelenlegi és a jövőbeli árakat kivontuk egymásból, vagyis a diszkontálást implicite elvégeztünk.

0.1 Definíció.
A $\mathbf{w}$ árvektor mellett akkor van arbitrázs, ha van olyan $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^M$ portfólióvektor, amelyre[5]

$$\mathbf{A}\mathbf{x} \geq \mathbf{0},$$

[4]Kimenetelek helyett szokás világállapotokról beszélni. Ennek oka, hogy hangsúlyozni szokás, hogy valójában a modellben nincsen definiálva semmilyen valószínűségi mező, ugyanis nincsen megadva az egyes ω_n kimenetelek valószínűsége.

[5]A matematikai közgazdaságtan szokásos jelölése mellett $\geq$ a szemi-nagyobb reláció jele, és megkülönböztetendő a $\geqq$ jeltől.

tehát amelyre egyetlen kimenetelre sem veszítünk, de legalább egy kimenetelre nyerünk.

Milyen feltételek mellett nincs lehetőség arbitrázsra, vagyis milyen feltételek mellett lehetetlen olyan portfóliót összeállítani, amely mellett pozitív valószínűséggel nyereséghez jutunk, de semmilyen körülmények között nem kell számolnunk veszteséggel? A lineáris programozás dualitási tételei segítségével megmutatjuk, hogy pontosan akkor nincsen arbitrázs, ha megadható olyan $\mathbf{q} > \mathbf{0}$ vektor, amelyre[6] $\mathbf{q}^*\mathbf{A} = \mathbf{0}^*$. Valóban, pontosan akkor nincsen arbitrázs, ha az $\mathbf{Ax} - \mathbf{y} \geqq \mathbf{0}$ egyenlőtlenségbe nem lehet szemipozitív $\mathbf{y}$ vektort írni, vagyis az

$$\begin{aligned} \mathbf{y} &\geqq \mathbf{0} \\ -\mathbf{Ax} + \mathbf{y} &= [-\mathbf{A}, \mathbf{E}] \begin{bmatrix} \mathbf{x} \\ \mathbf{y} \end{bmatrix} \leqq \mathbf{0} \\ \mathbf{1}^*\mathbf{y} &\to \max \end{aligned}$$

feladatnak van optimális megoldása, és az optimális megoldás értéke nulla. A duális feladat

$$\begin{aligned} \mathbf{q}^* &\geqq \mathbf{0} \\ -\mathbf{q}^*\mathbf{A} &= \mathbf{0} \\ \mathbf{q}^*\mathbf{E} &\geqq \mathbf{1}^* \\ \mathbf{q}^*\mathbf{0} &\to \min . \end{aligned}$$

A két feladatnak pontosan akkor van optimális megoldása, ha a duális feladatnak van lehetséges $\mathbf{q}$ megoldása[7]. Mivel a $\mathbf{q}$ pozitív, ezért alkalmas normalizálással feltehető, hogy valószínűségi mérték. A $\mathbf{q}$ pozitivitása fontos. A modellben ugyan explicite nem szerepel, de feltehetjük, hogy az $(\omega_n)_{n=1}^N$ kimenetelek halmazán adott egy $\mathbf{p}$ valószínűségi vektor, amely megadja az egyes ω_n kimenetelek objektív, vagy statisztikai valószínűségét. A folytonos modellek megértésének nehézsége nagyrészt abból adódik, hogy magának a modellnek a felírásához szükséges explicite hivatkozni az objektív valószínűségre[8], így a valószínűségi

[6] A továbbiakban megkülönböztetjük a sor és az oszlopvektorokat. A $*$ a transzponálás jele.

[7] Talán nem érdektelen hangsúlyozni, hogy a lineáris programozás dualitási tétele valójában a konvex halmazok szeparációs tételén alapszik. A szeparációs tételen kívül a bizonyítás során ki kell még használni a véges kúpok zártságát, amely ha nem is nehéz, de azért indoklásra szoruló állítás. A megjegyzés azért fontos, mert az általános eset bizonyítása, szintén szeparációs megfontolásokra épül, és a bizonyítás nehéz lépése az elválasztandó halmazok zártságának indoklása. Az általános esetet tartalmazó Dalang—Morton—Willinger-tétel bizonyításának érdemi lépése éppen a véges kúpok zártságát biztosító tétel általánosításának igazolása.

[8] Valószínűségre való hivatkozás nélkül nem lehet például a Wiener-folyamat fogalmát értelmezni.

mérték[9] cseréjét explicite tárgyalni kell. Az itt tárgyalt diszkrét esetben explicite nincsen mértékcsere, ugyanis szükségtelen az objektív mérték fogalmát bevezetni. A $\mathbf{q} > \mathbf{0}$ feltétel szerint nem változik a „releváns” kimenetelek halmaza. Ezt úgy szokás mondani, hogy a $\mathbf{q}$ valószínűség ekvivalens az eredeti $\mathbf{p}$ valószínűséggel, vagyis a nulla valószínűségű események a két valószínűségi mérték esetében megegyeznek.

0.2 Definíció.
A $\mathbf{q}$ *szokásos elnevezései:*

1. *kockázatsemleges mérték,*

2. *kockázatsemleges valószínűség,*

3. *martingálmérték.*

Az $\mathbf{S} \overset{\circ}{=} (s_j(\omega_i))$, $\mathbf{w} \overset{\circ}{=} (w_j)$ jelölésekkel $\mathbf{q}^*\mathbf{S} = \mathbf{w}^*$, ami úgy is interpretálható, hogy a jelenlegi árak a jövőbeli árak várható értéke, ahol a várható értéket a $\mathbf{q}$ kockázatsemleges mérték szerint kell venni. A várható érték jelölését bevezetve[10]

$$\mathbf{w} = \mathbf{M}^{\mathbf{q}}(\mathbf{S}),$$

ahol várható érték $\mathbf{M}$ operátorában a $\mathbf{q}$ felső index arra utal, hogy a várható értéket a $\mathbf{q}$ valószínűség szerint kell venni. Jelölje $\mathbf{p}$ az eredeti valószínűségeket. Vajon $\mathbf{p} = \mathbf{q}$? Ha $\mathbf{p}^*\mathbf{S} \neq \mathbf{q}^*\mathbf{S} = \mathbf{w}$, akkor van olyan m indexű oszlop, vagyis termék, ahol mondjuk

$$\mathbf{M}(\mathbf{s}_m) \overset{\circ}{=} \mathbf{M}^{\mathbf{p}}(\mathbf{s}_m) = \mathbf{p}^*\mathbf{s}_m > w_m.$$

Ha lehetőségünk van korlátlan sokszor lejátszani a szituációt, akkor a nagy számok törvénye miatt, némi pontatlanságot megengedve, átlagban nyerünk, pontosabban, ha van olyan piaci szereplő, aki kockázatsemleges, vagyis aki nem tud különbséget tenni a jövőbeli átlag és a jelenlegi érték között, akkor nincs egyensúly. A kockázatsemleges valószínűség elnevezést éppen ez indokolja.

[9]Emlékeztetünk, hogy a mérték szó alatt egyszerűen a valószínűség nagyságát megadó függvényt értjük. A véges számú kimenetelt tartalmazó modellek esetében a mértékelmélet egyetlen állítására sincs érdemben szükségünk.

[10]Érdemes hangsúlyozni, hogy látszólag valószínűségszámítási állítással van dolgunk, de ez tényleg csak a látszat. A $\mathbf{q}$ egy lineáris programozási feladat duálisának a megoldása, és mint ilyen hagyományos értelemben vett árnyékár.

0.1.2. Diszkontálás

Az előző alpontban feltettük, hogy a jelenértékre hozást már megoldottuk. Most ezt vizsgáljuk meg. Az arbitrázs definícióját módosítjuk, ugyanis a különböző időpontokhoz tartozó értékeket diszkontálás nélkül nem vonhatjuk ki egymásból. Továbbra is jelölje $\mathbf{w}$ a jelenlegi árakat, és $\mathbf{S}$ a jövőbeli véletlen kifizetések mátrixát. Az $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^M$ portfólió definíció szerint arbitrázs, ha az alábbi két egyenlőtlenség közül az egyik teljesül

$$\begin{aligned} \mathbf{Sx} &\geq \mathbf{0}, \mathbf{wx} \leqq 0, \\ \mathbf{Sx} &\geqq \mathbf{0}, \mathbf{wx} < 0. \end{aligned}$$

Szavakban a piacon akkor van arbitrázs, ha vagy kezdeti ráfordítás nélkül a jövőben legalább egy kimenetelre nyerhetünk, vagy negatív kezdeti ráfordítás mellett a jövőben semmilyen kimenetelre sem veszítünk. Ha most $\mathbf{A} \circeq \begin{pmatrix} \mathbf{S} \\ -\mathbf{w} \end{pmatrix}$, akkor a két feltétel összevonható, és definíció szerint a modellben akkor van arbitrázs, ha van olyan $\mathbf{x}$ portfólióvektor, amelyre $\mathbf{Ax} \geq \mathbf{0}$. A már bemutatott gondolatmenetet megismételve, pontosan akkor nincsen arbitrázs, ha van olyan $\mathbf{y} > \mathbf{0}$ vektor**,** hogy $\mathbf{y}^*\mathbf{A} = \mathbf{0}^*$. Az $\mathbf{A}$ szerkezete alapján, ha $\mathbf{y} \circeq (\mathbf{q},\lambda)$, akkor $\mathbf{q}^*\mathbf{S}-\lambda\mathbf{w}^*= \mathbf{0}^*$. A $\lambda \circeq \exp(rt) > 0$ jelöléssel

$$\mathbf{w}^* = \lambda^{-1}\mathbf{q}^*\mathbf{S} = \exp(-rt)\,\mathbf{q}^*\mathbf{S} = \exp(-rt)\,\mathbf{M}^{\mathbf{q}}(\mathbf{S})\,. \tag{1}$$

Ez éppen a kockázatsemleges árazás közismert formulája. Ha a piacon nincsen arbitrázs, akkor megadható olyan valószínűség, hogy a jelenlegi ár éppen a jövőbeli árak várható értékének jelenértéke. Érdemes nyomatékosan hangsúlyozni, hogy a diszkonttényező az $\mathbf{A}$ mátrix elemeitől függ és a „rendszer” által meghatározott. Ha a diszkonttényezőt valamilyen „kamatlábnak" vagy „növekedési ütemnek” tekintjük, akkor ahhoz a közgazdaságtanban megszokott összefüggéshez jutunk, miszerint a növekedési ütem a technológiai mátrix elemeinek függvénye[11]. Milyen közgazdasági interpretáció adható a λ diszkonttényezőnek?. Ha az egyik termék, mondjuk a 0 indexű kötvény, vagyis[12] a kifizetése mindig 1, akkor[13] felhasználva, hogy a $\mathbf{q}$ valószínűségi vektor $\mathbf{q}^T\mathbf{s}_0 = \mathbf{q}^T\mathbf{1} = 1$, így

$$w_0 = \lambda^{-1} \circeq \exp(-rt)\,,$$

[11] V.ö.: Neumann-féle növekedési modell.

[12] A kötvény kifejezést most a matematikai pénzügyek terminológiája szerint használjuk, vagyis a biztos befektetést nevezzük kötvénynek. Természetesen biztos befektetés a valóságban nincsen, minden pénzügyi eszköz hordoz kockázatot, ha mást nem, akkor inflációs kockázatot. Ennek megfelelően a kötvény helyett szokás az ármérce elnevezést is használni, vagyis a kötvény tekinthető olyan terméknek, amely segítségével fejezzük ki a többi termék árát.

[13] A továbbiakban a 0 index mindig kötvényre utal.

vagyis a kötvény jelenlegi ára éppen a diszkonttényező reciproka. A továbbiakban az egyszerűség kedvéért mindig feltesszük, hogy a 0-dik oszlop mindig az azonosan 1 vektor. Erre tulajdonképpen nincsen szükség, de mivel a feltétel közgazdaságilag igen kézenfekvő, a tárgyalást pedig valamivel egyszerűbbé teszi, ezért a feltétellel élni fogunk. A feltétel egyik fontos következménye, hogy a λ nem függ a $\mathbf{q}$ kockázatsemleges valószínűségtől. Érdemes hangsúlyozni, hogy a „diszkontáló" terméknek, vagyis a nulladik terméknek nem kellene feltétlenül „kötvénynek" lenni, vagyis az értéke az egyes kimenetelekre nem kell, hogy konstans legyen. Amenyiben a nulladik termék értéke nem konstans, akkor a $\lambda w_0 = \mathbf{M}^{\mathbf{q}}(\mathbf{s}_0)$ formulából kiindulva határozhatjuk meg a diszkonttényezőt, amely persze ilyenkor függhet a $\mathbf{q}$ kockázatsemleges valószínűségtől.

