Markov–folyamatok[1]

A sztochasztikus folyamatok több osztályba sorolhatók. A Lévy–folyamatokat, illetve a martingálokat már korábban bevezettük. A martingálok mellett a valószínűségszámítás másik alapvető koncepciója a Markov–folyamat. A Markov–feltétel szerint a folyamatnak nincsen memóriája, a folyamat múltja csak a jelenen keresztül hat a jövőre. A Markov–folyamatok vizsgálatát visszavezetjük bizonyos típusú operátorok, illetve differenciálegyenletek vizsgálatára. Ennek megfelelően a Markov-folyamatok elmélete részben az operátorelmélet speciális fejezete. Az így kialakított „technika” a Markov–folyamatokat a legkidolgozottabb sztochasztikus folyamat típussá tette.

Feltételes és átmenet valószínűségek

1. A Markov-folyamatok elméletének megértésének kulcsa a feltételes valószínűség néhány tulajdonságának pontos tisztázása. Először ismétlésként ezt tesszük meg. Emlékeztetünk, hogy ha ξ egy valószínűség változó és $\mathcal{F}$ egy σ-algebra, akkor az $\mathbf{E}(\xi \mid \mathcal{F})$ egy olyan valószínűség változó, amely $\mathcal{F}$-mérhető és minden $F \in \mathcal{F}$ halmaz esetén kielégíti a

$$\int_F \xi d\mathbf{P} = \int_F \mathbf{E}(\xi \mid \mathcal{F})\, d\mathbf{P}$$

egyenlőséget. Ha $\xi \doteq \chi_B$ alakú, akkor a B halmaz feltételes valószínűségéről beszélünk.

$$\mathbf{P}(B \mid \mathcal{F}) \doteq \mathbf{E}(\chi_B \mid \mathcal{F}).$$

Kézenfekvően merül fel a kérdés: Miért nem először a feltételes valószínűséget definiáltuk, majd miért nem ennek segítségével definiáltuk a feltételes várható értéket? A válasz egyszerű: A felépítés így nem működik, ugyanis általában, további megszorítások nélkül a feltételes valószínűség szerint nem lehet integrálni. Hangsúlyozni kell, hogy mivel a feltételes várható érték nem függvény csak függvényosztály a $B \mapsto \mathbf{P}(B \mid \mathcal{F})$ leképezés egy fix ω esetén nem tekithető mértéknek, nem beszélve arról hogy tulajdonképpen értelmetlen is. Minden B esetén ki kell választani egy verzióját, mégpedig úgy hogy a kiválasztott verzió mérték legyen. Ez azonban nem mindig tehető meg! Ha van egy olyan $P(B \mid \mathcal{F})$ módon jelölt ω-tól függő függvénysereg, amely minden B esetén a $\mathbf{P}(B \mid \mathcal{F})$ egy verziója és amely minden fix ω esetén a B szerint mérték, akkor azt mondjuk, hogy a $\mathbf{P}(B \mid \mathcal{F})$ rendelkezik *reguláris verzióval*. Reguláris verzió esetén természetesen már beszélhetünk az

$$\int_\Omega \xi(\omega')\, P(d\omega' \mid \mathcal{F})$$

típusú integrálokról, amely alatt azt értjük, hogy minden ω mellett elvégezzük a megfelelő mérték szerint integrálást. Eredményként természetesen egy ω-tól függő függvényt kapunk. Mivel a feltételes várható érték hasonlóan az integráláshoz lineáris és érvényes rá a monoton konvergencia tétele, ezért

$$\int_\Omega \xi(\omega')\, P(d\omega' \mid \mathcal{F}) = \mathbf{E}(\xi \mid \mathcal{F}).$$

Ez persze azt jelenti, hogy a bal oldalon álló parametrikus integrál a jobb oldalon álló változó egy verziója. Másképpen írva a $\mathbf{P}$ valószínűségi mérték szerint majdnem minden ω kimenetelre

$$\int_\Omega \xi(\omega')\, P(d\omega' \mid \mathcal{F})(\omega) = \mathbf{E}(\xi \mid \mathcal{F})(\omega).$$

Ez természetesen tetszőleges transzformált valószínűségi változóra is átvihető, vagyis minden olyan h Borel-mérhető függvényre, amelyre a $h(\xi)$-nek létezik feltételes várható értéke

$$\mathbf{E}(h(\xi) \mid \mathcal{F}) = \int_\Omega h(\xi(\omega'))\, P(d\omega' \mid \mathcal{F}).$$

[1] Ezt a részt eredetileg a Sztochasztikus folyamatok könyvbe szántam, aztán terjedelmi okoból kihagytam. Nem tudom milyen állapotban van. A kurzus végéig kigyomlálom és rendbeteszem.

Azonban hangsúlyozni kell, hogy a két oldalon teljesen más típusú matematikai kifejezések vannak. Az $\mathbf{E}(\xi \mid \mathcal{F})$. egy valószínűségi változó, vagyis egy ekvivalencia osztály az $\int_\Omega \xi(\omega') P(d\omega' \mid \mathcal{F})$ pedig egy parametrikus integrálás eredménye, vagyis egy függvény. Az egyenlőség úgy értendő, hogy a parametrikus integrál, a valószínűségi változó egy verziója. Reguláris verzió létezése esetén a jelölés pontatlanságát megengedve esetlegesen használhatjuk az

$$\int_\Omega \xi(\omega') \mathbf{P}(d\omega' \mid \mathcal{F}) = \mathbf{E}(\xi \mid \mathcal{F})$$

jelölést is. A reguláris verzió létezése nem egy egyszerű kérdés. Általában, minden további megkötés nélkül nincsen reguláris verzió. Megmutatható azonban, hogy ha az $(\Omega, \mathcal{A})$ mérhető tér, ahol természetesen $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{A}$, egy teljes szeparábilis metrikus tér az ő Borel-halmazaival, akkor létezik reguláris verzió. Bár ez igen szigorú feltételnek tűnik, valójában igen jól használható, ugyanis segítségével definiálható a *feltételes eloszlás*: A valószínűségszámításban valószínűségi mezőt gyakran érdemes kanonikus módon megválasztani. A valószínűségszámítás csak a valószínűségi változók eloszlásával foglalkozik. Az eloszlás definiálásakor feltesszük, hogy a figyelembe vett valószínűségi változók összessége egy $(E, \mathcal{E})$ mérhető térben veszik fel az értéküket. Az $(E, \mathcal{E})$ téren a mértéket a

$$\mu(B) \stackrel{\circ}{=} \mathbf{P}\left(X^{-1}(B)\right), \quad B \in \mathcal{E}$$

szabállyal definiáljuk és azt mondjuk, hogy a μ az X eloszlása. Természetesen az X a vizsgált $X = (\xi)$ változókból képzett valamilyen véges vagy végtelen elemszámú vektor. Ha az E egy teljes szeparábilis metrikus tér és $\mathcal{E} = \mathcal{B}(E)$, akkor az $\mathcal{E}$ minden rész σ-algebrája esetén beszélhetünk az X feltételes eloszlásáról. Mivel a feltételes eloszlás csak akkor definiálható ha az E egy teljes szeparábilis metrikus tér a vizsgálható $\omega \mapsto X(\omega)$ leképezések struktúrájára megkötéseket kell tenni. A legegyszerűbb eset, ha az E az $\mathbb{R}$ legfeljebb megszámlálható direkt szorzata, vagyis amikor $E = \mathbb{R}^\infty$. Ugyancsak egyszerűen látható, hogy az $E = C([0,\infty))$ a kompakt halmazokon értelmezett egyenletes konvergenciával teljes szeparábilis metrikus tér. Jóval nehezebb probléma az $E = D([0,\infty))$ tér, amely a jobbról reguláris függvények tere. Ilyenkor a kompakt halmazokon való egyenletes konvergencia egy teljes metrikus teret definiál, de a tér nem lesz szeparábilis. Mivel a $D([0,\infty))$ tér a sztochasztikus folyamatok természetes alaptere, ez potenciálisan óriási gondok forrása lehetne. Megmutatható azonban, hogy $D([0,\infty))$ téren definiálható egy olyan topológia, az úgynevezett Szkorohod topológia, amely a teret teljes szeparábilis metrikus térré alakítja és amely által generált σ-algebra éppen a szorzat σ-algebra.

2. Ha az $\mathcal{F}$ σ-algebrát valamilyen (η_α) változók generálják, akkor a feltételi σ-algebra helyébe az (η_α) halmazt szokás írni. Vagyis definíció szerint

$$\mathbf{P}(A \mid (\eta_\alpha)) \stackrel{\circ}{=} \mathbf{P}(A \mid \sigma(\eta_\alpha)).$$

Fontos észrevétel, amelyet szokás Doob-lemmának is mondani, hogy a $\mathbf{P}(A \mid \eta)$ kifejezés felírható $g(\eta)$ módon ahol g egy Borel-mérhető valósból valósba menő leképezést. Az állítás tetszőleges teljes szeparábilis metrikus tér értékű változók esetén érvényben marad. A g függvényt szokás regresszív feltételes valószínűségnek mondani. A

$$\mathbf{P}(A \mid \eta) = g(\eta)$$

egyenlőségben szereplő g függvényt szokás

$$\mathbf{P}(A \mid \eta = x)$$

módon jelölni. Természetesen a $\mathbf{P}(A \mid \eta = x)$ szintén egy függvényosztályt jelöl. A függvényosztály elemei az η változó eloszlásában nullmértékű halmazok erejéig vannak meghatározva. Mivel nem függvényekről, hanem függvényosztályokról van szó ismételten felvethető a regularitás kérdése: Ha van olyan $P(A \mid \eta = x)$ módon jelölt függvénysereg, amely minden A esetén a $\mathbf{P}(A \mid \eta = x)$ egy verziója, akkor azt mondjuk, hogy a $\mathbf{P}(A \mid \eta)$ feltételes valószínűségnek van reguláris regresszív verziója. Ilyenkor persze ismét értelmes a

$$\int_{\Omega} \xi(\omega') P(d\omega' \mid \eta = x)$$

kifejezés és az értéke az $\mathbf{E}(\xi \mid \eta = x)$ egy verziója. Természetesen újra beszélhetünk a transzformált esetről, vagyis

$$\mathbf{E}(h(\xi) \mid \eta = x) = \int_{\Omega} h(\xi(\omega')) P(d\omega' \mid \eta = x)$$

Az egyetlen eltérés, hogy most az így kapott függvény nem az Ω téren, hanem a megfigyeléseket tartalmazó valós egyenesen van értelmezve. Természetesen a két oldal egyenlősége most sem minden x esetén értelmes csak majdnem minden $x \in \mathbb{R}$ esetén, ahol a majdnem mindenhol fogalmát implicite tartalmazó mértéket az η feltétel eloszlásfüggvénye által generált mérték adja.

3. Végezetül tekintsük az $\mathbf{P}(\xi \in B \mid \eta = y)$ típusú kifejezéseket. Ha B a számegyenes Borel-mérhető halmazain fut keresztül, akkor a kifejezést a ξ változó η feltételre vonatkozó regresszív feltételes eloszlásának mondjuk. Mivel ilyenkor az $(\Omega, \mathcal{A})$ mérhetőségi struktúrának választhatjuk a számegyenest az ő Borel-halmazaival, az idézett tétel alapján létezik reguláris verzió, amit $P(\xi \in B \mid \eta = y)$ módon fogunk jelölni. Ha X egy sztochasztikus folyamat és $\xi \doteq X(t)$ és $\eta \doteq X(s)$, ahol $s < t$, akkor a $P(\xi \in B \mid \eta = y)$ kifejezést szokás az X átmenetvalószínűségének mondani. A függvényt szokás $P_{st}(y, B)$ módon jelölni. A feltételes várható érték kiszámítására vonatkozó szabály szerint, ha h tetszőleges korlátos, vagy nem negatív függvény, akkor egyszerű helyettesítéses integrálással

$$\mathbf{E}(h(X(t) \mid X(s) = y)) = \int_{\Omega} h(\xi(\omega')) P(d\omega' \mid \eta = x) = \int_{\mathbb{R}} h(x) P_{st}(y, dx).$$

Az egyenlőség természetesen csak az $X(s)$ által generált eloszlás szerint majdnem mindenhol értelemben teljesül. Erre az összefüggésre sokszor fogunk hivatkozni, ezért érdemes összefoglalásképpen ismét átgondolni. Ha $h \doteq \chi_B$, akkor

$$\begin{aligned}
\mathbf{E}(h(X(t) \mid X(s) = y)) &\doteq \mathbf{E}(\chi_B(X(t)) \mid X(s) = y) \doteq \\
&\doteq \mathbf{P}(X(t) \in B \mid X(s) = y) \doteq \\
&\doteq P_{st}(y, B),
\end{aligned}$$

ahol végső soron csak a $P_{st}(y, B)$ definícióját használtuk. Ha $h \doteq \sum_k c_k \chi_{B_k}$, akkor felhasználva, hogy a feltételes várható érték lineáris

$$\begin{aligned}
\mathbf{E}(h(X(t) \mid X(s) = y)) &\doteq \mathbf{E}\left(\sum_k c_k \chi_{B_k}(X(t)) \mid X(s) = y\right) = \\
&= \sum_k c_k \mathbf{E}\left(\chi_{B_k}(X(t)) \mid X(s) = y\right) = \\
&= \sum_k c_k P_{st}(y, B_k) = \int_{\mathbb{R}} h(x) P_{st}(y, dx).
\end{aligned}$$

A feltételes várható értékre és az integrálra igaz a monoton konvergencia tétel és így az egyenlőség teljesül minden h nem negatív Borel-mérhető függvényre. Végezetül vegyük észre, hogy az egyenlőség másképpen fogalmazva az

$$\mathbf{E}(h(X(t) \mid X(s))) = \int_{\mathbb{R}} h(x) P_{st}(X(s), dx) \tag{1}$$

módon is írható, vagyis az $\mathbf{E}(h(X(t) \mid X(s)))$ feltételes valószínűséget úgy kapjuk, hogy az $\int_{\mathbb{R}} h(x) P_{st}(y, dx)$ paraméteres integrálba az y helyébe betesszük az $X(s)$ változót. Az egyenlőség most is csak majdnem mindenhol értelemben értendő, de a mértékte most a $\mathbf{P}$ szolgáltatja.

