Tartalomjegyzék

1. Diszkrét determinisztikus dinamika **2**
1.1. Illusztráló példa 2
1.2. Dinamikus programozás alapjai 4
1.2.1. Jelölések, alapfogalmak, alapfeladatok 4
1.2.2. Az (SP) és (FE) feladatokban szereplő értékfüggvények kapcsolata 6
1.2.3. A szuprémum feladat megoldásáról 12
1.2.4. Példák, feladatok, gyakorlatok 15
1.3. Korlátos egy lépéses hasznosság 18
1.3.1. Feladatok, gyakorlatok 28
1.4. Euler-egyenlet 29

Tárgymutató **31**

1. fejezet

Diszkrét determinisztikus dinamika

A leírás célja a determinisztikus dinamikus programozás bemutatása.

1.1. Illusztráló példa

Ebben a ponban egy egyszerű növekedési modellt írunk le. Ennek az — első látásra nagyon egyszerű modellnek a szekezetét követi az összes többi modell, tehát az "illusztratív" nem jó elnevezés. Talán: alapmodellt lehetne mondani. A modell egy olyan erőforrás allokációt ír le, amelyikben sok azonosan viselkedő háztartás van, és végtelen időtartamra vonatkozik, amit diszkrét módon kezelünk, azaz az idő a nemnegatív számokon fut végig.

A modell változói:

Jószág. Egy $y = (y_0, y_1, \ldots, y_t, \ldots)$ jószágot tételezünk fel, ami output változó lesz (good).

Tőke. Erre az input változóra a $k = (k_0, k_1, \ldots, k_t, \ldots)$ jelölést használjuk (capital).

Munka. Input változó: $n = (n_0, n_1, \ldots, n_t, \ldots)$.

Termelési függvény. A t időpont elején rendelkezésre álló k_t tőke és n_t munka $y_t = F(k_t.n_t)$ jószág outputot ad (production function).

Fogyasztás. A $c = (c_0, c_1, \ldots, c_t, \ldots)$ fogyasztás a az időpont „végén” jelentkezik (current consumption).

Bruttó beruházás. Az $i = (i_0, i_1, \ldots, i_t, \ldots)$ is az időpont "végén" jelentkezik (gross investment).

A modell feltételei:

Egy periódus $F(k_t, n_t)$ outputjának a periódus fogyasztását és bruttó beruházását kell hogy fedezze:

$$c_t + i_t \leq F(k_t, n_t). \tag{1.1}$$

Eszerint az allokációs döntés csak a két szempont: fogyasztás és beruházás szerint történik (consumption-saving decision). A tőke devalváció állandó arányt követ (depreciate at a constant rate):

$$k_{t+1} = (1-\delta)k_t + i_t, \qquad (0 < \delta < 1). \tag{1.2}$$

A munka kinálat állandó:

$$n_t = 1, \qquad \text{minden}\, t\, \text{esetén}. \tag{1.3}$$

A háztartások fogyasztási preferenciája (preference over consumption), ami minden háztartásra azonos, a következő formájú:

$$\sum_{t=0}^{\infty} \beta^t U(c_t), \tag{1.4}$$

ahol a β discount faktor nulla és egy között van.

Most pedig néhány szót a feltételekhez. A modell változói hangsúlyozottan végtelen vektorok, és ennek megfelelően írhatók illetve értelmezhetők a feltételek. Az (1.1) feltétel ilyen módon:

$$c + i \leq F(k, n), \tag{1.5}$$

ahol az F jelölést két értelemben használjuk a vektorra és a koordinátáira. Eszerint az F leképezést koordinátánként kell venni, és minden koordinátára azonos:

$$F(k, n) = (F(k_0, n_0), F(k_1, n_1), \ldots, F(k_t, n_t), \ldots)\,.$$

Hasonló megjegyzést tehetünk a hasznossági függvényre:

$$U(c) = (U(c_0), U(c_1), \ldots, U(c_t), \ldots)\,.$$

Ez azt jelenti, hogy a hasznossági függvény időben nem változik, és csak a szóban forgó időperiódustól függ. Az U diszkontálása (elértéktelenítése) exponenciális, azaz az idő folyamán a későbbi hasznosságok szerepe erősen csökken.

Ide kivánkozik az, hogy a (1.2) egyenlőségből kifejezhető a bruttó beruházás (megtakarítás?): $i_t = k_{t+1} - (1-\delta)k_t$. Ennek az alapján pedig az (1.1) feltétel így írható:

$$c_t + k_{t+1} - (1-\delta)k_t \leq F(k_t, n_t). \tag{1.6}$$

1.2. Dinamikus programozás alapjai

1.2.1. Jelölések, alapfogalmak, alapfeladatok

Először bevezetjük a fejezeten belül végig használt jelöléseket, és megfogalmazzuk a dinamikus programozás két — szoros kapcsolatban lévő — feladatát.

1.1 Jelölés. (Jelölések)
A következők során az alábbi jelöléseket fogjuk használni:

X: *Az állapotváltozók halmaza, amit állapottérnek fogunk mondani. A konkrét feladattól függően esetlegesen az* $\mathbb{R}^d$ *egy részhalmaza, függvénytér egy részhalmaza, valószínűségi eloszlások egy halmaza, stb.*

$\Gamma : X \to \mathcal{P}(X)$: *A lehetséges feltételeket (feasibility constraints) megadó korrespondencia, ami azt jelenti, hogy az* x *pontban* $\Gamma(x)$ *az állapotváltozó lehetséges értékeinek a halmaza. Másképpen: az* x *állapotból a* $\Gamma(x) \subseteq X$ *halmazban lévő állapotokba lehet továbbmenni.*

$F : \mathrm{graph}(\Gamma) \to \mathbb{R}$: *Ahol, ahogyan egy halmazértékű leképezésnél szokásos:*

$$\mathrm{graph}(\Gamma) = \{(x, y) : y \in \Gamma(x), \quad x \in X\} \subseteq X \times X.$$

Az F *függvény két egymás utáni állapothoz egy számot (utility, return, etc) rendel (the one period return function).*

β: *Nem negatív állandó, az amortizációs (discount) faktor, nem feltétlenül kisebb, mint egy.*

$X^{\mathbb{N}}$: *Az* X *elemeiből vett sorozatok összessége. Jelölésként a felülhúzást fogom választani, indexben jelölve azt, hogy milyen indexű taggal indul a sorozat:* $\bar{x}_i \doteq (x_i, x_{i+1}, \ldots)$, *és amennyiben a kiinduló elem nulla, akkor az indexet esetleg el is hagyjuk:* $\bar{x} = (x_0, x_1, \ldots, x_m, \ldots)$.