0.1.3. A piac teljessége

Tegyük fel, hogy az $\mathbf{S}$-nek túl kevés a lineárisan független sora[14], vagyis túl sok a véletlen kimenetel. Ilyenkor azt mondjuk, hogy a piac, pontosabban a modell nem teljes.

0.3 Definíció.
Az $\mathbf{S}$ mátrix által reprezentált egyperiódusos modellt nem teljesnek mondjuk, ha $\left\{\mathbf{Sx} : \mathbf{x} \in \mathbb{R}^M\right\} \neq \mathbb{R}^N$. Szavakban a modell nem teljes, ha van olyan $\mathbf{h} \in \mathbb{R}^N$ véletlen kifizetés, amely nem „replikálható" az $\mathbf{S}$ mátrixban szereplő véletlen kifizetésekből összeállított portfólióval, vagyis van olyan $\mathbf{h}$ „véletlen követelés", amely az $\mathbf{S}$ segítségével nem replikálható.

A lineáris algebra terminológiájával a piac pontosan akkor nem teljes, ha az $\mathbf{S}$ oszlopvektorai által kifeszített tér nem egyezik meg az $\mathbb{R}^N$ térrel, vagyis az $\mathbf{S}$ oszlopvektor terének dimenziója kisebb mint N. Ha a piac teljes, akkor az oszlopvektor tér dimenziója N, vagyis az $\mathbf{S}$ sorai lineárisan függetlenek, következésképpen a $\mathbf{q}^*\mathbf{S}-\lambda\mathbf{w}^*= \mathbf{0}$ egyenletnek adott $\mathbf{w}$ esetén egyetlen olyan $(\mathbf{q},\lambda)$ megoldása van, amelyre nézve a $\mathbf{q}$ koordinátáinak összege egy, így teljes piac esetén a kockázatsemleges valószínűség egyértelmű[15]. Megfordítva, ha a kockázatsemleges valószínűség egyértelmű, akkor a piac teljes, ugyanis ha az $\mathbf{S}$ sorai nem feszítenék ki a teljes $\mathbb{R}^N$ teret, akkor alkalmas $\mathbf{u} \neq \mathbf{0}$ vektorral $\mathbf{u}^*\mathbf{S} = \mathbf{0}$. Alkalmas θ esetén $\mathbf{q} + \theta\mathbf{u} > \mathbf{0}$. A $\mathbf{q} + \theta\mathbf{u}$ elemeit normalizálva a $\mathbf{q}$ mellett készíthetünk egy olyan másik $\mathbf{r}$ valószínűségi vektort, amelyre $\mathbf{r}^*\mathbf{S}-\mu\mathbf{w}^*= \mathbf{0}$, így a kockázatsemleges valószínűség nem lesz egyértelmű. Összefoglalva: az egyperiódusos modellben a piac pontosan akkor teljes, ha a kockázatsemleges valószínűség egyértelmű.

[14] Vagyis az $\mathbf{S}$ rangja kisebb mint a sorvektorok, vagyis a véletlen kimenetelek száma N.

[15] Ha nem így lenne, akkor a két $\mathbf{q}$ melletti egyenletet egymásból kivonva és felhasználva, hogy a λ és így a $\lambda\mathbf{w}$ nem függ a kockázatmentes valószínűségtől ellentmondást kapnánk.

0.1.4. Származtatott termékek árazása

Most vegyük azt az esetet, amikor az $\mathbf{S}$-nek túl sok oszlopa van, vagyis amikor az $\mathbf{S}$ oszlopai összefüggnek. Legyen az első K vektor az oszlopvektorok egy bázisa[16]. Mivel egy bázisba mindig bevihetünk egy nem nulla vektort, feltételezzük, hogy a kötvény mindig eleme a bázisnak, vagyis a kötvény mindig alaptermék, így a diszkonttényező független a bázistól. Az első K terméket alapterméknek, vagy bázisterméknek mondjuk, a többi terméket származtatott, vagy derivatív terméknek. Evidens módon a származtatott, alaptermék megkülönböztetés relatív és bázisfüggő. Ha az $\mathbf{s}_k$ származtatott, akkor alkalmas $(\delta_j)_{j=1}^K$ konstansokkal $\mathbf{s}_k = \sum_{j=1}^K \delta_j \mathbf{s}_j$, amiből, ha nincsen arbitrázs, $w_k = \sum_{j=1}^K \delta_j w_j$, ugyanis az (1) árazó képlet alapján

$$w_k = \lambda^{-1}\mathbf{q}^*\mathbf{s}_k = \lambda^{-1}\mathbf{q}^*\sum_{j=1}^K \delta_j \mathbf{s}_j = \sum_{j=1}^K \delta_j \lambda^{-1}\mathbf{q}^*\mathbf{s}_j = \sum_{j=1}^K \delta_j w_j.$$

Ha ismerjük az alaptermékek árát, és ismerjük a δ_j együtthatókat, akkor kiszámolhatjuk a származtatott termékek árát. Vegyük észre, hogy mivel az alaptermékek definíció szerint bázist alkotnak, a $(\delta_j)_{j=1}^K$ koordináták egyértelműek, tehát az alaptermékek ára egyértelműen meghatározza a származtatott termékek árát. Természetesen ez a szabály az arbitrázs kizárásának feltételén múlik. Ha w_k egy származtatott termék ára és mondjuk $w_k > \sum_{j=1}^K \delta_j w_j$, akkor a k-dik terméket a $(\delta_j)_{j=1}^K$ súlyokkal szintetikusan előállítva biztos $w_k - \sum_{j=1}^K \delta_j w_j$ nyereséghez juthatunk. Vegyük az alaptermékek által meghatározott első K terméket, és a $\mathbf{w}_K^* = \lambda^{-1}\mathbf{q}_K^*\mathbf{S}_K$ bázis alrendszerben határozzuk meg a kockázatsemleges valószínűségeket. Ha k származtatott termék, akkor

$$\begin{aligned} w_k &= \sum_{j=1}^K \delta_j w_j = \lambda^{-1}\sum_{j=1}^K \delta_j \mathbf{q}_K^*\mathbf{s}_j = \lambda^{-1}\mathbf{q}_K^*\sum_{j=1}^K \delta_j \mathbf{s}_j = \\ &= \lambda^{-1}\mathbf{q}_K^*\mathbf{s}_k \stackrel{\circ}{=} \lambda^{-1}\mathbf{M}^{\mathbf{q}_K}(\mathbf{s}_k) \end{aligned}$$

tehát az árazási formulában szereplő kockázatsemleges valószínűségeket elegendő a bázistermékekkel kiszámolni.

0.1.5. Származtatott termékek árazása nem teljes piacokon

A származtatott termékek árazási problémája a következő: Tegyük fel, hogy az $\mathbf{S}$ piacon nincsen arbitrázs, és adott egy $\mathbf{h}$ véletlen kifizetés vektor, vagyis adott az

[16] A teljes piac, illetve a bázistermékek legegyszerűbb esete, ha az $\mathbf{S}$ tartalmazza az $\mathbf{E}$ egységmátrixot. Az ide tartozó termékeket Arrow—Debreu-termékeknek szokás nevezni. Világos, hogy minden termék az Arrow—Debreu-termékek származtatott terméke.

$\mathbb{R}^N$ egy eleme. Milyen árat kell adni a $\mathbf{h}$ terméknek ahhoz, hogy a $\mathbf{h}$ termékkel kiegészített $(\mathbf{S},\mathbf{h})$ piac arbitrázsmentes maradjon? Ha a $\mathbf{h}$ előállítható a bázistermékek lineáris kombinációjaként, akkor a válasz evidens. Ha $\mathbf{h}=\sum_{j=1}^{K}\delta_j\mathbf{s}_j$, akkor a $\mathbf{h}$ egyedül lehetséges ára $\sum_{j=1}^{K}\delta_j w_j$. Mi történik azonban akkor, ha a $\mathbf{h}$ nem állítható elő a már beárazott termékek lineáris kombinációjaként? Ha a piac nem teljes, akkor ilyen $\mathbf{h}$ vektor megadható. Ha $\mathbf{q}$ egy kockázatsemleges valószínűségi mérték és a $\mathbf{h}$ árát a

$$\lambda^{-1}\mathbf{q}^*\mathbf{h} \stackrel{\circ}{=} \boldsymbol{\lambda}^{-1}\sum_{j=1}^{N} q_j h_j = \lambda^{-1}\mathbf{M}^{\mathbf{q}}(\mathbf{h})$$

értékkel definiáljuk, akkor továbbra is érvényben marad az (1), vagyis a piacon az új termékkel nem vezetünk be arbitrázst. Ugyanakkor mivel a $\mathbf{q}$ nem egyértelmű, a $\mathbf{h}$ ára sem számolható ki egyértelműen, vagyis pusztán az arbitrázsmentesség feltételére építve a derivatív árazás problémája nem oldható meg. A matematikai pénzügyek valódi problémája nem általában a származtatott termékek árazása, hanem a nem teljes piacon való árazás. A bevezető pénzügyi kurzusokon tárgyalt modell, nevezetesen a binomiális, illetve a binomiális modell folytonos általánosításának tekinthető Wiener-folyamatra épülő úgynevezett Black—Scholes modell teljes, így az árazás kérdése triviálisan megoldható. Az általános esetben azonban a tárgyalt módszer nem használható. Ezt azért kell hangsúlyozni, mert miként a bevezetőben említettük, a pénzügyi matematikával való első ismerkedéskor hajlamosak vagyunk azt gondolni, hogy a pénzügyek, szemben a közgazdaságtan egyéb területeivel, nem épít a hasznossági függvény, illetve az általános egyensúlyelmélet hagyományos fogalmaira, és az árazás problémáját a preferenciákra való hivatkozás nélkül oldja meg. Sajnos ez nem így van. A hasznossági függvényektől független megközelítés csak teljes piac esetén működik, és az általános esetben pusztán az arbitrázs lehetetlenségére alapozva nem adható meg árazó képlet.

0.2. Többperiódusos modellek

Térjünk rá a többperiódusos modellek ismertetésére. Első lépésként röviden emlékeztetünk a feltételes várható érték, illetve a martingál fogalmára. Hangsúlyozzuk, hogy a martingálelméletet, illetve a feltételes várható érték fogalmát csak terminológiaként használjuk, a valószínűségszámítás ezen nevezetes fogalmainak egyetlen mélyebbnek mondható tulajdonságát sem fogjuk használni.

0.2.1. Feltételes várható érték, martingálok

Először néhány valószínűségszámítási fogalmat vezetünk be. Legyen $\Omega \circeq \{\omega_k\}_{k=1}^N$ a kimenetelek, világállapotok véges halmaza, $\mathbb{T} \circeq \{0, 1 \ldots T\}$ a lehetséges időszakok úgyszintén véges halmaza. A martingálok definiálásához a végesség feltételére általában nincs szükség, de a gondolatmenet egyszerűsítése céljából csak erre az elemi esetre szorítkozunk. Jelölje $\mathcal{A}$ a lehetséges eseményeket, vagyis az Ω megengedett részhalmazait. Az $(\Omega, \mathcal{A})$ hasznos szemléltetése a döntési fa. Egy ω_k a $t = 0$ időponttól a $t = T$ végpontig lefutó teljes út[17]. Egy $A \in \mathcal{A}$ esemény például adott csomóponton átmenő utak halmaza, vagy megadott csomópontokon átmenő utak halmaza. Az $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$ hármasról feltesszük, hogy kielégíti az elemi valószínűségszámítás szokásos megkötéseit.