Markov–folyamatok

A Legyen X egy sztochasztikus folyamat. A későbbiek pontos megértése céljából megjegyezzük, hogy az X minden t időpontra pontosan definiált, vagyis minden t időpontra az $X(t)$ egy valószínűségi változó. Markov–tulajdonság szerint a múlt csak a jelen állapoton keresztül hat, az $X(s)$ állapotig tartó út nem befolyásolja az s utáni jövőt[2]:

$$\mathbf{P}(X(t) \in B \mid \mathcal{F}_s) = \mathbf{P}(X(t) \in B \mid X(s)), \quad t \geq s, \tag{2}$$

vagy ami a feltételes várható érték elemi tulajdonságai alapján ekvivalens evvel, minden g korlátos, Borel-mérhető függvényre

$$\mathbf{E}(g(X(t)) \mid \mathcal{F}_s) = \mathbf{E}(g(X(t)) \mid X(s)), \quad t \geq s, \tag{3}$$

ugyanis az olyan g függvények, amelyekre a (3) teljesül λ-rendszer, amely a (2) szerint tartalmazza a Borel–halmazok karakterisztikus függvényeinek π-rendszerét[3]. Ha $s = t$, akkor

$$\mathbf{E}(g(X(s)) \mid \mathcal{F}_s) = \mathbf{E}(g(X(s)) \mid X(s)) = g(X(s)),$$

ami csak akkor lehetséges, ha az $X(s)$ $\mathcal{F}_s$-mérhető, vagyis minden Markov–folyamat adaptált. A Markov–tulajdonság nem függ a filtrációtól. Ha $\mathcal{F}^0 \doteq \mathcal{F}^X$ az X által generált filtráció, akkor az $\mathcal{F}$ az adaptáltság miatt bővebb mint az $\mathcal{F}^0$, ezért

$$\begin{aligned} \mathbf{E}\left(g(X(t)) \mid \mathcal{F}_s^0\right) &= \mathbf{E}\left(\mathbf{E}(g(X(t)) \mid \mathcal{F}_s) \mid \mathcal{F}_s^0\right) = \\ &= \mathbf{E}\left(\mathbf{E}(g(X(t)) \mid X(s)) \mid \mathcal{F}_s^0\right) = \\ &= \mathbf{E}(g(X(t)) \mid X(s)). \end{aligned} \tag{4}$$

Ebből következően a Markov–folyamatok filtrációja általában vagy az $\mathcal{F}^0$, vagy az $\mathcal{F}^0$ nullmértékű halmazokkal való kibővítése.

0.1 Példa.
Minden független növekményű folyamat Markov–folyamat.

Ha X az $\mathcal{F}$ filtráció mellett független növekményű folyamat, és $g(x) \doteq \exp(iux)$, akkor felhasználva, hogy az $X(t) - X(s)$ definíció szerint független az $\mathcal{F}_s$ σ-algebrától

$$\begin{aligned} \mathbf{E}(g(X(t)) \mid \mathcal{F}_s) &= \exp(iuX(s))\,\mathbf{E}(\exp(iu[X(t) - X(s)]) \mid \mathcal{F}_s) = \\ &= \exp(iuX(s))\,\mathbf{E}(\exp(iu[X(t) - X(s)])) = \\ &= \exp(iuX(s))\,\mathbf{E}(\exp(iu[X(t) - X(s)]) \mid X(s)) = \\ &= \mathbf{E}(g(X(t)) \mid X(s)), \end{aligned}$$

ami a π-λ tétel segítségével átvihető tetszőleges g korlátos Borel-mérhető függvényre, tehát

$$\mathbf{P}(X(t) \in B \mid \mathcal{F}_s) = \mathbf{P}(X(t) \in B \mid X(s)).$$

□

A Markov-tulajdonsággal kapcsolatosan felvethető első kérdés, hogy a tulajdonság milyen transzformációkra nézve invariáns[4]. Ha az X Markov-folyamat, f Borel-mérhető függvény, vajon az $f(X)$ is Markov-folyamat? Ennek teljesüléséhez a

$$\mathbf{P}(f(X(t)) \in B \mid \mathcal{F}_s) = \mathbf{P}(f(X(t)) \in B \mid f(X(s))),$$

[2] A Markov-folyamatok a közönséges differenciálegyenletek sztochasztikus általánosításai. A közönséges differenciálegyenletek által leírt dinamikus rendszerek jövőbeli értéke egyértelműen determinált a rendszer kezdeti időpontban felvett értéke által.

[3] Szemben a martingáltulajdonsággal, az $X(t)$ változókra semmiféle integrálhatósági feltételt nem teszünk. Mivel a g korlátos, a feltételes várható értékek értelmesek.

[4] Emlékeztetünk, hogy a szemimartingálok esetén minden C^2 függvény megengedett. Most sajnos ez nem teljesül. Még lineáris leképezés is elronthatja a Markov-tulajdonságot.

egyenlőségnek kellene teljesülni. Vegyük észre, hogy az $f(X)$ folyamat „információtartalma” szűkülhet, vagyis a jobb oldali feltétel tartalma jelentősen megváltozhat. Ha $\sigma(X(s)) = \sigma(f(X(s)))$, akkor

$$\begin{aligned}\mathbf{P}(f(X(t)) \in B \mid \mathcal{F}_s) &= \mathbf{P}\left(X(t) \in f^{-1}(B) \mid X(s)\right) = \\ &= \mathbf{P}\left(X(t) \in f^{-1}(B) \mid f(X(s))\right) = \\ &= \mathbf{P}(f(X(t)) \in B \mid f(X(s))),\end{aligned}$$

vagyis az $f(X)$ ilyenkor Markov-folyamat. Számos szempontból igen tanulságos a következő példa:

0.2 Példa.
Markov–folyamat vetülete nem Markov–folyamat.

1. Legyen w Wiener-folyamat és tekintsük az

$$X(t) \stackrel{\circ}{=} \int_0^t w(u)\,du$$

folyamatot. Vegyük észre, hogy az X egy folytonosan deriválható trajektóriákkal rendelkező sztochasztikus folyamat. A w pozitív és negatív részét integrálva azonnal látható, hogy az X trajektóriái korlátos változásúak, vagyis az X egy szemimartingál.

2. Megmutatjuk, hogy az X nem Markov–folyamat. Legyen $\mathcal{F}^X$ az X által generált filtráció. Ha $\mathcal{F}^w$ a w által generált filtráció, akkor mivel folytonos függvények integrálja a közelítő összegek határértéke, ezért minden s-re $\mathcal{F}_s^X \subseteq \mathcal{F}_s^w$. Ugyanakkor

$$w(s) = \frac{d}{ds}X(s) = \lim_{h \nearrow 0} \frac{X(s+h) - X(s)}{h},$$

így minden s-re a $w(s)$ változó $\mathcal{F}_s^X$-mérhető, tehát $\mathcal{F} \stackrel{\circ}{=} \mathcal{F}^X = \mathcal{F}^w$. A Fubini–tétel segítségével azonnal látható, hogy az $X(t)$ minden t-re rendelkezik várható értékkel. A Fubini-tétel alkalmazásához elegendő észrevenni, hogy

$$\begin{aligned}\mathbf{E}(|X(t)|) &= \mathbf{E}\left(\left|\int_0^t w(u)\,du\right|\right) \le \mathbf{E}\left(\int_0^t |w(u)|\,du\right) = \\ &= \int_0^t \mathbf{E}(|w(u)|)\,du = \int_0^t \frac{1}{\sqrt{2\pi u}} \int_{\mathbb{R}} |x| \exp\left(-\frac{x^2}{2u}\right) du = \\ &= 2\int_0^t \frac{1}{\sqrt{2\pi u}} \int_0^\infty x \exp\left(-\frac{x^2}{2u}\right) dxdu = \\ &= 2\int_0^t \frac{1}{\sqrt{2\pi u}} \int_0^\infty \sqrt{2u}v \exp\left(-v^2\right) \sqrt{2u}dvdu = \\ &= 2\int_0^t \frac{\sqrt{u}}{\sqrt{2\pi}} \int_0^\infty 2v \exp\left(-v^2\right) dvdu = \\ &= 2\int_0^t \frac{\sqrt{u}}{\sqrt{2\pi}} \left[\exp\left(-x^2\right)\right]_0^\infty du = \\ &= 2\int_0^t \frac{\sqrt{u}}{\sqrt{2\pi}} du < \infty.\end{aligned}$$

Az $X(t)$ várható értéke a Wiener-folyamat elemi tulajdoságai miatt

$$\mathbf{E}(X(t)) = \mathbf{E}\left(\int_0^t w(u)\,du\right) = \int_0^t \mathbf{E}(w(u))\,du = \int_0^t 0du = 0.$$

A feltételes várható érték elemi szabályai alapján

$$\begin{aligned}\mathbf{E}(X(t) \mid \mathcal{F}_s) &= \mathbf{E}(X(s) \mid \mathcal{F}_s) + \mathbf{E}(X(t) - X(s) \mid \mathcal{F}_s) = \\ &= X(s) + \mathbf{E}(X(t) - X(s) \mid \mathcal{F}_s).\end{aligned}$$

Megmutatjuk, hogy

$$\mathbf{E}(X(t) - X(s) \mid \mathcal{F}_s) = (t-s)\,w(s). \tag{5}$$

A $w(u) - w(s)$ független a Wiener–folyamat $[0,s]$ szakaszon felvett értékeitől, ezért az

$$X(t) - X(s) - (t-s)\,w(s) = \int_s^t w(u) - w(s)\,du$$

független az $\mathcal{F}_s = \mathcal{F}^w$-től, így az $\mathcal{F}_s$ szerinti feltételes várható értéke megegyezik a közönséges várható értékével. A Fubini–tétel szerint pedig

$$\mathbf{E}\left(\int_s^t w(u) - w(s)\,du\right) = \int_s^t \mathbf{E}(w(u) - w(s))\,du = 0,$$

tehát

$$\mathbf{E}(X(t) - X(s) \mid \mathcal{F}_s) = (t-s)\,\mathbf{E}(w(s) \mid \mathcal{F}_s) = (t-s)\,w(s).$$

Ebből

$$\mathbf{E}(X(t) \mid \mathcal{F}_s) = X(s) + (t-s)\,w(s).$$

A gondolatmenetet elejét megismételve, és ismételten kihasználva, hogy az $X(s)$ és a $w(u) - w(s)$ szintén független

$$\mathbf{E}(X(t) \mid X(s)) = X(s) + (t-s)\,\mathbf{E}(w(s) \mid X(s)).$$

A következő pontban meg fogjuk mutatni, hogy

$$\mathbf{E}(w(s) \mid X(s)) \neq w(s)$$

amiből már következik, hogy az X nem Markov-folyamat. Érdemes hangsúlyozni, hogy az egyenlőség azért nem teljesül, mert

$$w(s) = \lim_{h \searrow 0} \frac{X(t-h) - X(t)}{-h}$$

és a derivált kiszámolásához szükséges „tudni" az X múltját.

3. Vegyük észre, hogy a $\left(w(t), \int_0^t w(u)\,du\right)$ pár normális eloszlású, ugyanis ha tekintjük az integrált közelítő összegeket, akkor az együttes eloszlás normális, így a határérték is az lesz, ugyanis normális eloszlású változók határértéke is normális eloszlású. Normális eloszlás esetén a regressziós függvény

$$\mu_1 + \frac{\sigma_1}{\sigma_2} r (x - \mu_2)$$

alakú. Most $\mu_1 = \mu_2 = 0$. A $w(t)$ szórása $\sqrt{t}$. A kovariancia

$$\begin{aligned}\mathbf{E}\left(w(t) \int_0^t w(u)\,du\right) &= \int_0^t \mathbf{E}(w(t)\,w(u))\,du = \\ &= \int_0^t u du = \frac{t^2}{2}.\end{aligned}$$

Mivel

$$\begin{aligned}\mathbf{E}\left(\left(\int_0^t w(u)\,du\right)^2\right) &= \mathbf{E}\left(\int_0^t w(u)\,du \int_0^t w(r)\,dr\right) = \\ &= \int_0^t \int_0^t \mathbf{E}(w(u)\,w(r))\,dudr = \\ &= \int_0^t \int_0^t \min(u,r)\,dudr\end{aligned}$$

ezért a szórás mint a t paraméter függvénye deriválható. Így

$$\mathbf{E}\left(w\left(s\right) \mid X\left(s\right)=x\right)=a\left(s\right)x,$$

vagyis

$$\mathbf{E}\left(w\left(s\right) \mid X\left(s\right)\right)=a\left(s\right)X\left(s\right),$$

ahol az $a\left(s\right)$ függvény deriválható. Ha most a Markov-tulajdonság teljesülne, akkor

$$a\left(s\right)X\left(s\right)=w\left(s\right)$$

lenne, de a $w\left(s\right)$ nem deriválható s szerint az $a\left(s\right)X\left(s\right)$ pedig igen.

4. Vegyük észre hogy az $\left(X\left(s\right),w\left(s\right)\right)$ által generált filtráció szintén $\mathcal{F}$. A fenti számolásban, felhasználva, hogy a $w\left(t\right)-w\left(s\right)$ független az $\left(X\left(s\right),w\left(s\right)\right)$ pártól

$$\begin{gathered}\mathbf{E}\left(\left(X\left(t\right),w\left(t\right)\right) \mid \left(X\left(s\right),w\left(s\right)\right)\right)=\\ =\left(X\left(s\right),w\left(s\right)\right)+\mathbf{E}\left(\left(\left(t-s\right)w\left(s\right),0\right) \mid \left(X\left(s\right),w\left(s\right)\right)\right)=\\ =\left(X\left(s\right),w\left(s\right)\right)+\left(t-s\right)\left(w\left(s\right),0\right)=\\ =\left(X\left(s\right)+\left(t-s\right)w\left(s\right),w\left(s\right)\right).\end{gathered}$$

Az elmondottakból azonnal látható, hogy az $\left(X\left(s\right),w\left(s\right)\right)$ pár viszont kétdimenziós Markov-folyamat.