$\Pi(x_0)$: *Azon* X^N*-ből való sorozatok összessége, amelyekre*

$$x_{i+1} \in \Gamma(x_i), \quad i = 0, 1, \ldots.$$

Egy ilyen sorozatot az x_0 *pontból kiinduló (lehetséges) tervnek (plan), röviden tervnek mondjuk, de az "út" terminológiát is használni fogjuk.*

$u(\bar{x})$: *Az* $u(\bar{x}) \doteq \sum_{t=0}^{\infty} \beta^t F(x_t, x_{t+1})$ *függvényérték az* $\bar{x}$ *tervhez tartozó diszkontált megtérülés (return, utility).*

Alapvető kérdés, hogy a lehetséges tervek összessége ne legyen üres, amit a következő feltételek között kötünk ki. Hasonlóan, az értelmes vizsgálathoz a feladat célfüggvényének az általános értelemben való konvergenciáját (végtelenhez is tarthat) is nyilván fel kell tennünk, amit szintén itt rögzítünk:

1.2 Feltétel. (Alapfeltevések)
A következőkben megfogalmazott feladatok értelmes voltához fel kell tennünk az alábbiakat:

(1) $\forall x \in X, \quad \Gamma(x) \neq \emptyset$,

(2) $\forall x_0 \in X$ *és* $\bar{x} \in \Pi(x_0)$ *esetén a* $\sum_{i=0}^{\infty} \beta^i F(x_i, x_{i+1})$ *sor általános értelemben konvergál.*

A (2) alatti sort akkor is konvergensnek mondjuk, ha $-\infty$ vagy $+\infty$ az összeg. A sornak akkor véges az összege — mivel hatványsorról van szó — ha a diszkonttényező kisebb, mint a konvergencia sugár, azaz ha

$$\beta < \frac{1}{\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|F(x_n, x_{n+1})|}}.$$

A feltétel nyilvánvalóan teljesül, ha az mF függvény korlátos és $\beta < 1$. De az általános konvergencia akkor is biztosítható, ha $F \geq 0$.

Most pedig megfogalmazzuk a dinamikus programozás két feladatát:

1.3 Definíció. (Szupremum probléma, (SP))
Tetszőleges $x_0 \in X$ *elem esetében, keressük az* $u(\bar{x}) \doteq \sum_{i=0}^{\infty} \beta^i F(x_i, x_{i+1})$ *függvény szuprémumát az* x_0 *állapotból kiinduló lehetséges utak összességén:*

$$w(x_0) \doteq \sup_{\bar{x}\in\Pi(x_0)} u(\bar{x}) = \sup_{\bar{x}\in\Pi(x_0)} \sum_{i=0}^{\infty} \beta^i F(x_i, x_{i+1}).$$

A szuprémum $w(x_0)$ *értékét az* x_0 *pontból kiinduló (SP) feladat értékének fogjuk mondani, és a* $w : X \to \bar{\mathbb{R}}$ *függvényt pedig a feladat értékfüggvényének.*

Más szavakkal az (SP) feladat: Keresendő a $\sum_{i=0}^{\infty} \beta^i F(x_i, x_{i+1})$ összeg szupremuma az

$$x_0 \in X \text{ és } x_{i+1} \in \Gamma(x_i), \quad i = 0, 1, \ldots$$

sorozatok halmazán. Nyilván közgazdasági, alkalmazási szempontból éppen az (SP) feladat bír relevanciával. Ugyanakkor az (SP) megoldását visszavezetjük egy másik feladat megoldására:

1.4 Definíció. (Funkcionál egyenlet probléma, (FE), Bellman-egyenlet)
Keressük a következő — szuprémummal megadott — funkcionál egyenlet $v : X \to \bar{\mathbb{R}}$ *megoldását:*

$$v(x_0) = \sup_{y\in\Gamma(x_0)} (F(x_0, y) + \beta v(y)), \qquad x_0 \in X,$$

amelyet Bellman-egyenletnek is mondanak.

Hangsúlyozni kell, hogy az (FE) feladatnak több v megoldása is lehet, az (SP) feladatnak pedig természetesen csak egyetlen w értékfüggvénye.

A dinamikus programozás alapgondolata és első, részletes kidolgozása R. Bellman nevéhez kötődik, ezért az funkcionálegyenletet Bellman-egyenletnek is szokás nevezni. Érdekes, hogy amíg a szuprémum feladatban szuprémum az $\bar{x} = (x_0, x_1, \dots, x_n, \dots)$ végtelen sorozatok halmazán van képezve, addig a funkcionálegyenletben a szuprémum az X valamely részhalmazán van képezve. Ez lehetővé teszi például az (FE) folytonossági, deriválhatósági kérdéseinek a vizsgálatát is, ha az X állapottér a valós számok, vagy valamely $\mathbb{R}^d$ vektortér részhalmaza.

A következőkben — a részletezettség kedvéért — ideírjuk, hogy pontosan mit is jelentenek a 1.3. és 1.4. definíciókban a szuprémumok, mert így talán könnyebb lesz követni a bizonyításokat. Gondosan figyelni kell ugyanis a véges és végtelen értékekre.
Az (SP) feladat értéke pontosan akkor $w(x_0)$, ha a következők teljesülnek:

(a) Ha $w(x_0)$ véges: $\forall \bar{x} \in \Pi(x_0) \quad w(x_0) \geq u(\bar{x})$,
$\forall \varepsilon > 0 \; \exists \bar{x} \in \Pi(x_0) \quad w(x_0) \leq u(\bar{x}) + \varepsilon$.

(b) Ha $w(x_0) = +\infty$: $\exists \bar{x}^{(k)} \in \Pi(x_0) \quad \lim_{k\to\infty} u\left(\bar{x}^{(k)}\right) = +\infty$.