Ha ξ az Ω halmazon értelmezett függvény, akkor várható értéken az[18]

$$\mathbf{M}(\xi) \circeq \sum_{i=1}^{N} \xi(\omega_i)\, \mathbf{P}(\{\omega_i\}) \circeq \int_\Omega \xi d\mathbf{P}$$

összeget értjük. Mi van akkor, ha a $\mathbf{P}(\{\omega_i\})$ értelmetlen, vagy ami sokkal fontosabb értékét a rendelkezésünkre álló információk alapján nem ismerjük. Legyen $(A_n)_{n=1}^K$ az Ω partíciója, vagyis $A_n \cap A_m = \emptyset$, ha $n \neq m$, és $\Omega = \cup_n A_n$. Tegyük fel, hogy az $(A_n)_n$ elemein a ξ ismert. Várható értéken ekkor az

$$\mathbf{M}(\xi) = \sum_{n=1}^{K} \xi(\omega_n)\, \mathbf{P}(A_n), \quad \omega_n \in A_n$$

súlyozott átlagot értjük, feltéve, hogy az összeg nem függ az $\omega_n \in A_n$ választásától, vagyis a ξ az $(A_n)_n$ partíció elemein konstans. Ilyenkor azt mondjuk, hogy a ξ mérhető az $(A_n)_n$ partícióra, illetve az $(A_n)_n$ események által generált eseménytérre, σ-algebrára nézve. Az $(A_n)_n$ partícióhoz tartozó σ-algebra az $(A_n)_n$ halmazok összes lehetséges véges egyesítéseinek halmaza. Legegyszerűbben $(A_n)_n$ mérhető függvényt úgy kaphatunk, ha átlagoljuk a ξ-t az A_n eseményeken[19]:

$$\begin{aligned}\mathbf{M}(\xi) &= \sum_{n=1}^{K} \mathbf{M}\left(\xi\chi_{A_n}\right) = \sum_{n=1}^{K} \frac{\mathbf{M}\left(\xi\chi_{A_n}\right)}{\mathbf{P}(A_n)} \mathbf{P}(A_n) \circeq \\ &= \sum_{n=1}^{K} \eta(\omega_n)\, \mathbf{P}(A_n).\end{aligned}$$

[17] Vagyis az összeölelkező fa nem megengedett, vagy legalábbis nem szerencsés fogalom.

[18] Az alábbiakban az integráljelet gyakran fogjuk véges összegek jelölésére használni. Természetesen csakis jelölésről van szó, és az integráljeleket az olvasó, ha úgy tetszik, átugorhatja.

[19] Értelemszerűen χ_A az A halmaz indikátorváltozója, vagyis $\chi_A(\omega) = 1$, ha $\omega \in A$, és $\chi_A(\omega) = 0$, ha $\omega \notin A$.

Az átlagokat megadó η függvényt a ξ feltételes várható értékének mondjuk. Az elnevezést az indokolja, hogy parciálisan, valamifajta feltétel szerint, már elvégeztük az átlagolást. Ha $\mathcal{F}$ jelöli az $(A_n)_n$ partíció által definiált eseményteret, akkor az

$$\eta \mathrel{\hat{=}} \mathbf{M}(\xi \mid \mathcal{F})$$

jelöléssel fogunk élni. Az η az egyetlen olyan $\mathcal{F}$-mérhető változó, vagyis az egyetlen olyan változó, amely konstans az $\mathcal{F}$-et generáló partíció elemein, és amelyre[20]

$$\mathbf{M}(\mathbf{M}(\xi \mid \mathcal{F})\chi_F) \mathrel{\hat{=}} \mathbf{M}(\eta\chi_F) = \mathbf{M}(\xi\chi_F), \quad \forall F \in \mathcal{F}.$$

A várható érték természetesen $\mathbf{P}$ szerinti integrál, így a fenti egyenlőség

$$\int_F \mathbf{M}(\xi \mid \mathcal{F})\, d\mathbf{P} = \int_F \xi d\mathbf{P}, \quad \forall F \in \mathcal{F}$$

módon is írható. Nyomatékosan hangsúlyozni kell, hogy az integrálokra teljesülő egyenlőség nem határozza meg a feltételes várható értéket. Az $\mathbf{M}(\xi \mid \mathcal{F})$ kiemelkedően fontos tulajdonsága, hogy $\mathcal{F}$-mérhető, vagyis az $\mathcal{F}$ eseményhalmazban szereplő események tartalmazzák az $\mathbf{M}(\xi \mid \mathcal{F})$ segítségével megfogalmazható összes eseményt. Az $\mathcal{F}$ feltételi eseménytér általában valamilyen t időpontig megfigyelt, vagy elvileg megfigyelhető eseményekből áll. Ilyenkor az $\mathbf{M}(\xi \mid \mathcal{F})$ a ξ valamilyen későbbi időpontban bekövetkező realizációjára vonatkozó legjobb olyan becslés amit a t időpontban rendelkezésre álló információ alapján el lehet végezni.

0.4 Állítás.
A definíció alapján könnyen belátható[21], hogy a feltételes várható érték a következő tulajdonságokkal rendelkezik:

1. *Rendezéstartó, vagyis ha* $\xi \geqq 0$, *akkor* $\mathbf{M}(\xi \mid \mathcal{F}) \geqq 0$.
2. *Lineáris, vagyis* $\mathbf{M}(\alpha\xi + \beta\eta \mid \mathcal{F}) = \alpha\mathbf{M}(\xi \mid \mathcal{F}) + \beta\mathbf{M}(\eta \mid \mathcal{F})$.
3. *Ha ξ $\mathcal{F}$-mérhető, vagyis ha az $\mathcal{F}$-et az $(A_n)_n$ partíció generálja, akkor a* $\xi = \mathbf{M}(\xi \mid \mathcal{F})$ *konstans az $(A_n)_n$ halmazokon.*
4. *Ha $\mathcal{G} \subseteq \mathcal{F}$, vagyis az $\mathcal{F}$ a $\mathcal{G}$ elemeinek további partíciója, akkor*

$$\mathbf{M}(\mathbf{M}(\xi \mid \mathcal{G}) \mid \mathcal{F}) = \mathbf{M}(\mathbf{M}(\xi \mid \mathcal{F}) \mid \mathcal{G}) = \mathbf{M}(\xi \mid \mathcal{G}),$$

[20] Az összefüggést az általános esetben szokás a feltételes várható érték definíciójának is tekinteni.

[21] Ha az olvasó a megadott szabályokat nem ismeri, célszerű, ha azok tartalmát alaposan meggondolja. Hangsúlyozzuk, hogy mivel az Ω alaptér véges számú kimenetelből áll, ezért az állítások mindegyike egyszerű összegek átrendezését tartalmazza.

tehát a „durvább partíció mindig győz". Erre az igen fontos tulajdonságra toronyszabályként szokás hivatkozni. Vegyük észre, hogy a toronyszabály tekinthető a teljes valószínűség tételének általánosításának, ezért szokás teljes várható érték tételnek is mondani.

5. *Ha ξ $\mathcal{F}$-mérhető és korlátos, η tetszőleges, akkor* $\mathbf{M}(\xi\eta \mid \mathcal{F}) = \xi\mathbf{M}(\eta \mid \mathcal{F})$. *A feltételes várható érték ezen tulajdonságára mint kiemelési szabály szokás hivatkozni.*

Legyen $(\mathcal{F}_n)_{n\in\mathbb{T}}$ eseményterek sorozata, és tegyük fel, hogy $\mathcal{F}_n \subseteq \mathcal{F}_{n+1}$, vagyis tegyük fel, hogy a lehetséges események halmaza monoton nő. Ekkor azt mondjuk, hogy az $(\mathcal{F}_n)_n$ sorozat egy filtráció. Filtrációra legegyszerűbb példa, amikor a filtrációhoz tartozó partíciók egymás finomításai, vagyis a rákövetkező partíciót, az előző további osztásával, finomításával kapjuk. Ez éppen a döntési fával ábrázolható a legjobban. A binomiális modellben minden időpontban minden csúcspontból két ág indul, vagyis a filtrációt megadó partíció minden halmazát minden időpontban két nem üres részre bontjuk. Nincsen azonban semmi akadálya annak, hogy az egyes időpontokban bizonyos csúcspontokból csak egy, más csúcspontokból pedig több ág is kiinduljon. Ennek az általános helyzetnek a leírását, kódolását tartalmazza a filtráció. A filtráció szokásos interpretációja szerint ahogyan időben haladunk előre, egyre több eseményt tudunk megkülönböztetni, így az információ felhalmozódásával a lehetséges események halmaza bővül. Ha $(\xi_n)_{n\in\mathbb{T}}$ olyan sorozat, amelyre minden n-re a ξ_n változó $\mathcal{F}_n$-mérhető, akkor azt mondjuk, hogy a $(\xi_n)_n$ sorozat adaptált az $(\mathcal{F}_n)_n$ filtrációra. A döntési fa terminológiájával ez azt jelenti, hogy a folyamat értékei a csúcspontokba vannak írva.

0.5 Definíció.
A $(\xi_t, \mathcal{F}_t)_{t\in\mathbb{T}}$ adaptált sorozat martingál, ha minden $s > t$ esetén

$$\xi_t = \mathbf{M}(\xi_s \mid \mathcal{F}_t).$$

Szemléletesen egy döntési fa martingál, ha a csúcspontokba írt érték mindig a csúcspontban szereplő szétágazás által meghatározott következő csúcspontok átlaga, ahol az átlagot az átmenetvalószínűségek szerint kell venni[22]. Diszkrét modellekben, vagyis ahol az időhorizont véges, a teljes várható érték tétel miatt minden martingál felírható $\xi_t = \mathbf{M}(\xi_T \mid \mathcal{F}_t)$ módon, ahol T a figyelembe vett időszak utolsó időpontja. Másképpen fogalmazva véges időpontból álló időhorizont esetén a martingálok értéke minden időpontban végállapotban definiált valószínűségi változó rekurzív visszaátlagolásaként írható fel.

[22] Vegyük észre, hogy egy valószínűségi mező akkor adott, ha az összes út valószínűsége adott, amikor is az összes csúcspont valószínűsége adott, vagyis adottak az átmenetvalószínűségek.

0.6 Definíció.
A $\mathbb{Q}$ valószínűségi mérték a $(\xi_t, \mathcal{F}_t)_{t\in\mathbb{T}}$ adaptált sorozatra nézve martingálmérték, ha a $\mathbb{Q}$ alatt a sorozat martingál.

0.2.2. Nincs diszkontálás

A többperiódusú modellek annyiban mások, mint az egyperiódusú modellek, hogy az arbitrázs definíciója némiképpen bonyolultabb. Az egyszerűség kedvéért a mátrixokra utaló félkövér jelölést elhagyjuk, ugyanis majd a mátrixokból álló mátrixokat fogjuk félkövér módon jelölni. Mindig feltesszük, hogy adott egy $(\mathcal{F}_t)_{t=0}^{T}$ filtráció, és egy adaptált $(S(t))_{t=0}^{T}$ alapfolyamat. Minden $S(t)$ N sorból és M oszlopból álló mátrix. Szerencsésebb azonban, ha az $S(t)$-t M darab Ω-án értelmezett függvénynek képzeljük el. Mivel elhagytuk a mátrixokra utaló félkövér jelölést, illetve nem írjuk ki az $S(t)$ függvények argumentumait, ezért a jelölésből közvetlenül nem teljesen világos, hogy az $S(t)$ olyan mátrix, amelynek annyi sora, illetve annyi oszlopa van, amennyi a lehetséges világállapotok, illetve a modellben levő termékek száma. Egyenlőre ne foglalkozzunk a diszkontálással, és az $S(t)$ jelöljön értékpapír árakat. Jelölje $\theta(t)$ a $[t-1, t)$ szakaszon tartott portfóliót. Miként az $S(t)$, a $\theta(t)$ is mátrix, illetve a kimenetelektől függő függvény. A θ értelmezési tartománya $\mathbb{T}\setminus\{0\}$. Legyen $c_\theta(t)$ a t időpontban a θ stratégia által generált nyeremény összege. Mivel a diszkontálástól eltekintettünk, ezért az egyes időszakokban generált nyereményeket össze lehet adni. A c_θ értelmezési tartománya $\mathbb{T}$. Evidens megfontolások alapján[23]

$$\begin{aligned} c_\theta(0) &\mathrel{\hat{=}} -S(0)\,\theta(1) \\ c_\theta(t) &\mathrel{\hat{=}} S(t)\left[\theta(t) - \theta(t+1)\right], \quad t = 1, 2, \ldots, T-1 \\ c_\theta(T) &\mathrel{\hat{=}} S(T)\,\theta(T). \end{aligned}$$

Ha definíció szerint

$$\theta(0) \mathrel{\hat{=}} \theta(T+1) \mathrel{\hat{=}} 0,$$

akkor a nyeremény alakulását leíró egyenletrendszer

$$c_\theta(t) \mathrel{\hat{=}} S(t)\left[\theta(t) - \theta(t+1)\right], \quad t \in \mathbb{T}.$$

A jelölés anomáliáit talán az magyarázza, hogy el akarjuk kerülni a $\theta(-1)$ változót, és explicite hangsúlyozni akarjuk a θ és az S folyamatok mérhetőségi, információs struktúrájának eltérő voltát. A bevételi oldal $S(t)\,\theta(t)$, a kiadási oldal $S(t)\,\theta(t+1)$. A $t = 0$ pontban még nincs bevétel, a $t = T$ pontban már nincs kiadás. A $\theta(t)$ érték a $[t-1, t)$ szakaszon tartott portfólió, amelyről a $t-1$ pontban

[23] Ügyeljünk a szorzások pontos tartalmára. A $c_\theta(t)$ valószínűségi változó, vagyis vektor.

kell dönteni, vagyis a $\theta(t)$ $\mathcal{F}_{t-1}$ mérhető. Erre a tulajdonságra a sztochasztikus folyamatok irodalmában mint előrejelezhetőség szokás hivatkozni. Vezessük be a V_θ értékfolyamatot, amely azt mutatja, hogy az időszak elején, az újrabefektetés előtt mennyi volt a pozíció kumulált eredménye.

$$\begin{aligned} V_\theta(T) &\mathrel{\hat{=}} \sum_{t=0}^{T} c_\theta(t) = \\ &= -S(0)\theta(1) + S(1)[\theta(1)-\theta(2)] + \ldots + S(T)\theta(T) = \\ &= \sum_{t=1}^{T} [S(t)-S(t-1)]\theta(t). \end{aligned}$$

Ha $t=0$, akkor $V_\theta(0) \mathrel{\hat{=}} 0$.