□

Átmenetvalószínűség függvény

A Markov-folyamat definíciója a (2) memoriamentességi feltétel mellett egyéb megkötést is tartalmaz. A (2) jobb oldalán álló $\mathbf{P}\left(X\left(t\right)\in B \mid X\left(s\right)\right)$ kifejezés, ismételten a feltételes várható érték elemi tulajdonságai szerint $P\left(s,X\left(s\right),t,B\right)$ módon írható, ahol a $P\left(s,x,t,B\right)$ regressziós függvény interpretációja szerint annak a valószínűsége, hogy az s időpontban az x állapotban levő rendszer a t időpontban a B halmazban lesz. Miként említettük, általános körülmények között semmi sem garantálja, hogy a $P\left(s,x,t,B\right)$ a B szerint mérték legyen, vagyis a feltételes valószínűségnek nincsen feltétlenül reguláris verziója. A (2) logikai tulajdonság mellett éppen a reguláris feltételes valószínűség létezését rögzíti a következő definíció:

0.3 Definíció.
Legyen $\left(E,\mathcal{B}\right)$ mérhető tér, amit fázistérnek fogunk nevezni. Az $X\left(t\right)$, $t\in\Theta\subseteq\mathbb{R}$ E értékű folyamatot az $\mathcal{F}$ filtrációra nézve Markov-folyamatnak mondjuk, ha teljesülnek az alábbi feltételek:

1. $\mathbf{P}\left(X\left(t\right)\in B \mid \mathcal{F}_s\right)=\mathbf{P}\left(X\left(t\right)\in B \mid X\left(s\right)\right)$ *valahányszor* $t\geq s$, $B\in\mathcal{B}$.

2. *Tetszőleges $t\geq s$ esetén a $\mathbf{P}\left(X\left(t\right)\in B \mid X\left(s\right)=x\right)$ regressziós függvénynek van egy kitüntetett reguláris verziója, amelyet a továbbiakban*

$$P_{st}\left(x,B\right),\quad \textit{vagy}\quad P\left(s,x,t,B\right)$$

módon fogunk jelölni, és átmenetvalószínűség, vagy átmenetfüggvénynek fogunk mondani.

3. *A $P_{st}\left(x,B\right)$ függvény a B halmaz rögzítése esetén az x változó szerint $\left(E,\mathcal{B}\right)$ mérhető.*

4. *A $P_{st}\left(x,B\right)$ függvény az x pont rögzítése esetén a B változó szerint mérték az $\left(E,\mathcal{B}\right)$ mérhető téren.*

5. $P_{st}\left(x,E\right)\leq 1$.

A feltételeket egyidejűleg úgy is fogalmazhatjuk, hogy adott átmenetvalószínűségek P_{st} serege[5] *és*

$$\mathbf{P}\left(X\left(t\right)\in B\mid\mathcal{F}_{s}\right)=P_{st}\left(X\left(s\right),B\right). \tag{6}$$

A figyelmes olvasónak feltűnhetett, hogy nem követeltük meg a $P_{st}\left(x,E\right)=1$ feltételt. Előfordulhat ugyanis, hogy az s időpontban x állapotban levő rendszer pozitív valószínűséggel „nem éri meg" a t időpontot. Például, ha a folyamat valamilyen kiszolgálásra váró egyedek számát adja meg, előfordulhat, hogy a t időpont előtt a kiszolgálásra váró egyedek száma végtelen lesz, így a rendszer a t időpont előtt „felrobban". Ugyancsak előfordulhat, hogy bizonyos egyedek a sorból kiszolgálás nélkül távoznak, és így kikerülnek a rendszerből.

Az s,t,x rögzítésével kapott valószínűségi mértéket időnként $P_{s,x,t}$, vagy $P\left(s,x,t\right)$ módon is jelöljük. Gyakran hasznos, és szemléletes, az utolsó komponens által definiált mérték szerinti integrálást a $dP_{s,x,t}$ helyett a $P_{st}\left(x,dy\right)$, vagy a $P\left(s,x,t,dy\right)$ kifejezéssel való „szorzásként" írni. Első ránézésre szokatlan, bár logikus az

$$\int_{E}P_{st}\left(x,dy\right)f\left(y\right)$$

jelölés, ami „klasszikusan"

$$\int_{E}f\left(y\right)dP_{s,x,t}\left(y\right)$$

vagy

$$\int_{E}f\left(y\right)P_{s,x,t}\left(dy\right)=\int_{E}f\left(y\right)P\left(s,x,t,dy\right)$$

lenne. Az új jelölés logikája szerint az $\int_{E}P_{st}\left(x,dy\right)$ operátort alkalmazni kell az $f\left(y\right)$ függvényre. A regresszív feltételes valószínűség, a Markov-tulajdonság és a teljes várható érték tétel miatt, felhasználva, hogy az $x\mapsto P_{su}\left(x,B\right)$ Borel-mérhető[6], ha $s<u<t$, akkor

$$\begin{aligned}
P_{st}\left(X\left(t\right),B\right) &\overset{\circ}{=} \mathbf{P}\left(X\left(t\right)\in B\mid X\left(s\right)\right)=\mathbf{P}\left(X\left(t\right)\in B\mid\mathcal{F}_{s}\right)= \\
&= \mathbf{E}\left(\chi_{B}\left(X\left(t\right)\right)\mid\mathcal{F}_{s}\right)= \\
&= \mathbf{E}\left(\mathbf{E}\left(\chi_{B}\left(X\left(t\right)\right)\mid\mathcal{F}_{u}\right)\mid\mathcal{F}_{s}\right)= \\
&= \mathbf{E}\left(\mathbf{E}\left(\chi_{B}\left(X\left(t\right)\right)\mid X\left(u\right)\right)\mid\mathcal{F}_{s}\right)= \\
&= \mathbf{E}\left(P_{ut}\left(X\left(u\right),B\right)\mid\mathcal{F}_{s}\right)=\mathbf{E}\left(P_{ut}\left(X\left(u\right),B\right)\mid X\left(s\right)\right).
\end{aligned}$$

Ha bevezetjük a

$$h\left(x\right)\overset{\circ}{=}P_{ut}\left(x,B\right)$$

jelölést, akkor a feltételes várható érték bevezetőben említett (1) kiszámítási szabálya szerint

$$\begin{aligned}
P_{st}\left(x,B\right) &= \mathbf{E}\left(P_{ut}\left(X\left(u\right),B\right)\mid X\left(s\right)=x\right)= \\
&= \mathbf{E}\left(h\left(X\left(u\right)\right)\mid X\left(s\right)=x\right) \\
&= \int_{E}h\left(y\right)dP_{su}\left(x,dy\right),
\end{aligned}$$

Az említett „operátoros" jelöléssel

$$\begin{aligned}
P_{st}\left(x,B\right) &= \int_{E}h\left(y\right)P_{su}\left(x,dy\right)= \\
&= \int_{E}P_{ut}\left(y,B\right)P_{su}\left(x,dy\right)= \\
&= \int_{E}P_{su}\left(x,dy\right)P_{ut}\left(y,B\right).
\end{aligned}$$

[5]Emlékeztetünk, hogy a $P\left(x,B\right)$ átmenetvalószínűség definíció szerint az x feltétel mérhető függvénye, a B halmaz szerint mérték.

[6]V.ö.: (4) sor.

Az összefüggést szokás Chapman–Kolmogorov-azonosságnak mondani. Az azonosság interpretációja alapján annak a valószínűsége, hogy az s időpontban az x állapotban levő rendszer a későbbi t időpontban a B halmazban lesz úgy kapható, ha egy köztes u időpontban megfigyeljük a rendszert, majd az u időpontban felvett állapotok alapján a lehetséges diszjunkt utak valószínűségét összegezzük. Vegyük észre, hogy az operátoros jelölés miatt az $s < u < t$ időpontok a „helyes" sorrendbe kerültek.

0.4 Példa.
Markov-láncok átmenetvalószínűsége.

Tegyük fel, hogy E véges, vagy megszámlálható állapottér. Ilyenkor szokás Markov-láncokról beszélni[7]. Ilyenkor, mivel a mérhető tér diszjunk megszámlálható atomból áll, a $P_{st}(x, B)$ megadható egy $(p_{ij}(s,t))$ véges vagy végtelen mátrix segítségével. A Chapman–Kolmogorov-azonosság a következő: Minden $i \mapsto j$ átmenetre és $s < u < t$ időpontra

$$\begin{aligned} p_{ij}(s,t) &= \int_E P_{su}(i, dk)\, P_{ut}(k, \{j\}) = \\ &= \sum_k p_{ik}(s,u)\, p_{kj}(u,t). \end{aligned}$$

Érdemes észrevenni, hogy jól jött az operátoros felírási mód, vagyis az operátoros felírási módban a sorrend éppen a mátrixok szorzási szabályának megfelelően jött ki. Ha $P(s,t)$ jelöli az s és t közötti átmenetekhez tartozó valószínűségekből álló mátrixot, akkor a mátrixszorzás segítségével a Chapman–Kolmogorov-azonosság

$$P(s,t) = P(s,u)\, P(u,t)$$

módon írható. Ha a Markov lánc homogén, vagyis a $P(s,t)$ nagysága csak az s és a t közötti időszak hosszától függ, akkor

$$P(0, t-s) = P(0, s-u)\, P(s-u, t) = P(0, s-u)\, P(0, t-s-u).$$

Ha az első koordinátát elhagyjuk, akkor az egyenlőség az

$$P(a+b) = P(a)\, P(b)$$

alakba írható.

□

0.5 Példa.
Poisson-folyamatok átmenetvalószínűség mátrixa.

A Poisson-folyamat, mivel stacionárius és független növekményű, ezért homogén Markov-lánc. Ha $i > j$, akkor az $i \mapsto j$ átmenet lehetelen, vagyis a $P(s)$ mátrixban a diagonális alatt minden valószínűség nulla. A felső háromszögben az s időszak alatt bekövetkezett ugrások száma van, vagyis ha $j - i = k$, akkor éppen

$$p_{ij}(s) = \frac{(\lambda s)^k}{k!} \exp(-\lambda s).$$

[7] A terminológia nem teljesen egyértelmű. Van aki akkor beszél Markov-láncról, ha az idő diszkrét. Van aki akkor, ha az E és az idő is diszkrét.

A Chapman-Kolmogorov-azonosság szerint, ha $i \leq j$

$$\begin{aligned}
p_{ij}(s+t) &= \sum_k p_{ik}(s)\, p_{kj}(t) = \\
&= \sum_{k=i}^{j} p_{ik}(s)\, p_{kj}(t) = \\
&= \sum_{l=0}^{j-i} \frac{(\lambda s)^l}{l!} \exp(-\lambda s) \frac{(\lambda t)^{j-i-l}}{(j-i-l)!} \exp(-\lambda t) = \\
&= \exp(-\lambda(t+s))\, \lambda^{j-i} \sum_{l=0}^{j-i} \frac{s^l}{l!} \frac{t^{j-i-l}}{(j-i-l)!} = \\
&= \frac{\exp(-\lambda(t+s))\, \lambda^{j-i}}{(j-i)!} \sum_{l=0}^{j-i} \binom{j-i}{l} s^l t^{j-i-l} = \\
&= \frac{\exp(-\lambda(t+s))\,(\lambda(s+t))^{j-i}}{(j-i)!}.
\end{aligned}$$

□

0.6 Példa.
Chapman–Kolmogorov egyenlet sűrűségfüggvények esetén.

Tegyük fel, hogy a $P_{st}(x, B)$ regresszív feltételes eloszlások rendelkeznek sűrűségfüggvénnyel, vagyis minden B és minden (s, t) pár esetén

$$P_{st}(x, B) = \int_B p_{st}(x, y)\, dy.$$

A Chapman-Kolmogorov egyenlet szerint

$$P_{st}(x, B) = \int_E P_{su}(x, dy)\, P_{ut}(y, B).$$

Ilyenkor a súrűségfüggvény szerinti integrálás képlete alapján tetszőleges B esetén

$$\begin{aligned}
\int_B p_{st}(x, z)\, dz &= \int_E P_{ut}(y, B)\, p_{su}(x, y)\, dy = \\
&= \int_E \left(\int_B p_{ut}(y, z)\, dz \right) p_{su}(x, y)\, dy = \\
&= \int_E \left(\int_B p_{su}(x, y)\, p_{ut}(y, z)\, dz \right) dy = \\
&= \int_B \int_E p_{su}(x, y)\, p_{ut}(y, z)\, dy dz.
\end{aligned}$$

Mivel az egyenlőség minden B esetén teljesül, ezért majdnem minden z esetén

$$p_{st}(x, z) = \int_E p_{su}(x, y)\, p_{ut}(y, z)\, dy.$$

□

0.7 Példa.
A Wiener–folyamat átmenetvalószínűségének sűrűségfüggvénye

$$p_{st}(x, y) \overset{\circ}{=} \frac{1}{\sqrt{2\pi(t-s)}} \exp\left(-\frac{(y-x)^2}{2(t-s)} \right). \tag{7}$$

Minden w Wiener–folyamat független növekményű, ezért Markov–folyamat. Ha bevezetjük a $H(x,y) \mathrel{\hat{=}} \chi_B(x+y)$ függvényt, akkor a független koordinátákra vonatkozó feltételes valószínűségi szabály alapján

$$\begin{aligned}
\mathbf{P}(w(t) \in B \mid \mathcal{F}_s) &= \mathbf{P}(w(t) \in B \mid w(s)) = \\
&= \mathbf{P}([w(t) - w(s)] + w(s) \in B \mid w(s)) \mathrel{\hat{=}} \\
&\mathrel{\hat{=}} \mathbf{E}(H(w(t) - w(s), w(s)) \mid w(s)) = \\
&= \mathbf{E}(H(w(t) - w(s), y)) \mid_{y=w(s)} = \\
&= \Phi_{t-s}(B - w(s)),
\end{aligned}$$

ahol Φ_{t-s} a $w(t) - w(s)$ eloszlása. Ezek szerint a w átmenetvalószínűsége a (7) sűrűségfüggvénnyel adható meg.

$$\mathbf{E}(f(w(t)) \mid \mathcal{F}_s) = \mathbf{E}(f(w(t)) \mid w(s)) \mathrel{\hat{=}} g_{st}(w(s)),$$

ahol

$$g_{st}(x) \mathrel{\hat{=}} \frac{1}{\sqrt{2\pi(t-s)}} \int_{\mathbb{R}} \exp\left(-\frac{(y-x)^2}{2(t-s)}\right) f(y)\, dy.$$

Chapman-Kolmogorov-azonosság most a következő

$$\begin{aligned}
P_s(x, B) &= \int_B \frac{1}{\sqrt{2\pi s}} \exp\left(-\frac{(y-x)^2}{2s}\right) dy \\
P_t(z, B) &= \int_B \frac{1}{\sqrt{2\pi t}} \exp\left(-\frac{(y-z)^2}{2t}\right) dy
\end{aligned}$$

Az egyenletben szerplő kifejezések

$$\begin{aligned}
&\int_B \frac{1}{\sqrt{2\pi s}} \exp\left(-\frac{(y-x)^2}{2s}\right) dy = \\
&= \int_{\mathbf{R}} \frac{1}{\sqrt{2\pi t}} \exp\left(-\frac{(z-z)^2}{2s}\right) \int_B \frac{1}{\sqrt{2\pi t}} \exp\left(-\frac{(z-y)^2}{2t}\right) dydz.
\end{aligned}$$

Az y szerint integrált a Fubini-tétel miatt előrevihetjük. Mivel minden B-re teljesülni kell az egyenletnek, ezért áttérhetünk a sűrűségfüggvényekre, így a Chapman-Kolmogorov-azonosság most a következőt jelenti:

$$\begin{aligned}
p_{s+t}(x,y) &= \int_{\mathbb{R}} p_s(x,z)\, p_t(z,y)\, dz = \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi(t+s)}} \int_{\mathbb{R}} \exp\left(-\frac{(z-x)^2}{2s}\right) \exp\left(-\frac{(z-y)^2}{2t}\right) dz = \\
&= \int_{\mathbb{R}} h(z)\, g(y-z)\, dz.
\end{aligned}$$

Ez tekinthető egy $N(x, \sqrt{s})$ és egy $N\left(0, \sqrt{t}\right)$ konvolúciójának az y-helyen. A konvolúcióhoz tartozó eloszlás $N\left(x, \sqrt{s+t}\right)$, amely sűrűségfüggvénye az y helyen éppen

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi(t+s)}} \exp\left(-\frac{(y-x)^2}{2(s+t)}\right),$$

vagyis az azonosság most is teljesül.