(c) Ha $w(x_0) = -\infty$: $\forall \bar{x} \in \Pi(x_0) \quad u(\bar{x}) = -\infty$.

Az (FE) probléma megoldása pontosan akkor az v függvény, ha a következők teljesülnek:

(d) Ha $v(x_0)$ véges: $\forall y \in \Gamma(x_0) \quad v(x_0) \geq F(x_0, y) + \beta v(y)$,
$\forall \varepsilon > 0 \; \exists y \in \Gamma(x_0) \quad v(x_0) \leq F(x_0, y) + \beta v(y) + \varepsilon$.

(e) Ha $v(x_0) = +\infty$: $\exists y_k \in \Gamma(x_0) \quad \lim_{k\to\infty} F(x_0, y_k) + \beta v(y_k) = +\infty$.

(f) Ha $v(x_0) = -\infty$: $\forall y \in \Gamma(x_0) \quad F(x_0, y) + \beta v(y) = -\infty$, azaz $v(y) = -\infty$.

1.2.2. Az (SP) és (FE) feladatokban szereplő értékfüggvények kapcsolata

Ebben az alpontban a legáltalánosabb feltételek mellett vizsgáljuk meg az (SP) és (FE) feladatok kapcsolatát. Nagy általánosság esetében — ahogyan ez általában lenni szokott — az állítások nem lesznek túl mélyek. A bizonyítások voltaképpen csupán a szuprémum fogalmának ismeretét tételezik fel. Általánosságuk miatt a kimondott tételek a továbbiak kiinduló alapját adják meg, és ezért figyelmesen kell eljárni.

1.5 Lemma. (Indukciós lemma)
Tegyük fel, hogy az X, F, Γ és β kielégítik a 1.2.(1),(2) feltételeket. Ekkor

$$\forall x_0 \in X \;\; \forall \bar{x} \in \Pi(x_0) \qquad u(\bar{x}) = F(x_0, x_1) + \beta u(\bar{x}_1).$$

Bizonyítás: Mivel

$$u(\bar{x}_0) \mathrel{\hat{=}} \sum_{t=0}^{\infty} \beta^t F(x_t, x_{t+1}),$$

ezért

$$\begin{aligned} u(\bar{x}_0) &= \beta^0 F(x_0, x_1) + \sum_{t=1}^{\infty} \beta^t F(x_t, x_{t+1}) = \\ &= F(x_0, x_1) + \sum_{t=1}^{\infty} \beta^t F(x_t, x_{t+1}) \\ &= F(x_0, x_1) + \beta u(\bar{x}_1). \end{aligned}$$

□

A plusz és mínusz végtelen — végülis kényszerű — szerepeltetése miatt a következő észrevételek hasznosak a bizonyításokhoz:

1.6 Lemma. (Véges és végtelen értékek a feladatokban)

(1) *Ha az (SP) szuprémum feladat w értékfüggvénye $-\infty$ az x_0 pontban, akkor $-\infty$ az x_0 pontból kiinduló tetszőleges út minden pontjában.*

(2) *Ha az (SP) szuprémum feladat w értékfüggvénye véges az x_0 pontban, akkor véges az x_0 pontból kiinduló tetszőleges út minden pontjában.*

(3) *Ha az (FE) függvényegyenlet egy v megoldásának értéke $-\infty$ az x_0 pontban, akkor mínusz végtelen az x_0 pontból kiinduló tetszőleges út minden pontjában.*

Bizonyítás: Az állítások indoklása elemi:

(1): Ha $w(x_0) \mathrel{\hat{=}} \sup_{\bar{x}_0 \in \Pi(x_0)} u(\bar{x}_0) = -\infty$, akkor $u(\bar{x}_0) = -\infty$ minden az x_0-ból kiinduló $\bar{x}_0$ útra. Mivel az indukciós lemma szerint $u(\bar{x}_0) = F(x_0, x_1) + \beta u(\bar{x}_1)$, minden $x_1 \in \Gamma(x_0)$ állapotra, ezért

$$F(x_0, x_1) + \beta u(\bar{x}_1) = -\infty,$$

amelyből, mivel az $F(x_0, x_1)$ definíció szerint véges $u(\bar{x}_1) = -\infty$,minden az x_1-ből kiinduló útra, és így $w(x_1) = -\infty$, minden $x_1 \in \Gamma(x_0)$ elemre. Ezt a indoklást teljes indukcióval folytatva kapjuk, hogy w értéke $-\infty$, az x_0 pontból kiinduló minden út pontjaiban.

(2): Legyen $w(x_0)$ véges, és $x_1 \in \Gamma(x_0)$ tetszőleges de rögzített állapot. Megmutatjuk, hogy ekkor a $w(x_1)$ is véges. Ha $w(x_1) = -\infty$ lenne, akkor a $w(x_1)$ definíciója miatt $u(\bar{x}_1) = -\infty$ lenne. Ha $\beta = 0$, akkor az u definíciója miatt $u(\bar{x}_1)$ véges, így feltehetjük, hogy $\beta > 0$. Az indukciós lemma miatt, felhasználva, hogy$\beta > 0$

$$u(\bar{x}_0) = u(\bar{x}_0) + \beta u(\bar{x}_0) = -\infty$$

adódnék, minden az x_0-ból induló útra, vagyis $w(x_0) = -\infty$ lenne, ami ellentmond az induló feltételnek. Ha pedig $w(x_1) = +\infty$ lenne, akkor az indukciós lemma szerint, rögzített x_1 mellett kapjuk, hogy

$$\begin{aligned}
\infty &> w(x_0) \mathrel{\mathring{=}} \sup_{\bar{x}\in\Pi(x_0)} u(\bar{x}) = \sup_{(x_0,\bar{x}_1)\in\Pi(x_0)} (F(x_0,x_1) + \beta u(\bar{x}_1)) \geq \\
&\geqq \sup_{\bar{x}_1\in\Pi(x_1)} (F(x_0,x_1) + \beta u(\bar{x}_1)) = F(x_0,x_1) + \sup_{\bar{x}_1\in\Pi(x_1)} \beta u(\bar{x}_1)) \\
&= F(x_0,x_1) + \beta w(x_1),
\end{aligned}$$

és így $w(x_1)$ véges, hiszen a modell alapfeltételei szerint az $F(x_0,x_1)$ véges. Az út többi pontjára teljes indukcióval látható be az állítás.