0.7 Definíció.
A többperiódusos modellben akkor van arbitrázs, ha van olyan θ előrejelezhető stratégia, amelyre $V_\theta(T) \geq 0$.

0.8 Tétel. (Az eszközárazás első alaptétele)
A következő állítások ekvivalensek:

1. *nincs arbitrázs,*
2. *megadható olyan $\mathbf{Q} > \mathbf{0}$ valószínűség a kimenetelek Ω terén, hogy az S folyamat martingál a $\mathbf{Q}$ alatt.*

Bizonyítás: Ha létezik $\mathbf{Q}$ martingálmérték, és van arbitrázs, akkor, felhasználva, hogy $\mathbf{Q} > \mathbf{0}$ és $V_\theta(T) \geq 0$, illetve hogy a θ előrejelezhető és ezért használható a kiemelési szabály

$$\begin{aligned} 0 &< \mathbf{M}^{\mathbf{Q}}(V_\theta(T)) \mathrel{\hat{=}} \mathbf{M}^{\mathbf{Q}}\left(\sum_{k=1}^{T}[S(k)-S(k-1)]\cdot\theta(k)\right) = \\ &= \sum_{k=1}^{T}\mathbf{M}^{\mathbf{Q}}\big(\mathbf{M}^{\mathbf{Q}}([S(k)-S(k-1)]\cdot\theta(k) \mid \mathcal{F}_{k-1})\big) = \\ &= \sum_{k=1}^{T}\mathbf{M}^{\mathbf{Q}}\big(\mathbf{M}^{\mathbf{Q}}(S(k)-S(k-1) \mid \mathcal{F}_{k-1})\cdot\theta(k)\big) = \\ &= \sum_{k=1}^{T}\mathbf{M}^{\mathbf{Q}}(0\cdot\theta(k)) = 0, \end{aligned}$$

ami lehetetlen. Megfordítva, tegyük fel, hogy nincs arbitrázs. Vezessük be az

$$\mathbf{A} \triangleq ([S(T) - S(T-1)], [S(T-1) - S(T-2)], \ldots)$$

mátrixot, és jelölje E az olyan portfólió stratégiákat, amelyek elemei előrejelezhetőek. Mivel az előrejelezhető stratégiák triviálisan lineáris alteret alkotnak, ezért az E véges dimenziós altér. Ha nincsen arbitrázs, akkor az

$$\mathbf{Ax} \geq \mathbf{0}, \quad \mathbf{x} \in E,$$

egyenlet nem oldható meg. Ez másképpen fogalmazva azt jelenti, hogy a

$$K \triangleq \mathbf{A}E \triangleq \{\mathbf{Ax} : \mathbf{x} \in E\}$$

metszete a $\mathbb{R}_+^N$ kúppal csak a nulla vektorból áll, vagyis $K \cap \mathbb{R}_+^N = \{0\}$. A K az E véges dimenziós altér lineáris leképezéssel vett képe, vagyis maga is véges dimenziós altér, tehát zárt, konvex halmaz, amely a feltétel szerint diszjunkt a

$$P_{N-1} \triangleq \left\{\mathbf{x} \geq \mathbf{0} : \sum_{n=1}^{N} x_n = 1\right\}$$

halmaztól. A konvex halmazok szeparáció tétele alapján[24] van olyan $\mathbf{q}$ vektor, amelyre

$$\mathbf{q}^*\mathbf{k} < \mathbf{q}^*\mathbf{s}, \quad \mathbf{k} \in K, \mathbf{s} \in P_{N-1}. \tag{2}$$

Mivel a $\mathbf{k} = \mathbf{0}$ megengedett, ezért a $\mathbf{q}^*\mathbf{s}$ mindig pozitív, vagyis mivel a P_{N-1} tartalmazza az egységvektorokat, ezért $\mathbf{q} > \mathbf{0}$. Ugyanakkor mivel a K altér, ezért triviálisan $\mathbf{q}^*\mathbf{k} = 0$, ugyanis ha valamilyen $\mathbf{k} \in K$ vektorra $\mathbf{q}^*\mathbf{k} \neq 0$, akkor mivel minden λ skalárra $\lambda\mathbf{k} \in K$, a (2) nem teljesülhet. Az elmondottak szerint tehát van olyan $\mathbf{q} > \mathbf{0}$, amelyre

$$\mathbf{q}^*\mathbf{Ax} = 0, \quad \mathbf{x} \in E.$$

A $\mathbf{q}$ tekinthető $\mathbf{Q} > \mathbf{0}$ valószínűségnek, és $0 = \mathbf{q}^*\mathbf{Ax} = \mathbf{M}^{\mathbf{Q}}(\mathbf{Ax})$ minden $\mathbf{x} \in E$ előrejelezhető stratégiára. Speciálisan, ha $F \in \mathcal{F}_{t-1}$ tetszőleges, akkor az

$$\mathbf{x} = (\mathbf{0}, \ldots, \mathbf{0}, \chi_F, \mathbf{0}, \ldots \mathbf{0}),$$

stratégia sorozat előrejelezhető, tehát

$$0 = \mathbf{M}^{\mathbf{Q}}(\mathbf{Ax}) = \mathbf{M}^{\mathbf{Q}}([S(t) - S(t-1)]\chi_F) = 0,$$

[24] A P_{N-1} kompakt, tehát a szeparáció szigorúan teljesül.

következésképpen

$$\mathbf{M}^{\mathbf{Q}}\left(S\left(t\right)\chi_{F}\right)=\mathbf{M}^{\mathbf{Q}}\left(S\left(t-1\right)\chi_{F}\right),\quad F\in\mathcal{F}_{t-1},$$

vagyis a feltételes várható érték definíciója alapján

$$S\left(t-1\right)=\mathbf{M}^{\mathbf{Q}}\left(S\left(t\right)\mid\mathcal{F}_{t-1}\right),$$

tehát az S a $\mathbf{Q}$ mérték mellett martingál.

□

0.2.3. Diszkontálás és önfinanszírozó portfóliók

Most térjünk rá a diszkontálás kérdésére, vagyis tegyük fel, hogy az egyes időszakok jövedelmét nem lehet összeadni. Legyen ismét a 0 indexhez tartozó termék kötvény, $S_0\left(t\right)$ legyen a kötvény ára a t időpontban. Az egyszerűség kevéért tegyük fel, hogy $S_0\left(0\right)=1$. Miként az egyperiódusos modellben, most is feltesszük, hogy minden t időpontban $S_0\left(t\right)>0$. Evidens módon a diszkontált ár

$$\overline{S}\left(t\right)\overset{\circ}{=}\frac{1}{S_0\left(t\right)}S\left(t\right).$$

A továbbiak során a felülvonás mindig a diszkontálásra utal. Az árváltozásokból származó nyeremények diszkontált összege

$$\sum_{t=1}^{T}\left[\overline{S}\left(t\right)-\overline{S}\left(t-1\right)\right]\theta\left(t\right).\tag{3}$$

Vegyük észre, hogy a diszkontálás miatt az egyes összeadandó tényezők azonos időpontra vonatkoznak, így az összeg közgazdaságilag értelmes. Gondot jelent azonban, hogy a (3) nagysága szempontjából a kötvény pozíció értéke teljesen érdektelen, ugyanis

$$\overline{S}_0\left(t\right)-\overline{S}_0\left(t-1\right)=1-1=0,$$

így a $\theta_0\left(t\right)$ nagysága irreleváns. A nem diszkontált esetben az előrejelezhetőségtől eltekintve tetszőleges pozíció felvételét megengedtük, tehát semmilyen további megkötést nem alkalmaztunk az egyes időszakokra. Most azonban más utat követünk, explicit megszorítást vezetünk be a lehetséges portfóliókra. Erre azért van szükség, mivel a kötvény pozíciót nem tudjuk rögzíteni, másképpen fogalmazva mivel ragaszkodunk a (3) „integrál” formulához, de ez a formula a θ_0 értékére semmilyen előírást nem tartalmaz, ezért a θ_0 mindenkori értékét kívülről a modellbe bevitt feltétellel rögzítjük. A továbbiakban a $\overline{\theta}$ jelölésen azt értjük, hogy a $\overline{\theta}$ által reprezentált stratégiában 0 indexű termék értéke 0, a többi koordináta pedig előrejelezhető folyamatot alkot.

0.9 Definíció.
A $(\theta(t))_{t=1}^{T}$ sorozatot önfinanszírozónak mondjuk, ha

$$S(t)\,\theta(t+1) = S(t)\,\theta(t), \tag{4}$$

vagyis a portfólió átrendezése a t időszakban nem eredményez nettó pénzáramlást. Tetszőleges $\overline{\theta}$-ra a θ_0 kötvény pozíció értéke úgy módosul, hogy „egyenlegezze" a többi pozícióban keletkező értékváltozást.

Mivel a (4) definícióban a két oldal leosztható $S_0(t)$-vel, ezért az

$$\overline{S}(t)\,\theta(t+1) = \overline{S}(t)\,\theta(t),$$

is teljesül, vagyis ha a θ S önfinanszírozó, akkor a θ $\overline{S}$ önfinanszírozó, és nyilván megfordítva. Nekünk azonban több kell. Legyen $\overline{\theta}$ tetszőleges előrejelezhető portfólió a „hagyományos" eszközökre. Ha a kötvény pozíciót minden t időpontban a

$$\sum_{k=0}^{M} S_k(t)\,\theta_k(t) - \sum_{k=1}^{M} S_k(t)\,\theta_k(t+1) = S_0(t)\,\theta_0(t+1)$$

szabállyal választjuk, egyenlegezzük, akkor önfinanszírozó portfóliót kapunk. Világos, hogy ha $(\theta_k(t+1))_{k=1}^{M}$ $\mathcal{F}_t$-mérhető, akkor a $\theta_0(t+1)$ is $\mathcal{F}_t$-mérhető, vagyis a θ_0 egyértelműen és önfinanszírozó és előrejelezhető módon került rögzítésre. A portfólió diszkontált értéke a t időpontban

$$\overline{V}(t) \mathrel{\hat{=}} \frac{1}{S_0(t)} S(t)\,\theta(t) = \overline{S}(t)\,\theta(t).$$

A portfólió értéke a T időpontban az önfinaszírozás feltétele miatt

$$\begin{aligned}
V(T) &\mathrel{\hat{=}} S(T)\,\theta(T) = S(T)\,\theta(T) \pm S(T-1)\,\theta(T-1) \pm \ldots = \\
&= S(T)\,\theta(T) - S(T-1)\,\theta(T) + \ldots = \\
&= [S(T) - S(T-1)]\,\theta(T) + \ldots = \\
&= \sum_{t=1}^{T} [S(t) - S(t-1)]\,\theta(t) + S(0)\,\theta(1) = \\
&= \sum_{t=1}^{T} [S(t) - S(t-1)]\,\theta(t) + S(0)\,\theta(0) \mathrel{\hat{=}} \\
&\mathrel{\hat{=}} G(T) + V(0),
\end{aligned}$$

ahol G az úgynevezett nyereményfolyamat. Mivel a levezetés csak az önfinanszírozáson múlt, az egyenlőség pontosan akkor teljesül, ha

$$\begin{aligned} \overline{V}(T) &= \sum_{t=1}^{T}\left[\overline{S}(t)-\overline{S}(t-1)\right]\theta(t)+\overline{V}(0) \doteq \\ &= \sum_{t=1}^{T}\left[\overline{S}(t)-\overline{S}(t-1)\right]\overline{\theta}(t)+\overline{V}(0) = \\ &= \overline{G}(T)+\overline{V}(0). \end{aligned} \tag{5}$$