$\square$

Vegyük észre, hogy a diszkrét állapottér és a sűrűségfüggvényes példa egy képlettel írható, ha az átmenetvelószínűségek felírhatók

$$P_{st}(x,B)=\int_B p_{st}(x,y)\,d\mu(y)$$

módon, akkor

$$p_{st}(x,z)=\int_E p_{su}(x,y)\,p_{ut}(x,y)\,d\mu(y),$$

ahol a diszkét esetben μ a számláló mérték, a folytonos esetben μ a Lebesgue-mérték.

Átmenetvalószínűségekhez rendelt operátorok

Tetszőleges átmenetvalószínűségekhez hozzárendelhetünk két operátort. Az egyikkel már találkoztunk. Jelölje $\mathcal{B}_b(E)$ az $(E,\mathcal{B})$ téren értelmezett $\mathcal{B}$-mérhető, korlátos függvények halmazát. A $\mathcal{B}_b(E)$ a szuprémum normára nézve Banach–tér, és a függvények korlátossága miatt a lépcsős függvények sűrűek a térben. Minden s,t időpontra értelmezhető a

$$(P_{st}f)(x)\doteq\int_E P(s,x,t,dy)\,f(y),\quad f\in\mathcal{B}_b(E) \tag{8}$$

lineáris operátor. A $P_{st}f$ szemléletesen a következőt jelenti: Tegyük fel, hogy az E fázistéren adott valamilyen f „kifizetési függvény”. Ha a rendszer az $y\in E$ állapotban lesz, akkor a „nyeremény” $f(y)$ lesz. A $(P_{st}f)(x)$ értéke interpretálható mint az s időpontban és $x\in E$ állapotban „remélt” nyereség. A P_{st} a $P(s,x,t,B)$ átmenetvalószínűség kiterjesztése a χ_B alakú függvényekről az $\mathcal{B}_b(E)$ térre. Ez indokolja a jelölést.

0.8 Állítás.
Ha X Markov–folyamat, akkor

1. $P_{st}:\mathcal{B}_b(E)\to\mathcal{B}_b(E)$, *nem negatív, lineáris operátor és* $\|P_{st}\|\leq 1$,
2. *ha* $s<t$ *és* $f\in\mathcal{B}_b(E)$, *akkor* $\mathbf{E}(f(X(t))\mid\mathcal{F}_s)=(P_{st}f)(X(s))$,
3. *ha* $s<u<t$, *akkor* $P_{st}=P_{su}P_{ut}$.

Bizonyítás: Az első állításban csak a $P_{st}f\in\mathcal{B}_b(E)$ tartalmazást érdemes igazolni, ugyanis a többi tulajdonság evidens. Ha $|f|\leq K$, akkor, mivel $P_{s,x,t}(E)\leq 1$, ezért $|P_{st}f|\leq K$, vagyis $\|P_{st}\|\leq 1$. A $P_{st}f$ mérhetősége $f\doteq\chi_B$ karakterisztikus függvények esetén a $P_{st}f=P(s,x,t,B)$ miatt evidens. A lépcsős függvények sűrűek a $\mathcal{B}_b(E)$ térben, így a linearitás és a folytonosság miatt a $P_{st}f$ minden $f\in\mathcal{B}_b(E)$ esetén mérhető. A második állításban ha $f\doteq\chi_B$, akkor az átmenetvalószínűség definíciója szerint a

$$\begin{aligned}\mathbf{E}(f(X(t))\mid\mathcal{F}_s) &= \mathbf{E}(f(X(t))\mid X(s))=\\ &= \mathbf{P}(X(t)\in B\mid X(s)=x)\mid_{x=X(s)}=\\ &= P(s,t,X(s),B)=\int_B dP_{st}(X(s),dy)=\\ &= \int_E \chi_B\,dP_{st}(X(s),dy)\doteq(P_{st}f)(X(s)).\end{aligned}$$

A P_{st}, illetve a feltételes várható érték lineáris, és az egyenletes konvergenciára nézve folytonos. A lépcsős függvények sűrűek a $\mathcal{B}_b(E)$ térben, így az egyenlőség minden $f\in\mathcal{B}_b(E)$-re teljesül. A harmadik állítás a Chapman—Kolmogorov–azonosság elemi következménye. Ha $f \circeq \chi_B$, akkor

$$\begin{aligned}(P_{st}f)(x) &= P(s,x,t,B) = \int_E P_{su}(x,dy)\,P_{ut}(y,B) = \\ &= \int_E\left(\int_E \chi_B(z)\,dP_{ut}(y,dz)\right)dP_{su}(x,dy) = \\ &= \int_E P_{ut}f(y)\,dP_{su}(x,dy) = (P_{su}(P_{ut}f))(x),\end{aligned}$$

amely egyenlőség a linearitás és a folytonosság miatt kiterjeszthető a teljes $\mathcal{B}_b(E)$-re.

□

A későbbiek megértése szempontjából nem érdektelen hangsúlyozni, hogy a $P_{st} = P_{su}P_{ut}$ operátoregyenletben először a későbbi időtartományhoz tartozó operátort kell végrehajtani, vagyis az operátoregyenlet időben hátrafelé halad. Az időtartományokat megadó indexeket ugyanakkor balról jobbra haladva kell értelmezni. Vagyis először ki kell számítani az $u < t$ időpontok közötti átmenethez tartozó operátort, majd ennek eredményére alkalmazni kell a korábbi időpontokhoz tartozó $s < u$ átmenetet.

A folyamathoz rendelhető másik operátor bemutatásához induljunk ki abból, hogy az s időpontban ismert az $X(s)$ állapot q_s eloszlása. A regresszív feltételes valószínűség definíciója szerint az $X(t)$ változó q_t eloszlása

$$\begin{aligned}q_t(B) &\circeq \mathbf{P}(X(t)\in B) = \int_E \mathbf{P}(X(t)\in B \mid X(s)=x)\,dq_s(x) = \\ &= \int_E P(s,t,x,B)\,dq_s(x).\end{aligned}$$

Az így kapott $q_s \mapsto q_t$ leképezés mértékek, tehát duális típusú terek között hat, ezért az operátorra a P^*_{ts} jelölést fogjuk használni. Vegyük észre, hogy a $*$ felső indexen kívül az alsó indexek sorrendje is ts, és nem st. Bár az idő szerinti indexek fel vannak cserélve, valójában a P^*_{ts} az idő múlásának megfelelően hat, vagyis $s \mapsto t$ leképezést valósít meg. Jelölje $\mathcal{M}$ az előjeles, tehát véges mértékek családját. Az $\mathcal{M}$ téren a totális variáció norma. A Vitali—Hahn—Saks–tétel szerint az $\mathcal{M}$ a totális variációra nézve Banach–tér[8].

0.9 Állítás.
Ha X Markov–folyamat, akkor

1. $P^*_{ts}: \mathcal{M} \to \mathcal{M}$, *nem negatív, lineáris operátor és* $\|P^*_{ts}\| \le 1$,
2. *ha* $s < u < t$, *akkor* $P^*_{ts} = P^*_{tu}P^*_{us}$.

Bizonyítás: Az első tulajdonság evidens. A Chapman—Kolmogorov–azonosság szerint

$$\begin{aligned}q_t(B) &\circeq (P^*_{ts}q_s)(B) \circeq \int_E P_{s,t}(x,B)\,dq_s(x) = \\ &= \int_E\left(\int_E P_{u,t}(y,B)\,P_{s,u}(x,dy)\right)dq_s(x).\end{aligned} \tag{9}$$

A belső $P_{ut}(y,B)$ integrandus az y szerint mérhető, tehát lépcsős függvények monoton növekedő határértéke. Tegyünk a $P_{ut}(y,B)$ helyébe valamely $C \subseteq E$, $\mathcal{B}$-halmaz karakterisztikus függvényét. Ekkor a jobb oldali belső kifejezés

$$\int_E \chi_C(y)\,dP_{su}(x,dy) = P(s,x,u,C),$$

[8] V.ö.: Valószínűségszámítás 11.1. tétel, 470. oldal.

amit a q_s szerint integrálva

$$\int_E P(s,x,u,C)\,dq_s(x) \triangleq q_u(C).$$

Lépcsős függvényre áttérve, a monoton konvergencia tétel felhasználásával a (9) jobb oldala

$$\int_E P_{ut}(y,B)\,dq_u(y) \triangleq (P^*_{tu}q_u)(B).$$

A $q_u \triangleq P^*_{us}q_s$ kifejezést behelyettesítve

$$P^*_{ts} = P^*_{tu}P^*_{us}.$$

□

Hangsúlyozzuk, hogy most az operátoregyenlet időben előrehalad, vagyis először az időben előbbre levő egyenletet kell végrehajtani. Az időkoordináták felcserélésnek oka, hogy az operátorokat jobbról balra szokás felírni. Az operátoregyenlet időkoordinátáit szintén jobbról balra haladva kell olvasni. Természetesen csak jelölési problémáról van szó, amely abból ered, hogy biztosítani akarjuk, hogy az operátorokhoz tartozó félcsoport-tulajdonságban az u index „középre" kerüljön.

A két operátor kapcsolatát mutatja a következő állítás:

0.10 Állítás.
Tetszőleges $s < t$ időpontok esetén minden $f \geq 0$, vagy korlátos mérhető függvényre

$$\int_E (P_{st}f)(x)\,dq_s(x) = \int_E f(x)\,(P^*_{ts}q_s)(dx).$$

Ha az $\int_E f d\mu$ integrálást a $\langle \mu, f\rangle$ skaláris szorzat jellel jelöljük, akkor

$$\langle q_s, P_{st}f\rangle = \langle P^*_{ts}q_s, f\rangle.$$

Az operátorok interpretációja alapján az integrálok közös értéke az f kifizetés későbbi t időpontban kiszámolt várható értékét adják meg.

Bizonyítás: Az operátorok linearitása, monotonitása miatt elegendő az állítást $f = \chi_B$ karakterisztikus függvényekre igazolni. Ilyenkor

$$\int_E P_{st}(f)(x)\,dq_s(x) = \int_E P(s,t,x,B)\,dq_s(x) = q_t(B)$$

illetve

$$\int_E f(x)\,P^*_{ts}(q_s(dx)) = \int_E \chi_B(x)\,P^*_{ts}(q_s(dx)) = P^*_{ts}(q_s)(B) = q_t(B)$$

□

Ennek megfelelően szokás a P^*_{ts} operátort a P_{st} adjungáltjának, vagy duálisának is mondani.

Kolmogorov–egyenletek

Az átmenetvalószínűségekhez két operátorcsaládot rendeltünk. Mivel minden operátor két időponttól függ, és minden időpontot elvileg két irányba, előre és hátra változtathatunk ezért operátortípusonként négy fajta egyenlet képzelhető el. Ennek megfelelően elvileg nyolc féle Kolmogorov-egyenletről beszélhetünk. Ugyanakkor a homogén esetben az eloszlások csak az időpontok távolságának megváltozásától függnek, és ilyenkor a deriváltakat elegendő a $t = 0$ időpontban felírni, ahol csak a $t > 0$ időpontok felé lehet elmozdulni, ezért összesen csak négy esettel szokás foglakozni: Azzal az esettel, amikor a kezdő időpontot csökkentjük, ill amikor a végidőpontot növeljük. Ennek megfelelően beszélhetünk hátra és előre típusú egyenletekről. Az előre egyenletek esetén a végidőpontból előre lépve írjuk fel a deriváltat, a hátra operátor esetén a kezdő időpontból visszalépve írjuk fel a deriváltat. A hátra operátort általában a P_{st} esetben szokás felírni, az előre operátort pedig a P_{ts}^{*} operátor esetén. Ennek megfelelően általában kétféle Kolmogorov–egyenletről szokás beszélni. Vegyük észre, hogy az idő-index felírási szabálya szerint mind a két esetben az első időparaméter szerint számoljuk a deriváltat, az egyik esetben az első időparaméter értékét növelni kell, a másik esetben pedig csökkenteni.