(3): Megmutatjuk, hogy ha $v(x_0) = -\infty$, akkor tetszőleges $\bar{x}_0$ út x_1 pontjára: $v(x_0) = -\infty$. Mivel

$$v(x_0) = \sup_{y\in\Gamma(x_0)} [F(x_0,y) + \beta v(y)],$$

ezért a $v(x_0) = -\infty$ miatt $[F(x_0,y) + \beta v(y)] = -\infty$, minden $y \in \Gamma(x_0)$ pontban, ami az F feltételezett végessége miatt csak úgy lehetséges, ha $v(y) = -\infty$, minden $y \in \Gamma(x_0)$ helyen. Speciálisan ha $y = x_1$, akkor $v(x_1) = -\infty$.

□

A következő állítás az első kapcsolat az (SP) és (FE) feladatok között[1]:

1.7 Állítás. (Az (SP) megoldása az (FE)-nek is megoldása)
Tegyük fel, hogy az X, F és β kielégítik a 1.2.(1),(2) feltételeket. Ekkor az (SP) *feladat w, értékfüggvénye megoldása az* (FE) *feladatnak.*

Bizonyítás: Megmutatjuk, hogy a w és v függvények minden $x_0 \in X$ helyen megegyeznek, amit úgy látunk be, hogy megmutatjuk: a $w(x_0)$ teljesíti a $v(x_0)$-át a szuprémum szerint meghatározó felső határ tulajdonságokat, amelyek mások a véges illetve végtelen esetben.

A $\beta = 0$ esetben evidens az állítás, hiszen ekkor $u(\bar{x}) = F(x_0,x_1)$, és így az (SP) feladat:

$$w(\bar{x}) \mathrel{\mathring{=}} \sup_{\bar{x}\in\Pi(x_0)} u(\bar{x}) = \sup_{\bar{x}\in\Pi(x_0)} F(x_0,x_1) = \sup_{x_1\in\Gamma(x_0)} F(x_0,x_1),$$

az (FE) feladat pedig

$$v(x_0) = \sup_{y\in\Gamma(x_0)} (F(x_0,y) + 0\cdot v(y)) = \sup_{y\in\Gamma(x_0)} F(x_0,y),$$

[1] Vagyis a szuprémum feladat megoldásait elegendő a függvényegyenlet megoldásai között keresni. Ez hasonló gondolat mint a szélőérték feladatok és a Fermat-elv viszonya. Valamely függvény lokális szélsőértékeit elegendő a deriváltjának zérushelyei között keresni.

tehát az (SP) és az (FE) feladatok megegyeznek. Legyen ezért a továbbiakban $0 < \beta$. A bizonyítás aszerint különböző, hogy $w(x_0)$ véges vagy végtelen.

$w(x_0)$ ***véges***: Vegyünk tehát egy x_0 elemet. Legyen az $x_1 \in \Gamma(x_0)$ tetszőleges rögzített elem, és $\varepsilon > 0$. Ekkor az előző lemma szerint a $w(x_1)$ is véges. Így a $w(x_1)$ végessége miatti felső határ tulajdonság szerint írhatjuk, hogy

$$\exists \bar{x}_1 \in \Pi(x_1) \qquad w(x_1) \leqq u(\bar{x}_1) + \varepsilon, \quad \text{amelyből} \quad u(\bar{x}_1) \geq w(x_1) - \varepsilon.$$

Ezt felhasználva, $w(x_0)$ felső korlát tulajdonsága és az indukciós lemma szerint a következőket kapjuk:

$$\begin{aligned} \forall x_1 \quad &\in \quad \Gamma(x_0)\ \exists \bar{x}_1 \in \Pi(x_1) \quad w(x_0) \stackrel{\circ}{=} \sup_{\bar{x}_0 \in \Pi(x_0)} u(\bar{x}_0) \geqq u(\bar{x}) = F(x_0, x_1) + \beta u(\bar{x}_1) \\ &\geqq \quad F(x_0, x_1) + \beta w(x_1) - \beta\varepsilon. \end{aligned}$$

Ebből pedig — mivel tetszőleges $x_1 \in \Gamma(x_0)$ állapotra fennáll az egyenlőség — kapjuk, hogy

$$w(x_0) \geqq \sup_{x_1 \in \Gamma(x_0)} (F(x_0, x_1) + \beta w(x_1)) - \beta\varepsilon,$$

és így, mivel ε tetszőleges pozitív szám, adódik, hogy

$$w(x_0) \geqq \sup_{x_1 \in \Gamma(x_0)} (F(x_0, x_1) + \beta w(x_1)). \tag{1.7}$$

Az ellenkező irányú egyenlőtlenség belátásához legyen $\varepsilon > 0$ tetszőleges szám. A véges felső határ tulajdonságai miatt, az indukciós lemma felhasználásával kapjuk, hogy van olyan $\bar{x}_0 \in \Pi(x_0)$, amelyre

$$\begin{aligned} w(x_0) \quad &\leqq \quad u(\bar{x}) + \varepsilon = F(x_0, x_1) + \beta u(\bar{x}_1) + \varepsilon \leqq \\ &\leqq \quad F(x_0, x_1) + \beta w(x_1) + \varepsilon. \end{aligned}$$

Összevetve ezt az (1.7) egyenlőtlenséggel adódik, hogy

$$w(x_0) = \sup_{x_1 \in \Gamma(x_0)} (F(x_0, x_1) + \beta w(x_1)),$$

tehát w az x_0 pontban kielégíti a függvényegyenletet.