0.10 Definíció.
A modellben nincsen arbitrázs, ha nincs olyan θ előrejelezhető, önfinanszírozó portfólió folyamat, amelyre $V(0)=0$, de $V(T)\geq 0$. Világos, hogy ez ekvivalens avval, hogy nincs olyan θ, amelyre

$$\overline{V}(T,\theta) \doteq \frac{1}{S_0(T)}V(T,\theta) \geq 0,$$

vagy ami ugyanaz, nincs olyan előrejelezhető folyamat, amelyre

$$\sum_{t=1}^{T}\left[\overline{S}(t)-\overline{S}(t-1)\right]\overline{\theta}(t) \geq 0.$$

A θ és a $\overline{\theta}$ között lényeges eltérés van. A θ előrejelezhető, önfinanszírozó, és $M+1$ dimenziós, a $\overline{\theta}$ csak előrejelezhető, és lényegében csak M dimenziós, ugyanis a 0 indexe azonosan nulla. Az elmondottak alapján az eszközárazás első alaptételét könnyen kiterjeszthetjük a diszkontálás esetére[25]:

0.11 Tétel. (Az eszközárazás első alaptétele)
Pontosan akkor nincs arbitrázs, ha van olyan $\mathbf{Q}>\mathbf{0}$ mérték, amelyre nézve az $\left(\overline{S}(t)\right)_{t=0}^{T}$ diszkontált árfolyam folyamat **Q**-*martingál!*

0.2.4. A Dalang—Morton—Wilinger-tétel

Ezidáig feltételeztük, hogy a lehetséges kimenetelek, világállapotok halmaza véges. Ez nagyban segítette a tárgyalást, ugyanis matematikailag csakis mátrixokkal kellett foglalkozni, és az egész gondolatmenet a lineáris algebra elemi keretében volt tárgyalható. A matematikai pénzügyek egyik méltán ünnepelt tétele,

[25] Minden modellben az eszközárazásnak két alaptétele van. Az első az arbitrázs és a martingálmérték kapcsolatát adja meg, a második alaptétel pedig a teljesség és a martingálmérték egyértelműségét kapcsolja össze.

az úgynevezett Dalang—Morton—Willinger-tétel[26] szerint, az eszközárazás első alaptételében a diszkrét és véges időhorizont megtartása mellett a valószínűségi alaptérre tett végességi feltétel elhagyható. Az alább bemutatott igen egyszerűnek számító bizonyítás alapgondolatát tekintve nem sokban különbözik a már bemutatott bizonyításoktól, de feltételezi a mértékelmélet és az absztrakt analízis ismeretét[27]. Ebben az alpontban tehát az $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$ általános valószínűségi mező és $\mathcal{F} = (\mathcal{F}_t)_{t=0}^{T}$ véges időhorizontú, de minden más szempontból tetszőleges filtráció, $(S(t))_{t=0}^{T}$ $\mathcal{F}$-adaptált folyamat. Vezessük be az

$$R \triangleq \left\{ H : H = \sum_{t=1}^{T} [S(t) - S(t-1)]\, \theta(t) \right\}$$

halmazt, ahol θ az előrejelezhető stratégiákon fut keresztül. Az analízisben megszokott módon L_{+}^{0} jelölje a nem negatív valószínűségi változók halmazát. Vezessük be az

$$A \triangleq R - L_{+}^{0},$$

valamint a $\mathrm{cl}(A)$ halmazokat, ahol a lezárás a sztochasztikus konvergenciában értendő[28]. Diszkrét, véges időhorizont esetén az eszközárazás első alaptételének legáltalánosabb alakja a következő[29]:

0.12 Tétel. (Dalang—Morton—Willinger)
A következő állítások ekvivalensek:

1. $A \cap L_{+}^{0} = \{0\}$.
2. $A \cap L_{+}^{0} = \{0\}$ *és* $A = \mathrm{cl}(A)$.
3. $\mathrm{cl}(A) \cap L_{+}^{0} = \{0\}$.
4. *Megadható olyan* $\mathbf{Q}$ *valószínűség, amely ekvivalens az eredeti* $\mathbf{P}$ *valószínűségi mértékkel, amelyre a* $d\mathbf{Q}/d\mathbf{P}$ *Radon—Nikodym derivált korlátos, és amely mellett az* S *martingál.*

---

[26] Az eszközárazás első alaptételét véges számú kimenetel esetén szokás Harrison—Pliska-tételnek is nevezni.

[27] A továbbiakban a Dalang—Morton—Willinge-tétel bizonyítására nem fogunk hivatkozni, így az alpontot a megfelelő analízis ismeretekkel nem rendelkező olvasó elhagyhatja.

[28] Megjegyezzük, hogy mivel minden sztochasztikusan konvergens sorozat tartalmaz majdnem mindenhol konvergens részsorozatot, ezért a cl lezárás majdnem mindenhol értelemben is vehető.

[29] Az állítást a diszkontált alakra mondjuk ki. A diszkontálás bevezetése az önfinanszírozó portfoliókon keresztül a már bemutatott módon hajtható végre. Érdemes megjegyezni, hogy az állítást korábban „nehéz tételnek” tartották. V.ö.: [4]. Az itt közölt bizonyítás lényegében elemi. Utólagos visszatekintéssel a Dalang—Morton—Willinger-tételt a matematikai közgazdaságtan elemi tételei közé kell besorolni.

A megadott definíciók alapján evidens, hogy az első feltétel éppen az arbitrázs kizárásának már korábban tárgyalt feltétele, ugyanis az első állítás szerint nincsen olyan θ előrejelezhető stratégia, amelyre a $\sum_{t=1}^{T}\left[S(t)-S(t-1)\right]\theta(t)$ kummulált nyereség nem negatív és egy pozitív valószínűségű halmazon pedig pozitív.

A tétel bizonyítása néhány lemmára épül. Az első az elemi analízisből ismert kompaktsági tétel[30] általánosítása[31].

0.13 Lemma.
Legyen $(\eta_n)_n$ $\mathbf{R}^m$ értékű mérhető függvények sorozata, és tegyük fel, hogy

$$\liminf_{n\to\infty}\|\eta_n\|<\infty.$$

Ekkor megadható olyan $(\sigma_k)_k$ egész értékű mérhető függvényekből álló sorozat, amelyre $\sigma_k\nearrow\infty$ és a $\left(\eta_{\sigma_k}\right)_k$ sorozat minden kimenetelre konvergens.

A lemma bizonyítása: Legyen először $(\eta_n)_n$ skalárértékű sorozat, és tegyük fel, hogy az $\eta_\infty\triangleq\liminf_n\eta_n$ minden kimenetelre véges. Legyen $\tau_0=0$, és vezessük be a

$$\tau_k\triangleq\inf\left\{n>\tau_{k-1}:|\eta_n-\eta_\infty|\leq\frac{1}{k}\right\}$$

függvényeket. Elemi megfontolásokkal azonnal belátható, hogy a τ_k minden k-ra mérhető, illetve $\eta_{\tau_k}\to\eta_\infty$, következésképpen a lemma állítás ilyenkor teljesül. A gondolatmenetet az $\|\eta_n\|$ sorozatra alkalmazva a feltétel miatt megadható olyan $(\tau_k)_k$ sorozat, amelyre

$$\sup_k\left\|\eta_{\tau_k}\right\|<\infty.$$

A korlátosság miatt a már „megritkított” sorozat minden koordinátájára és minden kimenetelre külön-külön létezik a limesz inferior, tehát az előző gondolatmenetet m-szer megismételve a $(\sigma_k)_k$ indexsorozatot egyszerű, véges lépésből álló iterációval megkaphatjuk.

$\square$

Megjegyezzük, hogy mivel a $(\sigma_k)_k$ sorozat tagjai mérhetőek, ezért elemi megfontolásokkal azonnal igazolható, hogy az $\left(\eta_{\sigma_k}\right)_k$ sorozat tagjai mérhetőek maradnak.

A bizonyítás következő lépése a szeparációs tétel végtelen dimenziós alkalmazását tartalmazza:

[30] A Bolzano—Weierstrass-tételről van szó.

[31] Pontosabban annak a Bolzano—Weierstrass-tétellel ekvivalens elemi állításnak az általánosítása, hogy amennyiben egy sorozatnak a limesz inferiorja véges, akkor a limesz inferior egy alkalmas részsorozat határértéke.

0.14 Lemma.
Legyen $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$ *tetszőleges valószínűségi mező. Legyen* K *az* $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$ *téren értelmezett integrálható függvényekből álló* $L^1(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$ *tér olyan zárt, konvex kúpja, amelyre* $K \supseteq \left(-L^1_+\right)$, *és* $K \cap L^1_+ = \{0\}$. *Ekkor az* $(\Omega, \mathcal{A})$ *téren létezik olyan* $\mathbf{Q}$ *valószínűségi mérték, amely ekvivalens*[32] *az eredeti* $\mathbf{P}$ *valószínűségi mértékkel, és amelyre*

$$\frac{d\mathbf{Q}}{d\mathbf{P}} \in L^\infty,$$

és

$$\mathbf{M}^{\mathbf{Q}}(k) \mathrel{\hat{=}} \int_\Omega k d\mathbf{Q} = \int_\Omega k \frac{d\mathbf{Q}}{d\mathbf{P}} d\mathbf{P} = \mathbf{M}^{\mathbf{P}}\left(k \frac{d\mathbf{Q}}{d\mathbf{P}}\right) \le 0, \quad \forall k \in K.$$

A lemma bizonyítása: Az L^1 duálisa L^∞, tehát az L^1 téren értelmezett folytonos, lineáris funkcionálok alkalmas L^∞ függvény segítségével integrálként reprezentálhatóak, vagyis minden az L^1 téren értelmezett z folytonos, lineáris funkcionálnak egyértelműen megfeleltethető egy olyan, szintén z-vel jelölt L^∞-beli elem, amelyre tetszőleges $l \in L^1$ esetén

$$\langle z, l \rangle = \int_\Omega z l d\mathbf{P}.$$

Legyen $\mathcal{Z}$ az olyan z folytonos, lineáris funkcionálok halmaza, amelyekre $\langle z, K \rangle \le 0$. Mivel $K \supseteq \left(-L^1_+\right)$ ezért $z \ge 0$ majdnem mindenhol. Mivel $0 \in \mathcal{Z}$, ezért $\mathcal{Z} \ne \emptyset$. Jelölje $\mathcal{Y}$ a $\mathcal{Z}$ elemeinek tartóhalmazaiból álló halmazt, vagyis $Y \in \mathcal{Y}$, ha van olyan $z \in \mathcal{Z}$, hogy $Y = \{z > 0\}$. Triviálisan az $\mathcal{Y}$ zárt a megszámlálható egyesítésre, ugyanis ha $z_n \in \mathcal{Z}$, akkor alkalmas α_n pozitív konstansokkal $\sum_n \alpha_n z_n \in \mathcal{Z}$. Ha

$$\lambda_0 = \sup\{\mathbf{P}(Y) : Y \in \mathcal{Y}\},$$

akkor van olyan $(Y_n)_n$ sorozat, amelyre $\mathbf{P}(Y_n) \nearrow \lambda_0$. Az általánosság megszorítása nélkül feltehető, hogy az $(Y_n)_n$ monoton nő, és miként az imént megjegyeztük, $Y_0 \mathrel{\hat{=}} \cup_n Y_n \in \mathcal{Y}$, tehát $\mathbf{P}(Y_0) = \lambda_0$. Az állítást belátjuk, ha megmutatjuk, hogy $\lambda_0 = 1$, ugyanis akkor találtunk egy olyan $z_0 \in \mathcal{Z}$ elemet, vagyis egy olyan $z_0 \in L^\infty$ függvényt, amelyre $\langle z, K \rangle \le 0$, és amelyre $\mathbf{P}(z_0 > 0) = 1$. Ilyenkor a

$$z_0 \mathrel{\hat{=}} \frac{d\mathbf{Q}}{d\mathbf{P}}$$

választás mellett a lemma állítása teljesül.

[32]Emlékeztetünk, hogy a $\mathbf{P}$ és a $\mathbf{Q}$ ekvivalenciája definíció szerint azt jelenti, hogy $\mathbf{P}(A) = 0$ pontosan akkor, ha $\mathbf{Q}(A) = 0$, vagyis a nulla valószínűségű események halmaza a két mérték esetében egybeesik. Természetesen a $\mathbf{P}$ és a $\mathbf{Q}$ pontosan akkor ekvivalens, ha a $d\mathbf{Q}/d\mathbf{P}$ létezik és pozitív.