1. **A hátrafelé haladó egyenlet:** Vegyük a Markov–folyamathoz rendelt P_{st} operátorokat, és rögzítsük az s időpontot. A kezdő időpontot hátrafelé változtatva vezessük be az

$$A_s f \mathrel{\hat=} \lim_{h\searrow 0} \frac{P_{s-h,s}f - f}{h} = \lim_{h\searrow 0} \frac{P_{s-h,s}f - P_{ss}f}{h} \tag{10}$$

deriváltat. Jelölje $\mathcal{D}(A_s)$ az olyan f függvények halmazát, amelyekre a határérték létezik[9]. A képletben zavaró lehet, hogy a számlálóban a h növekmény negatív előjellel szerepel, a nevezőben pedig pozitívval. Ennek oka, hogy ha a folyamat homogén vagyis a P_{us} csak az $s-u$ időszak hosszától függ, akkor

$$A_s f \mathrel{\hat=} \lim_{h\searrow 0} \frac{P_{s-(s-h)}f - P_{s-s}f}{h} = \lim_{h\searrow 0} \frac{P_h f - P_0 f}{h},$$

ami éppen a deriválás „helyes” képlete. Másképpen fogalmazva az $s-h$ és s időpontok között h idő telt el, így a derivált az eltelt idő nagysága szempontjából helyesen van definiálva, de a kezdőpont változtatása miatt a folyamatot időben visszafelé haladva „deriváljuk". Ha a t időpontot rögzítjük és az

$$f(s,x) \mathrel{\hat=} (P_{st}u)(x),$$

az s szerint deriválható, akkor a $P_{st} = P_{su}P_{ut}$ félcsoport tulajdonság miatt

$$\begin{aligned}
\frac{\partial f}{\partial s}(s,x) &\mathrel{\hat=} \lim_{h\searrow 0} \frac{f(s-h,x) - f(s,x)}{-h} = \\
&= \lim_{h\searrow 0} \frac{(P_{s-h,t}u)(x) - (P_{s,t}u)(x)}{-h} = \\
&= \lim_{h\searrow 0} \frac{(P_{s-h,s}P_{st}u)(x) - (P_{s,t}u)(x)}{-h} = \\
&= -\lim_{h\searrow 0} \frac{P_{s-h,s} - I}{h}(P_{st}u)(x) \mathrel{\hat=} -A_s f(s,x),
\end{aligned}$$

feltéve persze, hogy a levezetésnek a különböző nem említett szempontok szerint volt értelme. Ha az $u \mathrel{\hat=} \chi_B$-hez tartozó f eleme az A_s derivált operátor $\mathcal{D}(A_s)$ értelmezési tartománynak[10], akkor

$$f(s,x) = P_{st}(x,B).$$

Ha az átmenetvalószínűség függvény elég jó tulajdonságokkal rendelkezik, akkor

$$\lim_{s\nearrow t} f(s,x) = \lim_{s\nearrow t} P_{st}(x,B) = P_{tt}(x,B) = \chi_B.$$

Általános elvként tehát kimondhatjuk, hogy megfelelő feltételek teljesülés esetén a $P(s,t,x,B)$ átmenetvalószínűség kielégíti a

$$\frac{\partial P}{\partial s}(s,x,t,B) = -A_s P(s,x,t,B), \quad \lim_{s\nearrow t} P(s,x,t,B) = \chi_B \tag{11}$$

peremértékfeladatot.

[9] A határérték értelmezéséhez szükséges topológiára később visszatérünk.

[10] A későbbiek szempontjából érdemes hangsúlyozni, hogy ez egy igen szigorú feltételezés.

0.11 Definíció.
Az egyenletben a peremérték a későbbi időponthoz tartozik, és ezért az egyenletet az idő változó szerint visszafelé haladva kell megoldani, ezért az egyenletet Kolmogorov-féle visszafelé, vagy hátrafelé haladó egyenletnek fogjuk nevezni.

A (10) definícióra visszatérve érdemes hangsúlyozni, hogy a (10) definícióhoz tartozó (11) egyenletben a megoldás az idő változásával ellentétesen halad. Ez indokolja a definíciót, amely szerint a deriváltat is visszafelé kell venni. Az f függvény s szerint parciális deriváltját természetesen az idő irányában vesszük, így a (11) sorban a két oldalon az s kezdőpont szerint a deriválás ellenkező irányban történik, és ebből ered az egyenletben levő mínusz jel. Homogén egyenletek esetén mind a két oldalon az eltelt idő szerepel és ezért a mínusz jel ilyenkor eltűnik.

0.12 Példa.
Vizsgáljuk meg a Wiener-folyamathoz tartozó hátrafelé haladó egyenletet.

Minden Kolmogorov-egyenlet esetén gondot jelent, hogy csak bizonyos f függvényekre tudjuk a deriválást elgégezni. Legyen most f olyan kétszer folytonosan deriválható függvény, amely első és második deriváltja is korlátos. A Wiener-folyamat homogén, így elegendő a $t = 0$ időpontot vizsgálni.

$$(P_h f)(x) = \mathbf{E}\left(f\left(x + w\left(h\right)\right)\right).$$

Az Itô-formula szerint

$$f\left(x + w\left(h\right)\right) - f\left(x\right) = \int_0^h f'\left(x + w\left(s\right)\right) dw + \frac{1}{2}\int_0^h f''\left(x + w\left(s\right)\right) ds.$$

Az első derivált feltételezett koprlátossága miatt a sztochasztikus integrál martingál, ezért várható értéke nulla. Így

$$\begin{aligned} Af &\mathrel{\hat{=}} \lim_{h \searrow 0} \frac{P_h f - f}{h} = \frac{1}{2} \lim_{h \searrow 0} \frac{\mathbf{E}\left(\int_0^h f''\left(x + w\left(s\right)\right) ds\right)}{h} = \\ &= \frac{1}{h}\int_0^h \mathbf{E}\left(f''\left(x + w\left(s\right)\right)\right) ds. \end{aligned}$$

A második derivált korlátossága miatt a monoton konvergencia tétel miatt az integrál alatti kifejezés folytonos, így

$$(Af)(x) = f''(x).$$

□

2. **Az előrehaladó egyenlet:** A P_{ts}^* operátor jelölésében az időkoordináták felcserélve szerepelnek. Ennek megfelelően ismét az első index szerint, de növekvő irányba deriválva a

$$A_t^* q \mathrel{\hat{=}} \lim_{h \searrow 0} \frac{P_{t+h,t}^* q - q}{h}$$

határértéket kell használni. Ha $q(t, B) \mathrel{\hat{=}} P_{ts}^* q(s, B)$, akkor

$$\begin{aligned} \frac{\partial q}{\partial t}(t, B) &= \lim_{h \searrow 0} \frac{q(t + h, B) - q(t, B)}{h} = \\ &= \lim_{h \searrow 0} \frac{P_{t+h,s}^* q_s(B) - P_{ts}^* q_s(B)}{h} = \\ &= \lim_{h \searrow 0} \frac{P_{t+h,t}^* - I}{h} P_{ts}^* q_s(B) = A_t^* q(t, B). \end{aligned}$$

Ha $q(s, B) = \chi_B$, akkor a $q(t, B) = P(s, x, t, B)$, és a

$$\frac{\partial P}{\partial t}(s, x, t, B) = A_t^* P(s, x, t, B), \quad \lim_{t \to s} P(s, x, t, B) = \chi_B$$

egyenlethez jutunk.

0.13 Definíció.
Az egyenletben a peremérték az előbb levő időponthoz tartozik, és ezért az egyenletet az idő változó szerint előre haladva kell megoldani, ezért az egyenletet Kolmogorov-féle előre haladó egyenletnek fogjuk nevezni.

Hangsúlyozni kell, hogy az elmondottak csak heurisztikus bevezetések, amelyeknek célja az elméleti keret felvázolása. Semmi nem garantálja például, hogy a χ_B függvényekhez tartozó f függvények, illetve q mértékek elemei lesznek a $\mathcal{D}(A_s)$, illetve $\mathcal{D}(A_t^*)$ értelmezési tartományoknak, és így a P átmenetvalószínűségekre egyáltalában fel lehet írni az egyenleteket. Általában csak azt lehet elvárni, hogy az értelmezési tartomány elég bő, így a χ_B, és ennek megfelelően a $P(s,x,t,B)$, jól közelíthető a Kolmogorov–egyenletek megoldásaival.

0.14 Példa.
Vizsgáljuk meg a véges állapotterű Markov-láncokat.

Tegyük fel, hogy a folyamat E állapottere véges diszkrét pontból áll. Ilyenkor az átmenetvalószínűségek egyértelműen megadhatók a $\mathrm{P} \doteq (p_{ij}(s,t))$ mátrix segítségével. Az állapottéren levő függvények közönséges vektorok.

1. A hátrafelé haladó egyenlet esetén a

$$\lim_{h\searrow 0}\sum_{j\in E}\frac{p_{ij}(s-h,s)-\delta_{ij}}{h}f_j \tag{12}$$

határértéket kell vizsgálni. Ha például minden (i,j) párra az

$$a_{ij}(s)\doteq\lim_{h\searrow 0}\frac{p_{ij}(s-h,s)-\delta_{ij}}{h}$$

határérték létezik és véges, akkor mivel a határérték és a véges összegzés felcserélhető

$$A_s f=\sum_{j\in E}a_{ij}(s)f_j.$$

A feltétel másképpen fogalmazva azt jelenti, hogy ha $i\neq j$, akkor

$$p_{ij}(s-h,s)=a_{ij}(s)h+o(h),$$

illetve

$$p_{ii}(s-h,s)=(1-a_{ii}(s))h+o(h).$$

Ha feltesszük, hogy a $p_{ij}(s-h,s)$ kifejezések összege egy, vagyis egyedek nem tünhetnek el, akkor

$$\sum_{j\in E}a_{ij}(s)=0$$

és ha $i\neq j$, akkor

$$a_{ij}(s)\geq 0.$$

ebből következően

$$a_{ii}(s)\leq 0.$$

Írjuk fel a differenciálegyenletet: A Chapman—Kolmogorov–azonosság szerint, ha $h>0$

$$p_{ij}(s-h,t)=\sum_k p_{ik}(s-h,s)p_{kj}(s,t),$$

így a derivált definíciója szerint

$$
\begin{aligned}
-\frac{\partial p_{ij}(s,t)}{\partial s} &\stackrel{\circ}{=} -\lim_{h\searrow 0}\frac{p_{ij}(s-h,t)-p_{ij}(s,t)}{-h} = \\
&= \lim_{h\searrow 0}\sum_k \frac{p_{ik}(s-h,s)-p_{ik}(s,s)}{h} p_{kj}(s,t) \\
&= \lim_{h\searrow 0}\sum_k \frac{p_{ik}(s-h,s)-\delta_{ik}}{h} p_{kj}(s,t)\,.
\end{aligned}
$$

Tehát a hátrahaladó egyenlet

$$
-\frac{\partial p_{ij}(s,t)}{\partial s} = \sum_k a_{ik}(s)\, p_{kj}(s,t)\,, \quad s<t, \tag{13}
$$

amelyet a

$$
\lim_{s\nearrow t} p_{ij}(s,t) = \delta_{ij}
$$

feltétellel kell megoldani, amely az $a_{ij}(s)$ kifejezések létezésére tett feltétel miatt mindig teljesül.

2. A gondolatmenetet megismételve az előrehaladó egyenlet esetén az

$$
\frac{\partial p_{ij}(s,t)}{\partial t} = \sum_k p_{ik}(s,t)\, a_{kj}(t)\,, \quad s<t
$$

típusú egyenletet kapjuk, ahol

$$
a_{ij}(t) \stackrel{\circ}{=} \lim_{h\searrow 0}\frac{p_{ij}(t,t+h)-\delta_{ij}}{h}.
$$

□

0.15 Példa.
Homogén, véges állapotterű Markov-láncok infinitezimális generátora.

Ha a Markov-lánc homogén, akkor a két a_{ij} azonos és konstans.

$$
-\frac{\partial p_{ij}(s,t)}{\partial s} = -\frac{\partial p_{ij}(t-s)}{\partial s} = -\frac{\partial p_{ij}(-s)}{\partial s} = \frac{\partial p_{ij}(s)}{\partial s} = \frac{\partial p_{ij}(s,t)}{\partial t}
$$

Ha az (a_{ij}) elemeket egy Λ mátrixba rakjuk és $P(s)$ jelöli az átmenetvalószínűslgeket, akkor a hátra haladó egyenlet

$$
\frac{d}{ds}P(s) = \Lambda P(s)\,,
$$

ahol az egyenletet a $P(0)=I$ kezdeti feltétellel kell megoldani. A differnciálegyenletek elméletéből ismert, hogy az egyenlet megoldása

$$
P(s) = \exp(s\Lambda)\,,
$$

ahol

$$
\exp(s\Lambda) = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{(s\Lambda)^k}{k!}.
$$

Az előre haladó egyenlet szerint

$$
\frac{d}{ds}P(s)^T = (P(s)\Lambda)^T = \Lambda^T P(s)^T\,.
$$

Ennek megoldása

$$P(s)^T = \exp\left(s\Lambda^T\right) = \left(\exp(s\Lambda)\right)^T,$$

így a két egyenlet megoldása értelemszerűen azonos.

□

A példák kapcsán érdemes hangsúlyozni, hogy nem minden homogén, véges állapotterű Markov-folyamat esetén létezik a Λ. Ha a folyamat két állapottal rendelkezik és a trajektóriája

$$X(t) \stackrel{\circ}{=} \begin{cases} 1 & \text{ha} \quad t > 0 \\ 0 & \text{ha} \quad t = 0 \end{cases},$$

akkor ha $t > 0$

$$P(t) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

az a_{ij} kifejezések nem lesznek mind végesek.

Operátor félcsoportok és énfinitezimális operátorok

Miként jeleztük, a Markov–folyamatok szoros kapcsolatban állnak a lineáris operátorok elméletével. Az elmélet részletes bemutatását megközelítőleg sem tekintjük feladatunknak, és csak egy közelítő képet fogunk adni, amely célja inkább az elnevezések indoklása mint a pontos elmélet bemutatása. Ha figyelmesen átgondoljuk a véges állapotterű Markov-folyamatokra vonatkozó Kolmogorov-egyenletek levezetését észrevehetjük, hogy a gondolatmenet nagyrészt azért volt egyszerű, mivel a határérték és az összegzés az állapottér végessége miatt felcserélhető volt. A bonyolultabb esetekben, például ha az állapottér diszkrét, de nem véges, semmi sem garantálja, hogy a deriválás „bevihető" a Chapman–Kolmogorov-azonosságban szereplő integrál mögé. Ehhez általában vagy a derivált valami fajta egyenletes korlátossága, vagy a különbségi hányadosok egyenletes konvergenciája szükséges. Nem beszélve arról, hogy az sem világos, hogy mikor lehet az integrál mögött deriválni, vagyis mikor léteznek az átmenetvalószínűségeket leíró „lokális" információk. Ahhoz, hogy ezt meg tudjuk tenni, vagyis ahhoz, hogy az analízis különböző tételeit használni tudjuk, egyrészt szűkíteni kell az operátorok értelmezési tartományát, másrészt a konvergencia módjára erős megkötéseket kell tenni. Egyenletes konvergencia, korlátosság stb. Ilyenkor persze az átmenetvalószínűségekre közvetlenül nem tudjuk esetlegesen az egyenleteket közvetlenül felírni, de tetszőleges pontosságú közelítő képletekhez juthatunk.