$w(x_0)$ ***végtelen***: Tegyük fel először, hogy $w(x_0) = \infty$. Ekkor az indukciós lemmát használva írhatjuk, hogy

$$\exists \bar{x}^{(k)} \in \Pi(x_0) \qquad \lim_{k \to \infty} u\left(\bar{x}^{(k)}\right) = \lim_{k \to \infty} \left(F(x_0, x_1^{(k)}) + \beta u\left(\bar{x}_1^{(k)}\right)\right) = \infty.$$

Így pedig $u\left(\bar{x}_1^{(k)}\right) \leq w(x_1^{(k)})$ miatt

$$\infty = \lim_{k \to \infty} \left(F(x_0, x_1^{(k)}) + \beta u\left(\bar{x}_1^{(k)}\right)\right) \leq \lim_{k \to \infty} \left(F(x_0, x_1^{(k)}) + \beta w\left(x_1^{(k)}\right)\right).$$

Ebből következően

$$\sup_{y\in\Gamma(x_0)} \left(F(x_0,y)+\beta\cdot w\left(y\right)\right)=\infty$$

tehát a $w(x_0)=\infty$ kielégíti a függvényegyenletet:

$$w\left(x_0\right)=\infty=\sup_{y\in\Gamma(x_0)} \left(F(x_0,y)+\beta\cdot w\left(y\right)\right).$$

Tegyük fel most, hogy $w(x_0)=-\infty$. Ekkor használva az indukciós lemmát:

$$\forall\bar{x}\in\Pi(x_0)\qquad u\left(\bar{x}\right)=F\left(x_0,x_1\right)+\beta u\left(\bar{x}_1\right)=-\infty,$$

amelyből—mivel az $F(x_0,x_1)$ véges—kapjuk, hogy

$$\forall x_1\in\Gamma(x_0)\ \ \bar{x}_1\in\Pi(x_1)\qquad u\left(\bar{x}_1\right)=-\infty.$$

Ebből pedig: $\forall x_1\in\Gamma(x_0)$, $\quad w(x_1)=-\infty$, és így, mivel az $F(x_0,x_1)$ véges, kapjuk is, hogy $w(x_0)=-\infty$ kielégíti a függvényegyenletet.

□

1.8 Állítás. (Az (FE) megoldása az (SP)-nek is megoldása)
Tegyük fel, hogy az X, F és β kielégítik a 1.2.(1),(2) feltételeket. Ha a v egy olyan megoldása az (FE) *függvényegyenletnek, amelyre*

$$\forall x_0\in X\ \ \forall\bar{x}\in\Pi(x_0)\qquad \lim_{n\to\infty}\beta^n v(x_n)=0,$$

akkor a v függvény az (SP) *szuprémum feladat értékfüggvénye.*

Mivel értékfüggvény csak egy van, ezért az (FE) feladatnak csak egyetlen olyan v megoldása lehet, amely kielégíti az állítás limesz feltételét. Előfordulhat azonban, hogy a limesz feltételt kielégítő megoldáson kívül létezik az (FE) feladatnak más megoldása is. A 1.3. feladatban olyan példát adunk erre, aminek még közgazdasági tartalma is lesz. Az állításban szereplő limesz feltételén kívül más feltételek is mondhatók, amelyek mellett az (FE) feladat megoldása értékfüggvénye az (SP) feladatnak. Ezzel foglalkoznak a 1.4. és 1.5. feladatok.

Bizonyítás: Megmutatjuk, hogy a konvergencia feltétel teljesülése esetén az (FE) v megoldás-függvénye az (SP) feladat értékfüggvényével egyezik meg. Az előző állítás bizonyításához hasonló módon járunk el, itt is megkülönböztetve a v függvény véges és végtelen értékeit.

$v(x_0)$ véges: Legyen $\bar{x}_0\in\Pi(x_0)$ és alkalmazzuk sorozatosan a v szuprémum voltából azt, hogy felső korlát:

$$\begin{aligned} v(x_0) &\geq F(x_0,x_1)+\beta v(x_1)\geq \\ &\geq F(x_0,x_1)+\beta\left(F(x_1,x_2)+\beta v(x_2)\right)\geq \\ &\ \ \vdots \\ &\geq \sum_{i=0}^{n}\beta^i F\left(x_i,x_{i+1}\right)+\beta^{n+1}v(x_{n+1})\qquad n=1,2,\ldots. \end{aligned}$$

Határértékre térve át, a tétel feltétele szerint kapjuk, hogy $v(x_0) \geqq u(\bar{x})$ minden $\bar{x} \in \Pi(x_0)$ esetében, tehát $v(x_0)$ felső korlát a szuprémum feladatban, és azt kell még belátni, hogy legkisebb felső korlát. Legyen ehhez $\varepsilon > 0$, és vegyünk egy olyan $0 < \delta_i$ sorozatot, amelyre $\sum_{i=1}^{\infty} \beta^i \delta_i \leqq \varepsilon$. Mivel v kielégíti a függvényegyenletet, ezért a felső határ tulajdonság szerint választhatunk olyan $(x_1, \ldots, x_i, \ldots)$ sorozatot, amelyre

$$x_{i+1} \in \Gamma(x_i) \quad \text{és} \quad v(x_i) \leq F(x_i, x_{i+1}) + \beta v(x_{i+1}) + \delta_{i+1} \qquad i = 0, 1, 2, \ldots.$$

Eszerint $\bar{x}_0 \in \Pi(x_0)$, és az egyenlőtlenség induktív alkalmazásával kapjuk, hogy

$$\begin{aligned}
v(x_0) &\leqq F(x_0, x_1) + \beta v(x_1) + \delta_1 \leqq \\
&\leqq F(x_0, x_1) + \beta[F(x_1, x_2) + \beta v(x_2) + \delta_2] + \delta_1 \leqq \\
&\vdots \\
&\leqq \sum_{i=0}^{n} \beta^i F(x_i, x_{i+1}) + \beta^{n+1} v(x_{n+1}) + (\delta_1 + \beta\delta_2 + \ldots + \beta^n \delta_{n+1}) \leqq \\
&\leqq \sum_{i=0}^{\infty} \beta^i F(x_i, x_{i+1}) + \beta^{n+1} v(x_{n+1}) + \varepsilon,
\end{aligned}$$

és így a tétel feltétele alapján határátmenettel kapjuk, hogy

$$v(x_0) \leq \sum_{i=0}^{\infty} \beta^i F(x_i, x_{i+1}) + \epsilon,$$

amelyből — mivel az ε tetszőleges — $v(x_0) \leqq u(\bar{x})$, tehát $v(x_0)$ legkisebb felső korlát a szuprémum feladat összegére, azaz $v(x_0) = \sup_{\bar{x}_0 \in \Pi(x_0)} u(\bar{x}_0)$.