Tegyük fel, hogy $\mathbf{P}(Y_0) < 1$, és vegyük az $x \doteq \chi_{Y_0^c} \in L_+^1 \setminus \{0\}$ függvényt. Mivel a K zárt, konvex halmaz és a lemma feltételei miatt $x \notin K$, ezért a végtelen dimenziós szeparációs tétel, a Hahn—Banach-tétel, szerint található az L^1 téren értelmezett olyan z_x folytonos, lineáris funkcionál, amelyre

$$\langle z_x, x \rangle > \langle z_x, k \rangle, \quad k \in K. \tag{6}$$

A K kúp, így ha $\langle z_x, k \rangle > 0$ valamely $k \in K$ elemre, akkor $\langle z_x, sk \rangle \nearrow \infty$ ha $s \nearrow \infty$, így a (6) szeparációs egyenlőtlenség nem teljesülhet. Ebből következően

$$\langle z_x, k \rangle \leq 0, \quad k \in K.$$

Tetszőleges $B \in \mathcal{A}$ esetén $\chi_B \in L_+^1$, ezért $z_x \geq 0$, ugyanis ha egy pozitív mértékű B halmazon $z_x < 0$, akkor a $-s\chi_B \in -L_+^1 \subseteq K$ halmazon

$$\langle z_x, -s\chi_B \rangle = -s \int_B z_x d\mathbf{P} > 0,$$

ami az s növelésével ismét tetszőlegesen naggyá tehető. Következésképpen a (6) szeparációs egyenlőtlenség ismét nem teljesülhetne. Mivel $k = 0 \in K$, ezért $\langle z_x, x \rangle > 0$, vagyis $\int_\Omega z_x x d\mathbf{P} > 0$, tehát a z_x tartója egy pozitív mértékű halmazon belemetsz az $x \doteq \chi_{Y_0^c}$ tartójába, vagyis a z_x az Y_0^c halmaz egy pozitív valószínűségű részhalmazán pozitív. Ebből következően egyrészt

$$\langle z_0 + z_x, K \rangle = \langle z_0, K \rangle + \langle z_x, K \rangle \leq 0$$

másrészt $z_0 + z_x \geq 0$ és a $z_0 + z_x$ tartója nagyobb mint Y_0, ami ellentmond a $\mathbf{P}(Y_0)$ maximalitásának.

□

Végezetül térjünk rá a tétel bizonyítására:

A tétel bizonyítása: A bizonyítást több lépésre bontjuk. Megjegyezzük, hogy most is a konvex halmazok szeparációs tételét akarjuk alkalmazni. A bizonyítás nehézsége abban áll, hogy biztosítanunk kell az elválasztandó halmazok zártságát. Ebből kifolyólag a bizonyítás érdemi lépése az első lépés.

1. Meg kell mutatni, hogy a megadott feltételek teljesülése esetén az $A \doteq R - L_+^0$ halmaz zárt[33]. A bizonyítás a T időperiódus szerinti indukcióra épül.

Legyen először $T = 1$. Vegyünk egy $a_n \in A$ sorozatot, és tegyük fel, hogy $a_n \to a_\infty$, ahol a konvergencia tetszés szerint jelenthet sztochasztikus, illetve majdnem mindenhol való konvergenciát. Ha a sztochasztikus konvergenciából indulunk ki, akkor alkalmas részsorozatra a konvergencia majdnem mindenhol is

[33] A sztochasztikus, illetve a majdnem mindenhol való konvergenciában.

teljesülni fog. Mindkét esetben feltehetjük tehát, hogy $a_n \overset{m.m.}{\to} a_\infty$. Az $a_n \in A$ feltételből meg kell mutatnunk, hogy $a_\infty \in A$. Az A definíciója szerint

$$a_n = [S(1) - S(0)]\,\theta_n(1) - r_n \overset{\circ}{=} Gy_n - r_n,$$

ahol minden n-re az y_n $\mathcal{F}_0$-mérhető és $r_n \in L^0_+$. Vegyük észre, hogy a bizonyítás nehézsége pusztán abból áll, hogy az (a_n) konvergenciájából nem következik az (y_n) konvergenciája[34]. Ugyancsak vegyük észre, hogy elegendő belátni, hogy az (y_n) sorozatnak van az első lemma értelmében konvergens részsorozata, ugyanis ha alkalmas részsorozatra $y_{\sigma_k} \to y_\infty$, akkor y_∞ $\mathcal{F}_0$ mérhető, ugyanis a lemma által biztosított (y_{σ_k}) részsorozat tagjai $\mathcal{F}_0$-mérhetőek, következésképpen az y_∞ is $\mathcal{F}_0$-mérhető és

$$Gy_{\sigma_k} \to Gy_\infty,$$

így az (a_{σ_k}) részsorozat triviális konvergenciája miatt az $r_{\sigma_k} \to r_\infty \in L^0_+$ is létezik és triviálisan

$$a_\infty = Gy_\infty - r_\infty \in A. \tag{7}$$

A konvergens részsorozat létezéséhez elegendő belátni, hogy az (y_n) sorozat megválasztható úgy, hogy a sorozat majdnem minden kimenetelre pontonként korlátos. Legyen Ω_1 az Ω azon részhalmaza, ahol ez nem teljesül. Mivel (y_k) $\mathcal{F}_0$-mérhető ezért Ω_1 szintén $\mathcal{F}_0$-mérhető. Az

$$a_n(\omega) = G(\omega)\, y_n(\omega) - r_n(\omega)$$

egyenlőséget osszuk végig az $\|y_n(\omega)\|$ sorozattal:

$$\frac{a_n(\omega)}{\|y_n(\omega)\|} = G(\omega)\,\frac{y_n(\omega)}{\|y_n(\omega)\|} - \frac{r_n(\omega)}{\|y_n(\omega)\|}.$$

Az $(y_n(\omega) / \|y_n(\omega)\|)$ sorozat korlátos, így első lemma szerint van mérhető módon indexelt konvergens részsorozata. Erre a részsorozatra áttérve

$$\frac{a_{\sigma_n}(\omega)}{\|y_{\sigma_n}(\omega)\|} \to 0$$

ugyanis a számláló konvergens a nevező pedig végtelenbe tart. Mivel a

$$G(\omega)\,\frac{y_{\sigma_n}(\omega)}{\|y_{\sigma_n}(\omega)\|} \to G(\omega)\, u_\infty(\omega)$$

[34] Érdemes hangsúlyozni, hogy pontosan ez a probléma lép fel akkor, amikor azt kell igazolni, hogy minden véges kúp zárt. Az alábbi bizonyítás ezen az igen fontos állítás bizonyításának közismert ötletére épül.

ezért az

$$\frac{r_{\sigma_n}(\omega)}{\|y_{\sigma_n}(\omega)\|}$$

sorozat is konvergens és az $r_{\sigma_n} \geq 0$ miatt triviálisan a határérték nem negatív. Ebből következően

$$G(\omega)\, u_\infty(\omega) \geq 0, \quad \omega \in \Omega_1.$$

Ha

$$u_\infty(\omega) \circeq 0, \quad \omega \in \Omega_1^c,$$

akkor

$$(S(1) - S(0))\, u_\infty \geq 0$$

ami az $A \cap L_+^0 = \{0\}$ feltétel miatt csak akkor teljesülhet, ha

$$(S(1) - S(0))\, u_\infty = 0.$$

Az $\Omega_1 \in \mathcal{F}_0$ halmazon ez azt jelenti, hogy van egy olyan változó, nevezetesen u_∞, amely $\mathcal{F}_0$-mérhető és amelyre

$$G(\omega)\, u_\infty(\omega) = 0, \quad \omega \in \Omega_1.$$

Az $u_\infty(\omega) \in \mathbb{R}^M$ vektor egységnyi hosszú vektorok határértéke, így nem lehet azonosan nulla egyetlen $\omega \in \Omega_1$ esetén sem. Így minden $\omega \in \Omega_1$-re az $(S(1) - S(0))(\omega)$ egyik eleme, természetesen minden ω-ra más és más, kifejezhető a többi segítségével. A lényeges gondolat az, hogy amikor az $S(1) - S(0)$ valamelyik koordinátáját kifejezzük a többivel a súlyok $\mathcal{F}_0$-mérhetőek. A kifejtéseket az

$$a_n(\omega) = G(\omega)\, y_n(\omega) - r_n(\omega)$$

egyenlőségbe visszahelyettesítve feltehető, hogy az Ω_1 halmazon minden ω-ra az $y_n(\omega)$ súlyok közül csak $M-1$ súly nem nulla. Ha az így kapott súlyok halmaza még mindig nem korlátos, akkor az eljárást megismételjük. Vagyis létezik egy $\Omega_2 \subseteq \Omega_1$ pozitív mértékű halmaz, amelyre már van olyan (y_n) sorozat, amelynek már $M-2$ koordinátája nulla. Mivel az eljárás véges lépésben ellentmondásra vezet ezért a $T = 1$ esetben az A zártságát igazoltuk.

Tegyük fel, hogy az állítást már $T-1$ időpont esetén beláttuk, és legyen

$$a_n \circeq \sum_{t=1}^{T} [S(t) - S(t-1)]\, \theta_n(t) - r_n \to a_\infty.$$

Vezessük be az

$$\begin{aligned} c_n &\circeq [S(T) - S(T-1)]\, \theta_n(T) - r_n \\ b_n &\circeq a_n - c_n \end{aligned}$$

jelöléseket. Az (a_n) sorozat konvergens, így a (c_n) sorozat csak akkor nem korlátos, ha a (b_n) is nem korlátos. Részsorozatra áttérve feltehető, hogy mondjuk a b_n határértéke $-\infty$. A $+\infty$ eset analóg módon kezelhető, csak a stratégiát be kell szorozni (-1)-gyel. A (b_n) sorozat $\mathcal{F}_{T-1}$-mérhető, így az a H halmaz, amelyen a b_n $-\infty$-hez tart $\mathcal{F}_{T-1}$-mérhető. A $\theta_n(T)\chi_H$ stratégia $\mathcal{F}_{T-1}$-mérhető, így a $c_n\chi_H$ egy arbitrázs stratégia, ugyanis $[S(T)-S(T-1)]\theta_n(T)\chi_H \to \infty$, ezért H nulla mértékű. Következésképpen c_n és b_n korlátos. Részsorozatra áttérve feltehető hogy a (c_n) sorozat is konvergens. Az előző gondolatmenetet megismételve feltehető, hogy a $\theta_n(T)$ konvergens. Az indukciós feltétel szerint az

$$a_n - c_n = \sum_{t=1}^{T-1} [S(t) - S(t-1)]\,\theta_n(t)$$

kifejezésben a $\theta_n(t)$ konvergens, amiből az állítás már evidens.

2. A második állításból triviálisan következik a harmadik.

3. Megjegyezzük, hogy tetszőleges η változó esetén a $\mathbf{P}$ valószínűségi mező megválasztható úgy, hogy az η integrálható lesz. Elég például a $\mathbf{P}$ helyett a

$$\mathbf{P}'(A) \triangleq C\int_A \exp(-\|\eta\|)\,d\mathbf{P}$$

$\mathbf{P}$-vel ekvivalens teret venni[35]. Mivel a tételben szereplő állítások érvényben maradnak, ha ekvivalens valószínűségre térünk át[36], ezért az általánosság megszorítása nélkül feltehetjük, hogy az S folyamat minden időszakban integrálható. Mivel az L^1-ben való konvergenciából következik a sztochasztikus konvergencia, ezért a $K \triangleq \mathrm{cl}(A) \cap L^1$ kúp zárt az L^1 térben, és a feltétel szerint $K \cap L^1_+ = \{0\}$, így a második lemmában szereplő szeparációs tétel alapján van olyan $\mathbf{Q}$ ekvivalens mérték, amelyre a $d\mathbf{Q}/d\mathbf{P} \in L^\infty$, és amelyre

$$\mathbf{M}^{\mathbf{Q}}(k) \le 0, \quad k \in K.$$

Speciálisan, ha vesszük a $k \triangleq \pm[S(t)-S(t-1)]\,\theta(t)$ elemeket, ahol a $\theta(t)$ $\mathcal{F}_{t-1}$-mérhető, akkor

$$\mathbf{M}^{\mathbf{Q}}([S(t)-S(t-1)]\,\theta(t)) = 0,$$

amiből

$$\mathbf{M}^{\mathbf{Q}}(S(t)-S(t-1) \mid \mathcal{F}_{t-1}) = 0,$$

[35]Az $x\exp(-|x|)$ függvény korlátos, vagyis az áttérést biztosító Radon—Nikodym-derivált korlátos.

[36]A sztochasztikusan konvergens sorozatok pontosan azok, amelyek rendelkeznek majdnem mindenhol konvergens részsorozattal. Ekvivalens mértékek esetén a majdnem mindenhol konvergens sorozatok halmaza azonos.

vagyis az S martingál a $\mathbf{Q}$ alatt következésképpen a harmadik állításból következik a negyedik.