A továbbiakban tegyük fel, hogy az X folyamat homogén. Definíció szerint ilyenkor a $P(s, x, t, B)$ átmenetvalószínűség csak az s és a t között eltelt időszak $u \stackrel{\circ}{=} t - s$ hosszától függ. Ez a tulajdonság lehetővé teszi, hogy a folyamatokhoz rendelt operátoregyenleteket

$$P_{u+v} = P_u P_v, \quad P_0 = I,$$

illetve

$$P^*_{u+v} = P^*_u P^*_v, \quad P^*_0 = I$$

módon írjuk. Megjegyezzük, hogy ez természetesen nem befolyásolja az operátorokhoz tartozó időtartományok viszonyát, vagyis az első egyenlet továbbra is időben hátrafelé, a második pedig előrefelé halad.

0.16 Definíció.
Ha $t \mapsto T(t) \stackrel{\circ}{=} T_t$ olyan lineáris operátor értékű függvény, amelyre

$$T(u+v) = T(u)\, T(v), \quad T(0) = I,$$

akkor a $(T(t))$ családot operátor-félcsoportnak mondjuk.

Kézenfekvő módon az operátor-félcsoportok az exponenciális függvény általánosításai. Az exponenciális függvény alapvető tulajdonsága, hogy kielégíti a

$$\frac{d}{dx}f = \alpha f$$

egyenletet, ahol

$$\alpha = \frac{d}{dx}f(0) = \lim_{h\to 0}\frac{f(h)-f(0)}{h}.$$

Ha megadjuk a kezdeti értéket, akkor az α ismeretében az egyenlet egyértelműen megoldható, és az exponenciális függvény egyértelműen meghatározott. Jelölje I az identitás operátort. Ennek megfelelően vezessük be az

$$A \mathrel{\mathring{=}} \lim_{h\searrow 0}\frac{T(h)-I}{h}$$

operátort, amelyet a T infinitezimális operátorának vagy infinitezimális generátorának mondunk. Az infinitezimális operátor az alkalmazások szempontjából szemléletes tartalommal rendelkezik, ugyanis a folyamat „sebességét” adja meg. Természetesen meg kellene adni, hogy milyen topológiában értjük a konvergenciát, és mit értünk az A operátor $\mathcal{D}(A)$ értelmezési tartományán. Érdemes hangsúlyozni, hogy távolról sem magától érthetődő, hogy az A infinitezimális generátor egyértelműen reprezentálja a T félcsoportot. Az alkalmazások szempontjából elsősorban az olyan T félcsoportok érdekesek, amelyeket az A egyértelműen jellemez, ugyanis csak ilyenkor tudjuk az A „sebességoperátorból” a T félcsoportot „visszaintegrálni”. Azokra a feltételekre, amelyek ezt biztosítják regularitási feltételként szokás hivatkozni. Hangsúlyozni kell, hogy az infinitezimális operátor és a Kolmogorov-egyenletek azonos gondolatra épülnek. Az operátor csoportok esetén azonban rögzíteni kell a függvényteret és a függvénytéren a topológiát amely keretében a konvergenciát vizsgáljuk. A Kolmogorov egyenletek esetében pedig csak „pontonként" vizsgáljuk a deriválhatóságot de, a függvények konvergenciájának módját nem rögzítjük előre. Másképpen fogalmazva a Kolmogorov-egyenletekben pontonként deriválunk, az infinitezimális generátor, pedig általában Banach-tér értékű derivált. Vegyük észre, hogy operátorról csak akkor beszélhetünk, ha megmondjuk, hogy az operátor milyen terek között hat. Ez egyrészt az értelmezési tartományként szolgáló függvényosztály kijelölését, másrészt a konvergencia fogalmának előre való megadását jelenti.

0.17 Példa.
A λ paraméterű Poisson–folyamat infinitezimális generátora

$$(Af)(x) = \lambda\left(f(x+1)-f(x)\right), \quad f \in \mathcal{D}(A) = \mathcal{B}_b(\mathbb{R}).$$

Legyen f korlátos mérhető függvény. A Poisson–folyamat definíciója szerint

$$(P_h f)(x) = \mathbf{E}\left(f(x+X(h))\right) = \exp(-\lambda h)\sum_{k=0}^{\infty} f(x+k)\frac{(\lambda h)^k}{k!},$$

amiből

$$\begin{aligned}\frac{(P_h f)(x)-f(x)}{h} &= \frac{\exp(-\lambda h)-1}{h}f(x) + \lambda f(x+1)\exp(-\lambda h) + \\ &\quad + \exp(-\lambda h)\sum_{k=2}^{\infty} f(x+k)\frac{(\lambda h)^k}{hk!}.\end{aligned}$$

Ha $h \to 0$, akkor az első tag a $-\lambda f(x)$, a második tag a $\lambda f(x+1)$, a harmadik tag pedig a 0 kifejezéshez tart. Könnyen látható, hogy a konvergencia a korlátos f függvények körében az x szerint egyenletesen. Ennek megfelelően $\mathcal{D}(A)$ a korlátos mérhető függvények halmaza az egyenletes konvergenciával.

□

0.18 Példa.
Az n-dimenziós Wiener–folyamat infinitezimális operátora

$$Af = \frac{1}{2}\Delta f \mathrel{\mathring{=}} \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2}, \quad f \in C_0^2(\mathbb{R}^n) \subseteq \mathcal{D}(A) \subseteq C_0(\mathbb{R}^n).$$

Megjegyezzük, hogy a $C_0^2(\mathbb{R}^n)$ tér azokat a függvények jelöli, amelyek második deriváltja a $C_0(\mathbb{R}^n)$ térbe esik. A $C_0(\mathbb{R}^n)$ viszont azon folytonos függvények halmaza, amelyek a végtelenben nullához tartanak. A $C_0(\mathbb{R}^n)$ teret szokás a „lecsengő" függvények terének mondani. Emlékeztetünk, hogy a lecsengő folytonos függvények halmaza Banach-tér, ha a normát a szuprémummal definiáljuk.

1. Legyen w egy a nulla pontból elindított n-dimenziós Wiener–folyamat. Ha $f \in C^2(\mathbb{R}^n)$, akkor az Itô-formula alapján

$$f(w(t)+x) - f(x) = \int_0^t \sum_{k=1}^{n}\frac{\partial f}{\partial x_k}(w+x)\,dw_k + \int_0^t A(f)(w(s)+x)\,ds.$$

Ha a $\frac{\partial f}{\partial x_k}$ első deriváltak korlátosak, akkor a sztochasztikus integrál rész martingál. A nulla időpontból elindított Wiener-folyamathoz tartozó P_h esetén a $(P_h f)(x)$ definíció szerint az x pontból elindított Wiener-folyamat várható hasznossága, feltéve, hogy a hasznossági függvény f. A sztochasztikus integrál martingál tulajdonsága miatt, a két oldalon várható értéket véve

$$\begin{aligned}(P_h f)(x) - f(x) &= \mathbf{E}\left(\int_0^h A(f)(w(s)+x)\,ds\right) = \\ &= \int_0^h \mathbf{E}(A(f)(w(s)+x))\,ds\end{aligned}$$

A két oldalt h-val végigosztva

$$\frac{(P_h f)(x) - f(x)}{h} = \frac{1}{h}\int_0^h \mathbf{E}(A(f)(w(s)+x))\,ds.$$

Ha $h \to 0$, akkor az integrál felső határa szerinti derválási szabály szerint

$$\lim_{h\to 0}\frac{(P_h f)(x) - f(x)}{h} = \mathbf{E}(A(f)(w(0)+x)) = A(f)(x).$$

Vegyük észre, hogy a gondolatmenet teljesüléséhez szükséges, hogy az integrál alatti kifejezés az s szerint folytonos legyen, amihez például a majorált konvergencia tétel miatt elegendő, ha az f összes másodrendű parciális deriváltja korlátos.

2. Vizsgáljuk meg, hogy a konvergencia teljesül-e a $C_0(\mathbb{R}^n)$ térben az egyenletes konvergencia szerint vagy sem.

$$\begin{aligned}&\left|\frac{(P_h f)(x) - f(x)}{h} - A(f)(x)\right| \le \\ \le\ &\frac{1}{h}\int_0^h |\mathbf{E}(A(f)(w(s)+x) - A(f)(x))|\,ds = \\ =\ &\frac{1}{h}\int_0^h |P_s(A(f)(x) - A(f)(x))|\,ds.\end{aligned}$$

Megmutatjuk, hogy Wiener-folyamat esetén a

$$\lim_{h\searrow 0} P_h(f) = f, \quad f \in C_0$$

konvergencia az egyenletes konvergencia topológiában teljesül, amiből az infinitezimális operátort definiáló határérték is konvergens az egyenletes konvergencia topológiában, ugyanis az előző becslésben az integrál alatti kifejezés egyenletesen kicsivé tehető. Ha az f második parciális deriváltjai korlátosak és folytonosak, akkor a $g \stackrel{\circ}{=} A(f)$ függvény folytonos és korlátos. Tegyük fel továbbá, hogy $g \in C_0$, vagyis a g a végtelenben még nullához is tart. Ilyenkor a g egyenletesen folytonos és korlátos. Legyen k a g egy felső korlátja. Meg kell mutatni, hogy a

$$|(P_h g)(x) - g(x)| =$$
$$= \frac{1}{\left(\sqrt{h2\pi}\right)^n} \left| \int_{\mathbb{R}^n} g(u+x) - g(x) \exp\left(-\frac{\|u\|^2}{2h}\right) du \right|$$

tetszőlegesen kicsivé tehető. Ha a h elég kicsi, akkor $1-\varepsilon$ valószínűséggel a $w(h)$ változó eloszlása az origó egy δ sugarú környezetébe koncentrálódik. Ezért

$$|(P_h g)(x) - g(x)| \leq$$
$$\leq 2k\varepsilon + \int_{\|u\|\leq\delta} \frac{1}{\left(\sqrt{h2\pi}\right)^n} |g(u+x) - g(x)| \exp\left(-\frac{\|u\|^2}{2h}\right) du \leq$$
$$\leq 2k\varepsilon + \max_{\|u\|\leq\delta} |g(u+x) - g(x)|.$$

Mivel a g egyenletesen folytonos, ezért a kifejezés az x-től függetlenül tetszőlegesen kicsi lehet.

3. Összefoglalva: Beláttuk, hogy ha a Wiener-folyamathoz tartozó P_t átmenetvalószínűség operátorokat a $C_0(\mathbb{R}^n)$ térben tekintjük[11], akkor a P_t operátorok a $t=0$ pontban jobbról folytonos operátor fél-csoportot definiálnak, ahol a folytonosságot az operátorok körében a pontonkénti folytonossággal értelmezzük[12]. Ha az $f \in C_0(\mathbb{R}^n)$ kétszer deriválható és a derivált szintén eleme a $C_0(\mathbb{R}^n)$ térnek, akkor az f eleme az A infinitezimális operátor értelmezési tartományának és

$$Af = \frac{1}{2}\Delta f \stackrel{\circ}{=} \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2}.$$

Vegyük észre, hogy a $\mathcal{D}(A)$ sűrű a $C_0(\mathbb{R}^n)$ térben.

□

Markov–család és az exponenciális eloszlás

Ezidáig csak a $P_t(x,B)$ átmenetvalószínűségekre koncentráltunk. Az idáig ismertetett elméletének hátránya, hogy a trajektóriák tulajdonságai nem ismertek, így a sztochasztikus analízis szokásos eszközei nem alkalmazhatóak. Ezt orvosolja a Markov-család fogalmának bevezetése. A Markov–család definíciójakor a kanonikus reprezentációból indulunk ki. Ez a következőt jelenti: Rögzítsük a vizsgálandó folyamathoz tartozó trajektóriák tulajdonságait, vagyis hogy a trajektóriák folytonosak, vagy jobbról regulárisak[13], szakaszonként konstansok, stb. Jelölje a megfelelő függvényosztályt Ω, amelyet azonosítunk a kimenetelek terével. A pontos megértés szempontjából érdemes hangsúlyozni, hogy az Ω tartalmazza az összes lehetséges függvényt függetlenül attól, hogy az realizálódhat vagy sem. Például Wiener-folyamat esetén a trajektóriák folytonosak, de a folyamatot beágyazhatjuk a jobbról reguláris függvények osztályába is. Ilyenkor persze a folytonos függvények mértéke egy és a nem folytonos függvények halmaza nulla valószínűségű. Hasonlóan a Poisson-folyamatot, úgy is elképzelhetjük, mint a jobbról reguláris függvények egy részhalmaza. Ilyenkor a szakaszonként konstans függvények osztálya egy teljes valószínűségű részhalmaza egy

[11] A monoton konvergencia tétel miatt a P_h operátorok a $C_0(\mathbb{R}^n)$ Banach-teret önmagára képezi.

[12] Ez a Banach-tér értékű operátor fél-csoportok topológiájának terminológiája szerint erős topológiában való folytonosságot jelent.