$v(x_0)$ *végtelen*: Foglalkozzunk először az egyszerűbb esettel a minusz végtelen értékkel. Mivel az F függvény véges, ezért $v(x_0)$ csak akkor lehet mínusz végtelen, ha $v(x_1) = -\infty$, minden $x_1 \in \Gamma(x_0)$ helyen. Ezt a gondolatot folytatva: a $v(x_1) = -\infty$-ből adódik, hogy minden $x_2 \in \Gamma(x_2)$ helyen $v(x_2) = -\infty$, és így teljes indukcióval kapjuk, hogy minden az x_0 pontól kiinduló úton minusz végtelen a v értéke, ami ellentmond az állítás limesz feltételének.

Már csak a plusz végtelen esettel kell foglalkoznunk, legyen ezért $v(x_0) = \infty$. A limesz feltétel miatt bizonyos n-től kezdve nem lehet végtelen a $v(x_i)$ egyetlen útra sem (természetesen az n index függ a konkrét tervtől), ezért van olyan n index, hogy

$$v(x_0) = \cdots = v(x_n) = \infty \quad \text{és} \quad \forall x_{n+1} \in \Gamma(x_n) \qquad v(x_{n+1}) \text{ véges.} \tag{1.8}$$

Legyen most α egy tetszőlegesen nagy pozitív szám. Mivel $v(x_n) = \infty$, ezért van olyan $x_{n+1} \in \Gamma(x_n)$ állapot, amelyre a szuprémum mögötti érték nagyobb a

$\frac{1}{\beta^n}\left[\alpha + 1 - \sum_{i=0}^{n-1} \beta^i F(x_i, x_{i+1})\right]$ számnál, azaz

$$\frac{1}{\beta^n}\left[\alpha + 1 - \sum_{i=0}^{n-1} \beta^i F(x_i, x_{i+1})\right] \leqq F\left(x_n, x_{n+1}\right) + \beta v\left(x_{n+1}\right),$$

amelyből átrendezéssel kapjuk, hogy

$$\alpha + 1 - \beta^{n+1} v(x_{n+1}) \leqq \sum_{i=0}^{n} \beta^i F(x_i, x_{i+1}). \tag{1.9}$$

A (1.8) szerint a $v\left(x_{n+1}\right)$ véges, minden $x_{n+1} \in \Gamma(x_n)$ elemre, és ezen esetben már beláttuk, hogy ekkor $v\left(x_{n+1}\right)$ értéke az (SP) feladatnak. Emiatt a véges felső határ tulajdonsága szerint az $1/\beta^{n+1}$ pozitív számhoz van olyan x_{n+1}-ből kiinduló $\bar{x}_{n+1}$ út, hogy

$$v(x_{n+1}) \leqq \sum_{i=0}^{\infty} \beta^i F(x_{n+1+i}, x_{n+2+i}) + \frac{1}{\beta^{n+1}},$$

amelyet átrendezve

$$\beta^{n+1} v(x_{n+1}) - 1 \leqq \sum_{i=0}^{\infty} \beta^{n+1+i} F(x_{n+1+i}, x_{n+2+i})$$

adódik. Hozzáadva ezt a (1.9) egyenlőtlenséghez, végülis azt kapjuk, hogy

$$\alpha \leq \sum_{i=0}^{\infty} \beta^i F(x_i, x_{i+1}).$$

Mivel az α tetszőleges volt, a baloldal csak plusz végtelen lehet, tehát $w(x_0)$ értéke — a $v(x_0)$-val megegyezően — plusz végtelen.

□

1.2.3. A szuprémum feladat megoldásáról

A következő két tételben azt vizsgáljuk meg, hogy mit tudunk mondani a szuprémum felvételével kapcsolatban az (SP) feladatban. Először azt nézzük meg, hogy mi van akkor, ha a szuprémum felvétetik. A második állításban pedig egy feltételt adunk arra, hogy az (SP) feladatban eléressék a szuprémum:

1.9 Állítás. (Az (SP)-beli szuprémum felvételének a következményei) *Tegyük fel, hogy az X, Γ, F és β kielégítik az 1.2.(1),(2) feltételeket és $\beta > 0$. Ha az* (SP) *feladatban van olyan $\bar{x}_0^*$, ($x_0^* = x_0$) út, amelyre*

$$w\left(x_0\right) \mathrel{\hat{=}} w\left(x_0^*\right) \mathrel{\hat{=}} \sup_{\bar{x}_0 \in \Pi(x_0)} u(\bar{x}_0) = u(\bar{x}_0^*),$$

akkor az $\bar{x}_0^*$ úton lévő $w(x_i^*)$ értékfüggvényekre a szuprémum szintén felvevődik és teljesülnek a

$$w\left(x_t^*\right) = F\left(x_t^*, x_{t+1}^*\right) + \beta w\left(x_{t+1}^*\right), \qquad t = 0, 1, 2, \ldots. \tag{1.10}$$

egyenletek.

Bizonyítás: A bizonyítás csak a jelölések miatt olyan hosszadalmas. A bizonyítást teljes indukcióval kell igazolni.

Ha $\beta = 0$, akkor

$$\begin{aligned} w\left(x_0\right) &\stackrel{\circ}{=} w\left(x_0^*\right) \stackrel{\circ}{=} \sup_{\bar{x}_0 \in \Pi(x_0)} u(\bar{x}_0) = \sup_{x_1 \in \Gamma(x_0)} F\left(x_0, x_1\right) = F\left(x_0^*, x_1^*\right) \\ w\left(x_1^*\right) &= \sup_{x_2 \in \Gamma(x_1^*)} F\left(x_1^*, x_2\right) = F\left(x_1^*, x_2^*\right). \\ w\left(x_2^*\right) &= \sup_{x_2 \in \Gamma(x_1^*)} F\left(x_1^*, x_2\right) = F\left(x_2^*, x_3^*\right) \end{aligned}$$

így a (1.10) egyenlőség formailag teljesülhet, de nem tudjuk, egyrészt, hogy az x_1^* esetén az x_2^* pontban a szuprémum felvevődik-e. Ugyanakkor az eredeti x_0^*-hoz tartozó optimum feladatnak minden $x_2 \in \Gamma\left(x_1^*\right)$ lehetséges megoldás optimális megoldása, amire a szuprémum felvétele nem teljesül feltétlenül. Ennek megfelelően a $\beta > 0$ feltétel szükséges.