4. Végezetül tegyük fel, hogy teljesül a negyedik állítás, vagyis van olyan $\mathbf{Q}$ a $\mathbf{P}$-vel ekvivalens mérték, amely mellett az S martingál. Ha $h \in A \cap L_{+}^{0}$, akkor van olyan θ előrejelezhető startégia, amelyre

$$0 \leq h \leq \sum_{t=1}^{T} \left[S\left(t\right) - S\left(t-1\right)\right] \theta\left(t\right). \tag{8}$$

Elegendő megmutatnunk, hogy

$$0 \leq \mathbf{M}^{\mathbf{Q}}\left(h\right) \leq \mathbf{M}^{\mathbf{Q}}\left(\sum_{t=1}^{T} \left[S\left(t\right) - S\left(t-1\right)\right] \theta\left(t\right)\right) = 0.$$

Amiből a $h \geq 0$ felhasználásával a h $\mathbf{Q}$-majdnem minden kimenetelre nulla. Mivel a $\mathbf{P}$ és a $\mathbf{Q}$ ekvivalensek, ezért a h $\mathbf{P}$-majdnem mindenhol nulla, így teljesül az első állítás.

A bizonyításban némi technikai bonyodalmat jelent, hogy a $\theta\left(t\right)$ stratégiák nem feltétlenül korlátosak, így a feltételes várható értékben a kiemelési szabály közvetlenül nem haszálható. Ugyanakkor ez a következő gondolatmentettel orvosolható: Legyen $\varepsilon > 0$ tetszőleges. Az (8) sort szorozzuk be $\chi\left(\left\|\theta\left(1\right)\right\| \leq n\right)$-nel. Az egyszerűbb jelölés kedvéért legyenek h és θ a már beszorzott kifejezések. Így feltehető, hogy a $\theta\left(1\right)$ korlátos. Tetszőleges n-re a $\chi\left(\left\|\theta\left(1\right)\right\| \leq n\right)$ függvény $\mathcal{F}_0$-mérhető, így az új θ stratégia előrejelezhető marad. Az S $\mathbf{Q}$-martingál tulajdonsága szerint

$$\begin{gathered}
\mathbf{M}^{\mathbf{Q}}\left(\left[S\left(1\right) - S\left(0\right)\right] \theta\left(1\right)\right) = \\
\mathbf{M}^{\mathbf{Q}}\left(\mathbf{M}^{\mathbf{Q}}\left(\left[S\left(1\right) - S\left(0\right)\right] \theta\left(1\right) \mid \mathcal{F}_0\right)\right) = \\
\mathbf{M}^{\mathbf{Q}}\left(\theta\left(1\right) \cdot \mathbf{M}^{\mathbf{Q}}\left(\left[S\left(1\right) - S\left(0\right)\right] \mid \mathcal{F}_0\right)\right) = \\
\mathbf{M}^{\mathbf{Q}}\left(\theta\left(1\right) \cdot 0\right) = 0.
\end{gathered}$$

Vegyük észre, hogy a kiemelési szabályt azért használhattuk, mert a $\theta\left(1\right)$ függvény $\mathcal{F}_0$-mérhető és korlátos. Ebből következően az $\mathbf{M}^{\mathbf{Q}}$ szerinti várható értékben az összeg szétszedhető és

$$\begin{gathered}
0 \leq \mathbf{M}^{\mathbf{Q}}\left(h\right) \leq \\
\leq \mathbf{M}^{\mathbf{Q}}\left(\left[S\left(1\right) - S\left(0\right)\right] \theta\left(1\right)\right) + \mathbf{M}^{\mathbf{Q}}\left(\sum_{t=2}^{T} \left[S\left(t\right) - S\left(t-1\right)\right] \theta\left(t\right)\right)
\end{gathered}$$

ahol az első várható érték nulla. Tekintsük tehát az

$$0 < \mathbf{M}^{\mathbf{Q}}(h) \leq \mathbf{M}^{\mathbf{Q}}\left(\sum_{t=2}^{T}\left[S(t)-S(t-1)\right]\theta(t)\right)$$

egyenlőtlenséget. Szorozzuk be az (8) sort most az $\chi\left(\|\theta(2)\| \leq n\right)$-nel. A majorált konvergencia tétel miatt van olyan n, hogy

$$\begin{aligned}
\mathbf{M}^{\mathbf{Q}}\left(h\chi\left(\|\theta(2)\| \leq n\right)\right) &\leq \mathbf{M}^{\mathbf{Q}}\left(\left[S(1)-S(0)\right]\theta(1)\,\chi\left(\|\theta(2)\| \leq n\right)\right)+ \\
&+\mathbf{M}^{\mathbf{Q}}\left(\sum_{t=2}^{T}\left[S(t)-S(t-1)\right]\theta(t)\,\chi\left(\|\theta(2)\| \leq n\right)\right) < \\
&< \frac{\varepsilon}{T}+\mathbf{M}^{\mathbf{Q}}\left(\sum_{t=2}^{T}\left[S(t)-S(t-1)\right]\theta(t)\,\chi\left(\|\theta(2)\| \leq n\right)\right) = \\
&= \frac{\varepsilon}{T}+\mathbf{M}^{\mathbf{Q}}\left(\left[S(2)-S(1)\right]\theta(2)\,\chi\left(\|\theta(2)\| \leq n\right)\right)+ \\
&+\mathbf{M}^{\mathbf{Q}}\left(\sum_{t=3}^{T}\left[S(t)-S(t-1)\right]\theta(t)\,\chi\left(\|\theta(2)\| \leq n\right)\right) = \\
&= \frac{\varepsilon}{T}+\mathbf{M}^{\mathbf{Q}}\left(\sum_{t=3}^{T}\left[S(t)-S(t-1)\right]\theta(t)\,\chi\left(\|\theta(2)\| \leq n\right)\right).
\end{aligned}$$

Az eljárást folytatva megmutatható, hogy alkalmas n-re

$$\mathbf{M}^{\mathbf{Q}}\left(h\prod_{t=1}^{T}\chi\left(\|\theta(t)\| \leq n\right)\right) \leq \varepsilon.$$

A monoton konvergencia tétel miatt

$$\mathbf{M}^{\mathbf{Q}}(h) \leq \varepsilon,$$

amiből $\mathbf{M}^{\mathbf{Q}}(h) = 0$.

$\square$

0.2.5. Árazás többperiódusos modellekben

Legyen H $\mathcal{F}_T$-mérhető valószínűségi változó. Mi a H ára a $t = 0$ pontban? A H változót, más néven európai derivatívát, feltételes követelést, származtatott terméket[37] elérhetőnek mondjuk, ha van olyan θ önfinaszírozó, előrejelezhető portfólió, amelyre

$$V_\theta(T) = H.$$

[37] A származtatott termék elnevezést az indokolja, hogy a H $\mathcal{F}_T$ mérhető, vagyis az értéke T időszakban ismert információk alapján meghatározható.

A θ neve hedge, vagy replikáló stratégia, portfólió. A H származtatott termék $\pi(H)$ ésszerű, egyensúlyi ára természetesen $V(0)$, ugyanis ha nem az lenne, akkor értelemszerűen lehetne arbitrálni: Ha $\pi(H) < V(0)$, vagyis a H származtatott termék olcsó, és a replikáló portfólió drága, akkor a „közgazdaságtan alaptörvényének" megfelelően vegyük meg a származtatott terméket, és adjuk el a replikáló portfóliót. A $t=0$ pontban a nettó mérleg $V(0)$ bevétel, $\pi(H)$ kiadás, vagyis pozitív, a T időpontban a bevétel H a kiadás szintén H, vagyis a nettó eredmény nulla. Nem túl meglepő módon, ha feltesszük, hogy $\mathcal{F}_0 = \{\emptyset, \Omega\}$, vagyis ha a változók értéke a $t=0$ időpontban konstans, nem függ a véletlentől, akkor

$$V_\theta(0) = \pi(H) = \mathbf{M}^{\mathbf{Q}}\left(\frac{1}{S_T}H\right) = \mathbf{M}^{\mathbf{Q}}\left(\overline{H}\right), \tag{9}$$

vagyis a H ára a H diszkontált várható értéke, ahol a várható értéket a $\mathbf{Q}$ kockázatmentes valószínűség mellett kell venni. A (9) indoklása a következő: Mivel az $\overline{S}$ $\mathbf{Q}$-martingál, ezért a

$$\overline{G}(t) \doteq \sum_{s=1}^{t}\left[\overline{S}(s) - \overline{S}(s-1)\right]\theta(s)$$

transzformált is martingál, ugyanis

$$\begin{aligned}
\mathbf{M}^{\mathbf{Q}}\left(\overline{G}(t+1) \mid \mathcal{F}_t\right) &= \sum_{s=1}^{t+1}\mathbf{M}^{\mathbf{Q}}\left(\left[\overline{S}(s) - \overline{S}(s-1)\right]\theta(s) \mid \mathcal{F}_t\right) = \\
&= \sum_{s=1}^{t}\mathbf{M}^{\mathbf{Q}}\left(\left[\overline{S}(s) - \overline{S}(s-1)\right]\theta(s) \mid \mathcal{F}_t\right) + \\
&\quad + \mathbf{M}^{\mathbf{Q}}\left(\left[\overline{S}(t+1) - \overline{S}(t)\right]\theta(t+1) \mid \mathcal{F}_t\right).
\end{aligned}$$

Az első tagban minden kifejezés legfeljebb t indexű, tehát az egész kifejezés $\mathcal{F}_t$-mérhető, így a feltételes várható értéke önmaga. A második kifejezésben mivel a $\theta(t+1)$ előrejelezhető, ezért kivihető a feltételes várható értékből, majd az $\overline{S}$ $\mathbf{Q}$-martingál tulajdonsága miatt

$$\begin{aligned}
&\mathbf{M}^{\mathbf{Q}}\left(\left[\overline{S}(t+1) - \overline{S}(t)\right]\theta(t+1) \mid \mathcal{F}_t\right) = \\
=\ &\mathbf{M}^{\mathbf{Q}}\left(\overline{S}(t+1) - \overline{S}(t) \mid \mathcal{F}_t\right)\cdot\theta(t+1) = \\
=\ &0\cdot\theta(t+1) = 0.
\end{aligned}$$

A martingál őrzi a várható értéket, ezért, felhasználva, hogy a $V(0)$ determinisztikus, $\mathbf{M}^{\mathbf{Q}}\left(\overline{G}(T)\right) = 0$ az (5) felhasználásával

$$\begin{aligned}
V(0) &= \overline{V}(0) = \overline{V}(0) + \mathbf{M}^{\mathbf{Q}}\left(\overline{G}(T)\right) = \mathbf{M}^{\mathbf{Q}}\left(\overline{V}(0) + \overline{G}(T)\right) = \\
&= \mathbf{M}^{\mathbf{Q}}\left(\overline{V}(T)\right) = \mathbf{M}^{\mathbf{Q}}\left(\overline{H}\right) = \mathbf{M}^{\mathbf{Q}}\left(\frac{1}{S_T}H\right).
\end{aligned}$$

Érdemben sehol sem használtuk ki hogy a $t = 0$ időpontot vizsgáljuk, csak az

$$\frac{1}{S(T)}H = \overline{V}(T) = \sum_{t=1}^{T} \left[\overline{S}(t) - \overline{S}(t-1)\right] \theta(t) + \overline{V}(0)$$

előállítást, és a $\mathbf{Q}$-martingál tulajdonságot, ezért

$$\begin{aligned} \mathbf{M}^{\mathbf{Q}}\left(\frac{1}{S(T)}H \mid \mathcal{F}_t\right) &= \mathbf{M}^{\mathbf{Q}}\left(\overline{V}(T) \mid \mathcal{F}_t\right) = \mathbf{M}^{\mathbf{Q}}\left(\overline{G}(T) + \overline{V}(0) \mid \mathcal{F}_t\right) = \\ &= \overline{G}(t) + \overline{V}(0) = \overline{V}(t) = \frac{V(t)}{S(t)}, \end{aligned}$$

következésképpen

$$V(t) = \mathbf{M}^{\mathbf{Q}}\left(\frac{S(t)}{S(T)}H \mid \mathcal{F}_t\right). \tag{10}$$

0.2.6. Egyértelműség, teljesség a többperiódusos modellekben

Térjünk vissza a diszkrét valószínűségi mező esetére. Kétfajta egyértelműség vethető fel. Az első: vajon az árak egyértelműek-e, vagyis függnek-e a replikáló portfóliótól, vagy a martingálmértéktől, a második pedig, hogy vajon a martingálmérték egyértelmű-e? Az első kérdés tűnik érdekesebbnek, de a megoldása triviális. Ha léteznek a replikáló portfóliók, akkor az azokhoz tartozó értékfolyamatok egyértelműek. Legyen θ_1 és θ_2 két replikáló portfólió, vagyis tegyük fel, hogy

$$V(T, \theta_1) = V(T, \theta_2) = H.$$

Ha nincs arbitrázs, akkor van legalább egy ekvivalens martingálmérték. A korábban bemutatott (10) formula alapján

$$S(t)\theta_1(t) \doteq V(t, \theta_1) = \mathbf{M}^{\mathbf{Q}}\left(\frac{S(t)}{S(T)}H \mid \mathcal{F}_t\right) = V(t, \theta_2) \doteq S(t)\theta_2(t),$$

vagyis a replikáló értékfolyamat egyértelmű, bár a replikáló stratégia nem feltétlenül az. Ezt a tulajdonságot szokás az egyértelmű árazás törvényének is nevezni. Érdemes megjegyezni, hogy mivel a replikáló portfóliófolyamat értéke független a replikációt biztosító stratégiától, ezért a replikáló portfólió értéke független a választott $\mathbf{Q}$ martingálmértéktől is. Ebből következően a replikálható követelések értéke minden martingálmértékre azonos.