[13] Leginkább erre érdemes gondolni.

jóval bővebb osztálynak. A helyzet teljesen analóg ahhoz, ahogyan a Poisson-eloszlást tekintjük a valós számok felett. Elvileg az összes kimenetelek halmaza a valós számok halmaza, de az eloszlás egy valószínűséggel a $\{0, 1, 2, \ldots\}$ halmazra koncentrálódik. Másképpen, minden kimenetel egy függvény kiválasztását jelenti. Vezessük be az $X(\omega, t) \doteq \omega(t)$ koordinátafüggvényt. A t időpontban a már kiválasztott ω függvény t időpontban felvett értékét tekintjük az X folyamat értékének. Másképpen

$$(t, \omega) \mapsto \omega(t) \doteq X(\omega, t).$$

Vegyük észre, hogy most is az elvileg megfigyelhető objektumok vizsgálatára koncentrálunk és a helyzet teljesen analóg a valószínűségszámításban megismert helyzettel. Valószínűségi változók között nem teszünk különbséget ha az eloszlásuk azonos. Az egyetlen lényeges eltérés, hogy a valószínűségszámításban a kimenetelek tere elég kézenfekvően rögzíthető, sztochasztikus folyamatok esetén a trajektória típusa nem mindig teljességgel kézenfekvő. Az $(\Omega, \mathcal{A})$ függvénytérként való megválasztása számos előnnyel bír. A legfontosabb, hogy akár a folytonos függvények $C[0, \infty)$, akár a jobbról reguláris függvények $D[0, \infty)$ halmazán, vagy a szakaszonként konstans függvényeken definiálható a

$$(\theta_t(\omega))(s) \doteq \omega(s + t) \tag{14}$$

eltolásoperátor. Megmutatjuk, hogy ha az $\mathcal{A}$ mérhetőségi struktúrát az $\mathcal{S}$ szorzatmérhetőség definiálja, és $A \in \mathcal{A}$, akkor

$$\theta_t^{-1}(\mathcal{A}) \subseteq \mathcal{A}$$

vagyis a $\theta_t : \Omega \to \Omega$ leképezés mérhető. Emlékeztetünk, hogy szorzatmérhetőségen azt értjük, hogy a mérhető halmazokat az

$$\{\omega(s) \in B\}$$

típusú halmazok generálják. Az ilyen típusú halmazok véges számú metszete

$$\{\omega(s_1) \in B_1, \ldots, \omega(s_n) \in B_n\}$$

amely éppen a trajektóriák véges számú időpontban való megfigyeléséből álló σ-algebrát generálja. Ha $B \in \mathbb{R}^n$, akkor a

$$\{(\omega(s_1), \ldots, \omega(s_n)) \in B\}$$

alakú halmazokat szokás cilinder-halmazoknak is mondani. θ_t említett mérhetőségének indoklása a következő: A mértékelméletből ismert

$$\sigma\left(f^{-1}(\mathcal{C})\right) = f^{-1}(\sigma(\mathcal{C}))$$

azonosság miatt az inverzkép mérhetőségét elegendő valamilyen az $\mathcal{A}$ σ–algebrát generáló $\mathcal{C}$ halmazosztályra ellenőrizni. A szorzatmérhető struktúrát a

$$\{\omega(s) \in B\}$$

alakú halmazok generálják.

$$\theta_t^{-1}\{\omega(s) \in B\} = \{\omega(s + t) \in B\}$$

és természetesen

$$\{\omega(s + t) \in B\} \in \mathcal{S} = \mathcal{A}.$$

Érdemes megjegyezni, hogy az Ω függvénytér minden esetben rendelkezik valamilyen természetes[14] topológiával, és kézenfekvő a teret az Ω Borel–halmazaival topologizálni. Mivel elvileg semmi sem

[14] A természetes szó sajnos nem mindig azonos a kézenfekvő, vagy egyszerű szavakkal. A $D[0, \infty)$ osztályon használt Szkorohod-topológia a tér természetes topologizálása, de a topológia definíciója és tulajdonságainak tisztázása igen komoly matematikai leleményességre utal.

garantálja, hogy ez a mérhetőségi struktúra megegyezzen a szorzatmérhetőséggel, ez potenciálisan mérhetőségi problémákat eredményezhet. Triviális módon igazolható, hogy a kiemelkedően fontos $C[0,\infty)$ esetén ebből semmi probléma nem származik ugyanis a tér természetes topologizálása, vagyis a kompakt halmazokon való egyenletes konvergencia éppen a szorzatmérhetőség által indukált mérhetőséget generálja. Hasonló a helyzett a $D[0,\infty)$ térben, ha a topologizálás az úgynevezett Szkorohod–topológiával történik[15].

A Markov-modellek esetén az átmenetvalószínűségeket ismerjük. Minket azonban a tényleges eloszlások érdekelnek. Ehhez azonban meg kell adni az induló eloszlásokat. P átmenetvalószínűség csak az x kezdőpont ismeretében adja meg az eloszlást. Ahelyett, hogy az x kezdőpontot „tologatnánk” $(\Omega,\mathcal{A})$-n megadunk egy $(P^x)_{x\in E}$ valószínűségi mértékekből álló családot. A P^x mértéket az $x\in E$ pontból kiinduló folyamathoz tartozó „eloszlásként” interpretáljuk.

0.19 Definíció.
Az $(\Omega,\mathcal{A})$ mérhető téren értelmezett (P^x) családról feltesszük, hogy

1. *minden $x\in E$-re $P^x(X(0)=x)=1$,*
2. *minden $B\in\mathcal{A}$ eseményre az $x\mapsto P^x(B)$ függvény $(E,\mathcal{B})$-mérhető.*

A P^x mértékekhez hozzárendelhetjük az M^x várható érték operátort, beszélhetünk az $M^x(\eta\mid\mathcal{G})$ feltételes várható értékekről, definiálhatjuk a

$$(P_t f)(x) \mathrel{\hat{=}} M^x(f(X(t)))$$

operátorokat, stb. Mivel a mérhetőségi struktúra a szorzatmérhetőség, ezért $\{\omega(t)\in B\}\in\mathcal{S}=\mathcal{A}$, így a

$$P(x,t,B) \mathrel{\hat{=}} P^x(\{\omega(t)\in B\})$$

kifejezés minden t és x esetén értelmes. A $P(x,t,B)$ interpretációja természetszerüleg egybeesik az átmenetvalószínűség interpretációjával és annak a valószínűségét adja, hogy az x-ből a B-be jutunk t idő alatt. Másképpen, ha adott a (P^x) család, akkor elkészíthetjük az átmenetvalószínűségeket. A fordított irány igazolása azonban nem mindig végezhető el. Abból, hogy ismerjük a $P(x,t,B)$ átmenetvalószínűségeket még nem biztos, hogy a mértéket ki tudjuk terjeszteni az Ω-ra, ugyanis általában nem világos, hogy a kiterjesztéshez szükséges topológiai, regularitási típusú feltételek teljesülnek vagy sem. A Markov-család definíciójának éppen az a célja, hogy ezeket a „technikai" problémákat a definíció mögé elrejtsük és az absztrakció segítségével eltüntessük. Ennek megfelelően a Markov-családokra érdemes úgy gondolni, hogy mint olyan trajektóriákkal rendelkező Markov-folyamatok, ahol az átmenetvalószínűségek által generált mértékek az egész $(\Omega,\mathcal{A})$ mérhető struktúrára kiterjeszthetőek.

Kézenfekvő módon a filtrációt a

$$\mathcal{F}_s^0 \mathrel{\hat{=}} \sigma(\omega(t): t\leq s)$$

képlettel érdemes definiálni. Az $\mathcal{F}^0$ filtráció azonban általában nem teljesíti a szokásos feltételeket. Természetesen a legnagyobb gondot az jelentheti, hogy az $\mathcal{F}$ nem lesz feltétlenül jobbról folytonos. Ha a filtráció nem jobbról folytonos, akkor a megállási idő konstrukciója távolról sem triviális. Emlékeztetünk például a következő tételre:

0.20 Állítás.
Ha a trajektóriák jobbról folytonosak és a filtráció szintén jobbról folytonos, akkor minden nyílt halmaz találati ideje megállási idő.

Például a Poisson-folyamathoz, vagy a Markov-láncokhoz tartozó szakaszonként konstans trajektóriák által generált filtráció jobbról folytonos, de már a Wiener-folyamathoz tartozó folytonos

[15]Ennek igazolása azonban igen nehéz.

függvények által generált filtráció nem lesz jobbról folytonos. Időnként a filtráció jobbról folytonossága elérhető, ha a filtrációt kiegészítjük a nullmértékű halmazokkal[16]. Az így kapott filtrációt szokás kibővített filtrációnak mondani. Felmerül azonban a kérdés: milyen mérték szerinti nullmértékű halmazokkal kell a filtrációt kibővíteni. Ha $\mathcal{F}_s^{(x)}$ jelöli a P^x szerinti nulla halmazokkal kiegészített filtrációt, akkor $\mathcal{F}_s$ alatt általában az $\mathcal{F}_s \mathrel{\circeq} \cap_{x\in E}\mathcal{F}_s^{(x)}$ metszetet fogjuk érteni. Ha az összes $\mathcal{F}_s^{(x)}$ jobbról folytonos, akkor az $\mathcal{F}_s$ is jobbról folytonos. A sztochasztikus analízisben megszokott definíciótól némiképpen eltérve Markov–családok esetén szokásos feltétel alatt azt értjük, hogy a filtráció jobbról folytonos, és tartalmaz minden olyan halmazt, amely az összes P^x mérték szerint nullmértékű. Esetlegesen biztosítani akarjuk, hogy minden találati idő megállási idők legyen, amihez a Dellecherie-tétel miatt szükségünk van a projekciós tételre, ezért az $\mathcal{A} \mathrel{\circeq} \mathcal{F}_\infty$ σ-algebrát teljessé kell tenni. Természetesen semmi garancia nincsen arra, hogy a P^x mértékek ugyanazokkal az elhanyagolható halmazokkal bővítik az $\mathcal{A}$ eseményteret. A kibővített σ-algebra alatt az egyes P^x mértékek szerint teljessé tett σ-algebrák metszetét értjük[17]. A projekciós tételből evidens, hogy a vetület halmazok tetszőleges P^x esetén a teljessé tett σ-algebrában lesznek, így benne lesznek a σ-algebrák x szerinti metszetében is. Ennek megfelelően amikor Markov-családok esetén a σ-algebrák teljességére szokás hivatkozni, akkor ezt úgy szokás gondolni, hogy az összes P^x mérték szerint egyszerre elhanyagolható halmazok mindegyike része a kibővített σ-algebrának

Az eltolásoperátorok segítségével definiálhatjuk a Markov–család fogalmát:

0.21 Definíció.
Az $(\Omega,\mathcal{A})$ mérhető téren értelmezett (P^x) családot homogén Markov–családnak[18], vagy egyszerűen Markov–családnak mondjuk, ha

1. *Ω függvénytér, és minden $t>0$-ra az Ω-án értelmezve van a (14) módon definiált eltolásoperátor,*
2. *a $\theta_s:(\Omega,\mathcal{A})\to(\Omega,\mathcal{A})$ eltolásoperátor minden s-re mérhető,*
3. *minden $x\in E$, $s>0$, $A\in\mathcal{A}$ esetén*

$$P^x\left(\theta_s^{-1}(A)\mid\mathcal{F}_t\right)\overset{m.m.}{=}P^{X(s)}(A), \tag{15}$$

ahol a feltételes valószínűség, és a majdnem mindenhol reláció a P^x mérték szerint értendő.

A (15) egyenlőség jobb megértése céljából tekintsük a

$$\begin{aligned} P^x\left(\theta_s^{-1}(A)\mid X(s)\right) &= M^x\left(M^x\left(\chi\left(\theta_s^{-1}(A)\right)\mid\mathcal{F}_s\right)\mid X(s)\right)= \\ &= M^x\left(P^x\left(\theta_s^{-1}(A)\mid\mathcal{F}_s\right)\mid X(s)\right) \\ &= M^x\left(P^{X(s)}(A)\mid X(s)\right)=P^{X(s)}(A) \end{aligned}$$

azonosságot. Vagyis az egyenlőség az ismertebb

$$P^x\left(\theta_s^{-1}(A)\mid\mathcal{F}_t\right)\overset{m.m.}{=}P^x\left(\theta_s^{-1}(A)\mid X(s)\right)$$

módon is írható. A $\theta_s^{-1}(A)\in\mathcal{A}$ esemény az olyan kimenetelek halmaza, amelyekre az s időpont után teljesülni fog az A tulajdonság. A θ_s eltolás az ω függvények grafikonját s-sel balra tolja.

[16] Vegyük észre, hogy a nullmértékű halmazok hozzávétele után a θ_t esetleg nem lesz mérhető, ugyanis mind az értelmezési tartományán, mind az értékkészletén a σ-algebra megváltozott, és általános körülmények között elvileg semmi sem garantálja, hogy nullmértékű halmaz eltoltja is nullmértékű.

[17] Adott σ-algebra esetén az összes véges mérték szerint teljessé tett σ-algebrák metszetét univerzálisan mérhetőnek szokás mondani. A projekciós tétel szerint a vetület univerzálisan mérhető.

[18] Amennyiben nem értelemzavaró, esetleg használjuk a Markov–folyamat elnevezést is, bár két különböző, bár szoros kapcsolatban álló matematikai fogalomról van szó. Minden ν kezdeti eloszlás specifikálása esetén a koordinátafolyamat Markov–folyamat. Különböző ν esetén különböző eloszlású, de megegyező Markov–folyamatot kapunk.

A $\theta_s^{-1}(A)$ az olyan függvények, amelyeket s-sel balra tolva A halmazba eső függvényeket kapunk. Például ha A a nem negatív függvények halmaza, akkor a $\theta_s^{-1}(A)$ az olyan trajektóriák halmaza, amelyek s idő elteltével nem negatívak lesznek. Legyen $A = \{\omega(t) \in B\}$. Ilyenkor a

$$P(x,t,B) \stackrel{\circ}{=} P^x(A)$$

jelölést használva

$$P^{X(s)}(A) = P(X(s), t, B)$$

A másik oldalon a

$$\begin{aligned} P^x\left(\theta_s^{-1}(A) \mid \mathcal{F}_t\right) &= P^x(\theta_s \in A \mid \mathcal{F}_t) = \\ &= P^x(\theta_s \in \{\omega(t) \in B\} \mid \mathcal{F}_s) = \\ &= P^x(\omega(s+.) \in \{\omega(t) \in B\} \mid \mathcal{F}_s) = \\ &= P^x(\{\omega : \omega(s+(t-s)) \in B\} \mid \mathcal{F}_s) \stackrel{\circ}{=} \\ &\stackrel{\circ}{=} P^x(\{\omega : \omega(s+h) \in B\} \mid \mathcal{F}_s). \end{aligned}$$

A Markov-családot definiálló tulajdonság a következő: Tetszőleges induló eloszlás esetén számoljuk ki annak a valószínűségét, hogy $h \stackrel{\circ}{=} t-s$ idő múlva valamely B halmazban leszünk. A feltétel alatt a trajektóriák s időpontig való megfigyelését értjük. Ez a feltételes valószínűség minden x-re úgy számolható, hogy a $P(x,t,B)$ függvénybe beírjuk az $X(s)$ állapotot. Mivel a $P(x,t,B)$ az x-ben Borel-mérhető, ezért ez azt jelenti, hogy a feltételes valószínűség megadható az $X(s)$ állapot regressziós függvényével. Másképpen az x induló állapot és az $\mathcal{F}_s$ megfigyelésektől függetlenül az h időszak múlva való feltételes eloszlás csak a jelenlegi $X(s)$ állapottól függ. A Markov-család definíciója összesen annyit jelent, hogy egyrészt az X kanonikus folyamat Markov-folyamat, másrészt a regresszív az átmenetvalószínűségekhez által generált mértékek minden x indoló állapot esetén kiterjeszthetőek az $(\Omega, \mathcal{S})$ mérhető térre.