Tegyük fel tehát, hogy $\beta > 0$: Legyen $\bar{x}_0^*$ az optimális út.

$$(x_0^*, x_1^*, \bar{x}_2) = (x_0^*, x_1^*, x_2, \ldots) \in \Pi(x_0^*)$$

akkor az indukciós lemma miatt:

$$\begin{aligned} \forall\left(x_1^*, \bar{x}_2\right) \in \Pi(x_1^*), \quad w(x_0^*) &= u(x_0^*) = F\left(x_0^*, x_1^*\right) + \beta u\left(x_1^*, \bar{x}_2^*\right) \geq \\ &\geq u\left(x_0^*, x_1^*, \bar{x}_2\right) = F\left(x_0^*, x_1^*\right) + \beta u\left(x_1^*, \bar{x}_2\right), \end{aligned}$$

aminek az utolsó két tagja közötti egyenlőtlenségéből $\beta u\left(x_1^*, \bar{x}_2^*\right) \geq \beta u\left(x_1^*, \bar{x}_2\right)$, és így — figyelembe véve azt is, hogy $\beta > 0$ — kapjuk, hogy minden $\bar{x}_2$ lehetséges útra,

$$u\left(x_1^*, \bar{x}_2^*\right) \geq u\left(x_1^*, \bar{x}_2\right),$$

ezért

$$u\left(x_1^*, \bar{x}_2^*\right) \geq \sup_{(x_1^*, \bar{x}_2) \in \Pi(x_1^*)} u\left(x_1^*, \bar{x}_2\right) = w(x_1^*).$$

Az ellenkező irányú egyenlőtlenség a definícióból nyilvánvaló:

$$u\left(\bar{x}_1^*\right) = u\left(x_1^*, \bar{x}_2^*\right) \leq \sup_{\left(x_1^*, \bar{x}_2\right) \in \Pi\left(x_1^*\right)} u\left(x_1^*, \bar{x}_2\right) = w\left(x_1^*\right),$$

és így

$$w\left(x_1^*\right) = u\left(\bar{x}_1^*\right),$$

vagyis a szuprémum az x_1^*-hoz tartozó pontban is felvevődik. Ez utóbbit az indukciós lemmából következő

$$w(x_0^*) = u(\bar{x}_0^*) = F(x_0^*, x_1^*) + \beta u(\bar{x}_1^*)$$

indukciós egyenlőségbe helyettesítve azt kapjuk, hogy

$$w(x_0^*) = F(x_0^*, x_1^*) + \beta w(x_1^*),$$

ami a tétel állítása $t = 0$-ra.

Ha t-re már beláttuk az állítást, akkor az előző bizonyítás végén mondottak szerint az $\bar{x}_t^*$ optimális út az x_t^*-ből. Ettől kezdve ugyanaz a bizonyítás, mint az előzőekben, csak a nulla helyett t, az 1 helyett pedig $(t+1)$-et kell írni.

□

1.10 Állítás. (A szuprémum felvételére az (SP)-ben)
Tegyük fel, hogy az X, Γ, F és β kielégítik az 1.2. (1),(2) feltételeket. Legyen az $\bar{x}^*$ az x_0^* pontból kiinduló olyan lehetséges terv, amelyre teljesülnek a következők.

$$w(x_t^*) = F\left(x_t^*, x_{t+1}^*\right) + \beta w\left(x_{t+1}^*\right), \qquad t = 0, 1, 2, \ldots \tag{1.11}$$

és

$$\limsup_{k\to\infty} \beta^k w(x_k^*) \leq 0. \tag{1.12}$$

Ekkor az $\bar{x}^*$ terv optimális megoldása az x_0^* pontból induló (SP) *feladatnak, vagyis a szuprémum feladatban a szuprémum felvétetik.*

A 1.5. példa azt mutatja, hogy a (1.12) feltétel mennyire szükséges.

Bizonyítás: Az (1.11) feltevésből következik, hogy

$$\begin{aligned}
w(x_0^*) &\circeq F(x_0^*, x_1^*) + \beta w(x_1^*) \circeq \\
&\circeq F(x_0^*, x_1^*) + \beta F(x_1^*, x_2^*) + \beta^2 w(x_2^*) = \\
&\circeq \sum_{t=0}^{2} \beta^t F\left(x_t^*, x_{t+1}^*\right) + \beta^3 w(x_3^*) \circeq \\
&\ \vdots \\
&\circeq \sum_{t=0}^{n} \beta^t F\left(x_t^*, x_{t+1}^*\right) + \beta^{n+1} w\left(x_{n+1}^*\right).
\end{aligned}$$

Ebből, a (1.12) feltétel alapján, adódik, hogy

$$w(x_0^*) \leq \sum_{t=0}^{\infty} \beta^t F\left(x_t^*, x_{t+1}^*\right) \circeq u(\bar{x}_0^*).$$

Az ellenkező irány abból következik, hogy az $\bar{x}^*$ a feltétel szerint egy x_0^* pontból induló lehetséges út, ezért a szumma nem nagyobb az összes lehetséges útra vonatkozó szuprémumnál, azaz a $w\,(x_0^*)$-nél, vagyis

$$u(\bar{x}_0^*) \leq w\,(x_0^*)$$

tehát az $\bar{x}^*$ valóban optimális megoldása az (SP) feladatnak.

□

Végezetül néhány elnevezést vezetünk be a következő definícióban:

1.11 Definíció. (Policy correspondence)
Egy $G(x) \subseteq \Gamma(x)$ nemüres értékű $(X \to \mathcal{P}(X))$ leképezést policy megfeleltetésnek, ha pedig minden $G(x)$ egy elemű, akkor policy függvénynek fogunk mondani, és az utóbbi esetben kis betűs jelölést használunk.
Ha egy $(x_0, x_1, \ldots, x_i, \ldots)$ sorozatra $x_{i+1} \in G(x_i)$, akkor azt mondjuk, hogy az utat a G policy megfeleltetés generálja.
A

$$G^*(\bar{x}) = \{y \in \Gamma(x) : w(x) = F(x, y) + \beta w(y)\}$$

halmazértékű leképezést optimális policy megfeleltetésnek nevezzük.