Most térjünk rá a martingálmérték egyértelműségére.

0.15 Definíció.
A modellt teljesnek mondjuk, ha minden H $\mathcal{F}_T$-mérhető származtatott termék önfinanszírozó portfólióval replikálható.

Érvényes a következő tétel:

0.16 Tétel. (Az eszközárazás második alaptétele)
A modell pontosan akkor teljes, ha a martingálmérték egyértelmű.

Bizonyítás: Tegyük fel, hogy a piac nem teljes. Legyen

$$L \circeq \{V(T,\theta)\},$$

ahol θ tetszőleges önfinanszírozó, előrejelezhető portfólió. Ha a piac nem teljes, akkor $L \neq \mathbb{R}^N$. Világos, hogy ha a piac nem teljes, akkor a diszkontált piac sem teljes, vagyis

$$\overline{L} \circeq \left\{\overline{V}(T,\theta)\right\} \neq \mathbb{R}^N.$$

A már belátott módon a diszkontált folyamat előállítása alapján tetszőleges θ önfinanszírozó portfólióra

$$\begin{aligned}\overline{V}(T,\theta) &= \overline{V}(0,\theta) + \sum_{t=1}^{T}\left[\overline{S}(t) - \overline{S}(t-1)\right]\theta(t) \circeq \\ &\circeq \lambda + \sum_{t=1}^{T}\left[\overline{S}(t) - \overline{S}(t-1)\right]\overline{\theta}(t),\end{aligned}$$

ahol $\overline{\theta}$ a θ-ból a 0 index törlésével kapott folyamat. Ugyanakkor, ha λ tetszőleges és $\overline{\theta}$ tetszőleges előrejelezhető folyamat a közönséges $1,2,\ldots,M$ indexű termékre, akkor a 0 komponens megválasztásával konstruálható olyan θ önfinanszírozó, előrejelezhető portfólió, amelyre $\overline{V}(0,\theta) = \lambda$, és a többi termék súlya $\overline{\theta}$. Tehát

$$\overline{L} \circeq \left\{\overline{V}(T,\theta)\right\} = \left\{\lambda + \sum_{t=1}^{T}\left[\overline{S}(t) - \overline{S}(t-1)\right]\overline{\theta}(t)\right\} \neq \mathbb{R}^N,$$

ahol $\lambda \in \mathbb{R}$ tetszőleges, és $\overline{\theta}$ tetszőleges előrejelezhető folyamat. Legyen $\mathbf{Q} > \mathbf{0}$ egy martingálmérték, és vezessük be az $\mathbb{R}^N$ téren az

$$(\mathbf{x},\mathbf{y}) \circeq \sum_{i=1}^{N} x_i y_i Q_i$$

skaláris szorzatot. Mivel az $\overline{L}$ altér, $\overline{L} \neq \mathbb{R}^N$, ezért létezik

$$\mathbf{z} \perp \overline{L},$$

vagyis

$$\sum_{i=1}^{N} z_i l_i Q_i = \sum_{i=1}^{N} (z_i l_i) Q_i = 0,$$

vagy ami ugyanaz

$$\mathbf{M}^{\mathbf{Q}} \left(\mathbf{z}\overline{L}\right) = 0.$$

A kötvényre tett feltétel szerint, ha $\overline{\theta}(t) \equiv 0$, $\lambda = 1$, akkor $\mathbf{1} \in \overline{L}$, tehát

$$(\mathbf{z}, \mathbf{1}) = \sum_{i=1}^{N} z_i Q_i = \mathbf{M}^{\mathbf{Q}}(\mathbf{z}) = 0.$$

Legyen

$$\mathbf{d} \triangleq \mathbf{1} + \frac{\mathbf{z}}{2\|\mathbf{z}\|_{\infty}} > 0,$$

és definiáljuk az

$$R_i \triangleq R(\omega_i) = \mathbf{d}(\omega_i) Q(\omega_i) = d_i Q(\omega_i)$$

szabállyal az $\mathbf{R}$ valószínűséget. Világos, hogy $\mathbf{R} > \mathbf{0}$, és

$$\mathbf{R}(\Omega) = \mathbf{M}^{\mathbf{Q}}(1) + \frac{\mathbf{M}^{\mathbf{Q}}(\mathbf{z})}{2\|\mathbf{z}\|_{\infty}} = 1,$$

tehát az $\mathbf{R}$ egy ekvivalens valószínűség. Mivel tetszőleges $\overline{\theta}$ előrejelezhető folyamatra

$$\sum_{t=1}^{T} \left[\overline{S}(t) - \overline{S}(t-1)\right] \theta(t) \in \overline{L},$$

ezért

$$\begin{aligned} & \mathbf{M}^{\mathbf{R}} \left(\sum_{t=1}^{T} \left[\overline{S}(t) - \overline{S}(t-1)\right] \overline{\theta}(t) \right) \triangleq \\ = \ & \mathbf{M}^{\mathbf{Q}} \left(\sum_{t=1}^{T} \left[\overline{S}(t) - \overline{S}(t-1)\right] \overline{\theta}(t) \left(1 + \frac{\mathbf{z}}{2\|\mathbf{z}\|_{\infty}}\right) \right) = \\ = \ & \mathbf{M}^{\mathbf{Q}} \left(\sum_{t=1}^{T} \left[\overline{S}(t) - \overline{S}(t-1)\right] \overline{\theta}(t) \right). \end{aligned}$$

Mivel az $\overline{S}$ martingál a $\mathbf{Q}$ alatt, és a $\overline{\theta}$ előrejelezhető, ezért a jobb oldali kifejezés nulla, ezért a bal oldal is nulla, tehát az $\overline{S}$ diszkontált folyamat $\mathbf{R} \neq \mathbf{Q}$ martingál, következésképpen a martingálmérték nem egyértelmű.

□

0.2.7. Árazás nem teljes piacokon

Mit lehet mondani a véletlen követelés árára, ha a piac nem teljes, és az értékelendő követelés nem replikálható? Ilyenkor az arbitrázs kizárásának elve csak korlátokat ad a lehetséges piaci árakra, a pontos piaci ár már egyéb tényezők függvénye. A közgazdasági elmélet szerint általában a termékek árát a kereslet és a kínálat viszonya adja meg, amely viszont függ a piaci szereplők preferenciájától. Az irodalomban az arbitrázs kizárására alapuló árazási elv több általánosításával is találkozhatunk. Ezek mindegyikének lényege, hogy az önfinanszírozó porfolióval való replikálhatóság feltételét valamilyen módon enyhíteni kell. Vagy nem követeljük meg a pontos replikálhatóságot, vagyis megelégszünk avval, hogy a fedező portfólió valamilyen értelemben optimálisan közelíti a véletlen követelést, vagy megköveteljük ugyan, hogy az utolsó időpontban a követelés lefedezése tökéletes legyen, de eltekintünk attól, hogy a replikáló portfólió sorozat önfinanszírozó legyen, és valamilyen értelemben minimilizáljuk a jövőben felmerülő költségeket. A nem teljes piacok árazási elmélete igen kiterjedt, ezért csak a legegyszerűbb modellt mutatjuk be.

Tegyük fel, hogy a T időpontban esedékes H véletlentől függő követelés nem replikálható. Tekintsük a

$$V(0,\theta) = S(0)\,\theta(1) \to \min$$

$$S(t)\left[\theta(t) - \theta(t+1)\right] \geqq 0, \quad t = 1,\ldots,T-1$$
$$S(T)\,\theta(T) \geqq H$$

lineáris programozási feladatot. Ha a feladatnak nincs lehetséges megoldása, akkor a feladat $\pi^*(H)$ optimális értéke legyen $+\infty$. Világos, hogy a H követelés $\pi(H)$ ára nem lehet nagyobb mint $\pi^*(H)$, ugyanis, ha $\pi(H) > \pi^*(H)$, akkor lehet arbitrálni. Ilyenkor H „drága”, tehát eladom, a θ stratégia „olcsó”, tehát dinamikusan megveszem. A $t = 0$ pontban a bevétel $\pi(H) - \pi^*(H) > 0$, a T időpontban a bevétel $S(T)\,\theta(T)$, a kiadás H, tehát a T időpontban a nettó bevétel

$$S(T)\,\theta(T) - H \geqq 0.$$

Az $1 \leq t \leq T-1$ időpontokban, az új $\theta(t+1)$ portfólió meghatározásakor, csak kivehettük a pénzt, így a H versus θ „üzlet” szaldója pozitív. Vehetjük azonban a

$$V(0,\theta) = S(0)\,\theta(1) \to \max$$

$$S(t)\left[\theta(t) - \theta(t+1)\right] \leqq 0, \quad t = 1,\ldots,T-1$$
$$S(T)\,\theta(T) \leqq H$$

feladatot is. A feladat $\pi_*(H)$ optimális megoldása alsó korlátot jelent a $\pi(H)$ árra nézve. Ha $\pi(H) < \pi_*(H)$, akkor megveszem a H jövőbeli kifizetést, eladom a θ optimális stratégiát. A $t = 0$ bevétele $\pi_*(H) - \pi(H) > 0$, a T időpont bevétele $0 \leqq H - S(T)\theta(T)$, és időközben most is csak kivehetünk pénzt a portfólióból. Összefoglalva, arbitrázsmegfontolások alapján

$$\pi_*(H) \leqq \pi(H) \leqq \pi^*(H).$$

Legyen $\mathbf{Q}$ martingálmérték. Evidens módon a lineáris programozási feladatokban mindig vehetjük a diszkontált változókat ugyanis a feltétel szerint a kötvény ára mindig pozitív, vagyis a végigosztás nem befolyásol semmit. Ha θ^* optimális megoldása a minimum feladatnak, akkor

$$\begin{aligned}
\mathbf{M}^{\mathbf{Q}}\left(\overline{H}\right) &\leqq \mathbf{M}^{\mathbf{Q}}\left(\overline{S}(T)\theta^*(T)\right) \leqq \\
&\leqq \mathbf{M}^{\mathbf{Q}}\left(\overline{S}(T)\theta^*(T) + \sum_{t=1}^{T-1}\overline{S}(t)\left[\theta^*(t) - \theta^*(t+1)\right]\right) = \\
&= \mathbf{M}^{\mathbf{Q}}\left(\left[\overline{S}(T) - S(T-1)\right]\theta^*(T) + \ldots\right) = \\
&= \mathbf{M}^{\mathbf{Q}}\left(\overline{S}(0)\theta^*(1)\right) = \overline{S}(0)\theta^*(1) = S(0)\theta^*(1) = \pi^*(H),
\end{aligned}$$

illetve analóg módon $\pi_*(H) \leqq \mathbf{M}^{\mathbf{Q}}\left(\overline{H}\right)$.

Irodalomjegyzék

[1] R.C. Dalang, A. Morton, W. Wilinger, „Equivalent martingale measure and no-arbitrage in stochastic securities market model.”, Stochastics and Stochastic Reports, 29, (1990), 185-201.

[2] F. Delbaen, „The Dalang–Morton–Willinger theorem”, kézirat, lásd, www.math.ethz.ch/~delbaen

[3] Duffie, D., „Security Markets, Stochastic Models”, Academic Press, San Diego, 1988.

[4] R J. Elliott, P E. Kopp, „Pénzpiacok matematikája”, Typotex kiadó, Budapest 2000.

[5] Y. Kabanov, C. Stricker, „A teachers’ note on no-arbitrage criteria”

[6] S. Ross, „An Introduction to Mathematical Finance, Options and Other Topics”, Cambridge University Press 1999.

[7] W. Schachermayer, „A Hilbert space proof of the fundamental theorem of asset pricing in finite discrete time”, Insurance: Math Econ., 11 (1992) 1-9.

[8] A.N. Shiryaev, „Essentials of Stochastic Mathematical Finance”, World Scientific, 1999.