0.22 Példa.
Az exponenciális eloszlás mint várakozási idő.

Legyen (P^x) Markov–család. Tetszőleges x esetén definiáljuk a

$$\sigma_x(\omega) \stackrel{\circ}{=} \inf\{t > 0 : X(t) = \omega(t) \neq x\}$$

kilépési időt. A σ_x az $\{x\}^c$ nyílt halmazba való belépési idő, vagyis az x kezdőpontban való várakozás időtartama. Tegyük fel, hogy az $\mathcal{F}$ filtráció olyan, hogy a σ_x megállási idő. Miként megjegyeztük, ehhez elegendő, ha a filtráció jobbról folytonos legyen[19]. Ekkor a

$$\chi(t < \sigma_x) = \chi(\{\sigma_x \leq t\}^c)$$

$\mathcal{F}_t$-mérhető, tehát a feltételes várható érték elemi tulajdonságai alapján

$$\begin{aligned} P^x(s+t < \sigma_x) &= P^x((t < \sigma_x) \cap (s+t < \sigma_x)) = \\ &= M^x(\chi(t < \sigma_x)\chi(s+t < \sigma_x)) = \\ &= M^x(M^x(\chi(t < \sigma_x)\chi(s+t < \sigma_x) \mid \mathcal{F}_t)) = \\ &= M^x(\chi(t < \sigma_x) M^x(\chi(s+t < \sigma_x) \mid \mathcal{F}_t)). \end{aligned}$$

A $\{t < \sigma_x\}$ halmazon $\sigma_x = t + \sigma_x(\theta_t)$, ugyanis ha tudjuk, hogy valamely trajektória az x pontot a t időpont után hagyja el, akkor a kilépés időpontja a t időpont plusz az az idő, hogy a t időpontba eltolt trajektória kilép az x-ből. Ezt behelyettesítve elemi számolással

$$\begin{aligned} M^x(\chi(s+t < \sigma_x) \mid \mathcal{F}_t) &= M^x(\chi(s+t < t + \sigma_x(\theta_t)) \mid \mathcal{F}_t) = \\ &= M^x(\chi(s < \sigma_x(\theta_t)) \mid \mathcal{F}_t) = \\ &= P^x(s < \sigma_x(\theta_t) \mid \mathcal{F}_t). \end{aligned}$$

[19]Például teljesül Markov-láncok esetén.

Vegyük észre, hogy

$$\begin{aligned}\{s<\sigma_x(\theta_t)\} &= \{\omega : \omega(t+s)=x\} = \{\omega : (\theta_t(\omega))(s)=x\} = \\ &= \{\omega : \theta_t(\omega) \in \{\omega(s)=x\}\} = \\ &= \theta_t^{-1}(\omega(s)=x) = \theta_t^{-1}(s<\sigma_x).\end{aligned}$$

Így a Markov-tulajdonság miatt

$$M^x(\chi(s+t<\sigma_x) \mid \mathcal{F}_t) = P^x\left(\theta_t^{-1}(s<\sigma_x)\right) = P^{X(t)}(s<\sigma_x)$$

A $\{t<\sigma_x\}$ halmazon $X(t)=x$ amiből

$$\begin{aligned}P^x(s+t<\sigma_x) &= M^x\left(\chi(t<\sigma_x)P^{X(t)}(s<\sigma_x)\right) = \\ &= M^x(\chi(t<\sigma_x)P^x(s<\sigma_x)) = \\ &= P^x(t<\sigma_x)P^x(s<\sigma_x).\end{aligned}$$

A Cauchy–egyenletből

$$P^x(\sigma_x>t) = \exp(-\lambda t),$$

vagyis a σ_x a P^x alatt exponenciális eloszlású. Természetesen a Cauchy–egyenlet megoldásaként előfordulhat, hogy $\lambda=0$, vagy $\lambda=\infty$. Ha $\lambda=\infty$, akkor a folyamat az x pontból azonnal kilép, ha $\lambda=0$, akkor a folyamat végtelen sokáig az x pontban marad.

□

Az eltolás fogalma kiterjeszthető τ megállási időkre.

$$(\theta_\tau(\omega))(t) \stackrel{\circ}{=} \omega(\tau(\omega)+t), \quad \text{ha} \quad \tau(\omega)<\infty.$$

Felvethető, hogy miként a megállási opciókról szóló tételben a martingáltulajdonságot kiterjesztettük megállási időkre, úgy a Markov–tulajdonságot is vigyük át megállási időkre.

0.23 Definíció.
Ha tetszőleges A szorzatmérhető halmazra és tetszőleges τ véges értékű megállási időkre és minden $x\in X$ „kezdőpontra”

$$P^x\left(\theta_\tau^{-1}(A) \mid \mathcal{F}_{\tau+}\right) = P^{X(\tau)}(A), \tag{16}$$

akkor a (P^x) családot szigorú, vagy erős Markov–családnak mondjuk[20].

Vegyük észre, hogy a szokásos módon a monoton osztály tétellel a

$$\chi(\theta_\tau\in A) = \chi_A(\theta_\tau)$$

helyébe tetszőleges Φ nem negatív, szorzatmérhető függvény írható és az egyenlőség

$$M^x(\Phi(\theta_\tau) \mid \mathcal{F}_{\tau+}) = M^{X(\tau)}(\Phi)$$

alakba is írható. A erős Markov–tulajdonság felhasználásával, ha $\tau<\infty$ és az X progresszíven mérhető, akkor felhasználva, hogy az $X(\tau)$ $\mathcal{F}_\tau$-mérhető, illetve az $M^{X(\tau)}(\Phi)$ mérhető az $X(\tau)$ által generált σ-algebra szerint

$$\begin{aligned}M^x(\Phi(\theta_\tau) \mid X(\tau)) &= M^x(M^x(\Phi(\theta_\tau) \mid \mathcal{F}_{\tau+}) \mid X(\tau)) = \\ &= M^x\left(M^{X(\tau)}(\Phi) \mid X(\tau)\right) = M^{X(\tau)}(\Phi).\end{aligned}$$

[20]Implicite feltettük, hogy minden értelmes, vagyis az $\omega\mapsto\theta_\tau(\omega)$ leképezés $\mathcal{A}$-mérhető, vagyis az M^x értelmezve van a $\Phi(\theta_\tau)$ függvényre.

0.24 Tétel.
Legyen (P^x) a jobbról folytonos függvények körében értelmezett Markov–család, és $C : E \to E$ korlátos folytonos függvények olyan π-családja, amely generálja a Borel–halmazok $\mathcal{B}(E)$ σ-algebráját. Ha a

$$(P_t f)(x) \circeq M^x (f(\theta_t))$$

operátorok a C halmazt önmagára képezik, akkor a (P^x) erős Markov–család.

Bizonyítás: A (16) egyenlőséget kielégítő szorzatmérhető Φ függvények λ-rendszert alkotnak, és a feltétel szerint a C elemeiből képzett $\prod_{k=1}^{N} f(t_k)$ alakú függvények generálják a Borel-mérhető függvényeket, ezért a monoton osztály tétel miatt az erős Markov-tulajdonságot elegendő a $\Phi \circeq \prod_{k=1}^{N} f_k(X(t_k))$ alakú függvényekre ellenőrizni. Ha $N = 1$, akkor a feltétel miatt, ha $f \in C$, akkor

$$M^x (f(X(t))) \circeq (P_t f)(x) \in C.$$

Ugyanakkor a Markov–tulajdonságból következő (3) felhasználásával

$$\begin{aligned} & M^x \left(\prod_{k=1}^{N} f_k (X(t_k)) \right) = \\ = \; & M^x \left(\prod_{k=1}^{N-1} f_k (X(t_k)) \, M^x \left(f_N (X(t_N)) \mid \mathcal{F}_{t_{N-1}} \right) \right) = \\ = \; & M^x \left(\prod_{k=1}^{N-1} f_k (X(t_k)) \left(P_{t_N - t_{N-1}} f_N \right) (X(t_{N-1})) \right). \end{aligned}$$

Mivel $P_{t_N - t_{N-1}} f_N \in C$ és a C π-rendszer, ezért

$$\widetilde{f}_{N-1} \circeq f_{N-1} \cdot P_{t_N - t_{N-1}} f_N \in C.$$

N szerinti teljes indukcióval

$$M^x (\Phi) \circeq M^x \left(\prod_{k=1}^{N} f_k (X(t_k)) \right) \in C. \tag{17}$$

Tekintsük a τ

$$\tau_n(\omega) \circeq k 2^{-n} \quad \text{ha} \quad \tau(\omega) \in \left[(k-1) 2^{-n}, k 2^{-n} \right)$$

felülről való közelítését[21]. Ha $F \in \mathcal{F}_{\tau+}$, és

$$B_k \circeq \left\{ \tau \in \left[(k-1) 2^{-n}, k 2^{-n} \right) \right\},$$

akkor[22] $F \cap B_k \in \mathcal{F}_{k 2^{-n}}$, így a (15) Markov–tulajdonság alapján

$$\begin{aligned} \int_{F \cap \{\tau < \infty\}} M^{X(\tau_n)} (\Phi) \, dP^x &= \sum_{k=1}^{\infty} \int_{F \cap B_k} M^{X(\tau_n)} (\Phi) \, dP^x = \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} \int_{F \cap B_k} M^{X\left(k 2^{-k}\right)} (\Phi) \, dP^x = \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} \int_{F \cap B_k} \Phi \left(\theta_{k 2^{-n}} \right) dP^x = \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} \int_{F \cap B_k} \prod_{j=1}^{N} f_j \left(X \left(t_j + k 2^{-n} \right) \right) dP^x = \\ &= \int_{F \cap \{\tau < \infty\}} \prod_{j=1}^{N} f_j \left(X (t_j + \tau_n) \right) dP^x . \end{aligned}$$

[21] Ha $\tau(\omega) = \infty$, akkor minden n-re $\tau_n(\omega) \circeq \infty$.
[22] A τ gyenge megállási idő.

$\tau_n \searrow \tau$, ezért az X jobbról való folytonossága miatt

$$X(t_j + \tau_n) \to X(t_j + \tau),\ X(\tau_n) \to X(\tau).$$

A Φ korlátossága miatt, ha $n \to \infty$, akkor az integrálás és a határérték felcserélhető. Az $x \mapsto M^x(\Phi)$ (17) sorban belátott folytonossága, illetve az $\prod_{j=1}^{N} f_j$ szorzat folytonossága miatt

$$\int_{F \cap \{\tau < \infty\}} M^{X(\tau)}(\Phi)\, dP^x = \int_{F \cap \{\tau < \infty\}} \Phi(\theta(\tau))\, dP^x, \quad F \in \mathcal{F}_{\tau+},$$

ami éppen az erős Markov-tulajdonság.

□

0.25 Példa.
Minden Markov-lánc erős Markov-tulajdonságú.

A Markov-láncok definíció szerint jobbról folytonosak. Ha az állapottéren a diszkrét topológiát definiáljuk, akkor az állapottéren értelmezett összes függvény folytonos.

□

0.26 Példa.
A Wiener-folyamat erős Markov-tulajdonságú.

Legyen C a végtelenben nullához tartó folytonos függvények halmaza, vagyis legyen $C \circeq C_0(\mathbb{R})$. Ilyenkor

$$(P_t f)(x) = \mathbf{P}(f(w(t) + x)) = \frac{1}{\sqrt{t2\pi}} \int_{\mathbb{R}} f(x+u) \exp\left(-\frac{u^2}{2t}\right) du.$$

Ha $|x| \to \infty$, akkor, felhasználva, hogy az f biztosan korlátos és így a határérték bevihető az integrál mögé minden $f \in C_0(\mathbb{R})$ esetén

$$\begin{aligned}
\lim_{|x| \to \infty} (P_t f)(x) &= \lim_{|x| \to \infty} \frac{1}{\sqrt{t2\pi}} \int_{\mathbb{R}} f(x+u) \exp\left(-\frac{u^2}{2t}\right) du = \\
&= \frac{1}{\sqrt{t2\pi}} \int_{\mathbb{R}} \lim_{|x| \to \infty} f(x+u) \exp\left(-\frac{u^2}{2t}\right) du = \\
&= \lim_{|x| \to \infty} \int_{\mathbb{R}} 0 \exp\left(-\frac{u^2}{2t}\right) du = 0,
\end{aligned}$$

vagyis $(P_t f)$ a $C_0(\mathbb{R})$ teret önmagára képezi. Mivel a $C_0(\mathbb{R})$ generálja a számegyenes Borel-halmazait a Wiener-folyamat erős Markov-tulajdonságú.

□

0.27 Példa.
Erős Markov–folyamat ugrásai.

Emlékeztetünk, hogy Markov–család esetében a

$$\sigma_x \circeq \inf\{t > 0 : X(t) \neq x\}$$

kilépési időt exponenciális eloszlású. Ha az eloszlás paraméterére $0 < \lambda < \infty$, akkor $P^x(\sigma_x < \infty) = 1$ és $P^x(\sigma_x = 0) = 0$.Ha X erős Markov–folyamat, akkor

$$\begin{aligned}
P^x(X(\sigma_x) = x) &= P^x(X(\sigma_x) = x, \sigma_x(\theta_{\sigma_x}) = 0) = \\
&= M^x(\chi(X(\sigma_x) = x) P^x(\sigma_x(\theta_{\sigma_x}) = 0 \mid \mathcal{F}_{\sigma_x})) = \\
&= M^x\left(\chi(X(\sigma_x) = x) P^{X(\sigma_x)}(\sigma_x = 0)\right) = \\
&= M^x(\chi(X(\sigma_x) = x) P^x(\sigma_x = 0)) = \\
&= P^x(X(\sigma_x) = x) P^x(\sigma_x = 0) = \\
&= P^x(X(\sigma_x) = x) \cdot 0 = 0,
\end{aligned}$$

vagyis majdnem minden kimenetelre $X(\sigma_x) \neq x$, tehát pozitív, de véges várakozási idő esetén az x pontból az erős Markov–folyamat ugrással távozik.

$\square$