A 1.9. tétel szerint:

> *az (SP) feladat minden optimális $\bar{x}$ megoldását a G^* optimális policy megfeleltetés generálja.*

A 1.10. tétel szerint, megfordítva:

> *ha az $\bar{x}$ tervet az optimális policy megfeleltetés generálja, és teljesül az (1.12) feltétel, akkor az $\bar{x}$ út optimális megoldása az (SP) feladatnak.*

1.2.4. Példák, feladatok, gyakorlatok

1.1 Feladat. *Mutassuk meg, hogy ha teljesülnek a következő feltételek, akkor teljesülnek a 1.2. feltételben leírt feltételek.*

1. $X = \mathbb{R}_+^n$,
2. $0 < \beta < 1$,
3. $\exists \theta \in (0, 1/\beta)$, *hogy* $y \in \Gamma(x) \Rightarrow |y| \leq \theta ||x||$,
4. $F(0, 0) = 0$, *az F csökkenő az első n változójában és növekvő a második n változójában, konkáv az első n változójában.*
5. $\forall x \in X \quad 0 \in \Gamma(x)$.

1.2 Feladat. *Mutassuk meg, hogy ha teljesülnek a következő feltételek, akkor teljesülnek a 1.2. feltételben leírt feltételek.*

1. $X = \mathbb{R}_+^n$,
2. $0 < \beta < 1$,
3. $\exists\theta \in (0, 1/\beta)$,*hogy* $\forall y \in \Gamma(x) \Rightarrow F(y, 0) \leq F(x, 0)$,
4. *Az F növekedő az első n változójában és csökkenő a második n változójában és konkáv az első n változójában.*
5. $\forall x \in X \quad 0 \in \Gamma(x)$.

1.3 Feladat. *Tegyük fel, hogy egy fogyasztó egyetlen áruból a t időszakban c_t mennyiséget fogyaszt, a kiinduló x_0 kezdőkészlete adott, és a t időszakban x_t (pozitív vagy negatív) készlettel rendelkezik, és korlátlanul vehet fel és adhat kölcsönt α kamatlábbal. A célfüggvénye a fogyasztásának $\beta \circeq 1/(1+\alpha)$ szorzóval való diszkontált összege:*

$$\sum_{t=0}^{\infty} \frac{1}{(1+\alpha)^t} c_t = \sum_{t=0}^{\infty} \beta^t c_t.$$

Fogalmazzuk meg az (SP) *és* (FE) *feladatokat, és mutassuk meg, hogy a $v(x) = +\infty$ megoldása mindkét feladatnak, a $v(x) = x$ pedig az* (FE) *feladatnak megoldása, de nem megoldása az* (SP)*-nek. Mutassuk meg, hogy a feladat nem elégíti ki a 1.8. tétel konvergencia feltételét.*

Megoldás: Mivel a kamatláb α, ezért a kamattényező $1+\alpha$. Jelölje z_t a t időszakban felvett kölcsönt. A t időszaki fogyasztásra

$$c_t \leq x_t + z_t.$$

Ugyanakkor a fogyasztó mindent elfogyaszt, amit csak tud, ezért a vagyona a $(t+1)$ időszakban a kamattal terhelt kölcsön visszafizetés:

$$x_{t+1} = -(1+\alpha) z_t = -\frac{1}{\beta} z_t,$$

vagyis

$$z_t = -\beta x_{t+1}$$

Az (SP) feladat tehát

$$\begin{aligned} & \sup \sum_{t=0}^{\infty} \beta^t c_t \\ 0 \quad \leq \quad & c_t \leq x_t - \beta x_{t+1} \\ & x_0 \text{ adott} \end{aligned}$$

Mivel tetszőleges kölcsön megengedett ezért a feladat megoldása $w(x_0) = \infty$. Ugyanakkor a

$$0 \leq x_t - \beta x_{t+1}$$

miatt

$$\beta x_{t+1} \leq x_t$$

tehát

$$\Gamma(x) = \left(-\infty, \beta^{-1}x\right].$$

Adott (x_t, x_{t+1}) esetén a t időszaki fogyasztás

$$F(x_t, x_{t+1}) = x_t - \beta x_{t+1}$$

Ebből következően az (FE) függvényegyenlet

$$v(x) = \sup_{y \leq \beta^{-1}x} (x - \beta y + \beta v(y)).$$

Ennek megoldása a $v(x) = \infty$, de megoldása a $v(x) = x$ is. Ugyanakkor az $x_t = \beta^{-t}x_0$ esetén

$$x_{t+1} \mathrel{\mathring{=}} \beta^{-1}x_t \in \left(-\infty, \beta^{-1}x_t\right] \mathrel{\mathring{=}} \Gamma(x_t)$$

egy lehetséges sorozat és

$$\beta^t v(x_t) = x_0$$

így a $v(x) = x$ függvény nem lesz megoldása az (SP) feladatnak.

□

1.4 Feladat. *Tegyük fel, hogy az X, Γ, F és β teljesítik a 1.2. feltételben szereplő (1),(2) feltételeket. Legyen a v egy olyan megoldása az* (FE) *feladatnak, amelyre*

$$\forall x_0 \in X \;\; \bar{x} \in \Pi(x_0) \qquad \limsup_{n\to\infty} \beta^n v(x_n) \leq 0.$$

Mutassuk meg, hogy ekkor

(*a*) *Az* (SP) *feladat megoldása nem kisebb, mint a v függvény: $v \leq w$.*

Ha pedig még minden $x_0 \in X$ pontra és $\bar{x} \in \Pi(x_0)$ úthoz

$$\exists \bar{x}' \doteq (x_0, x_1', x_2', \ldots) \qquad \lim_{n\to\infty} \beta^n v(x_n') = 0 \quad \text{és} \quad u(\bar{x}') \leq u(\bar{x})$$

feltétel is, akkor

(*b*) *A v függvény megoldása az* (SP) *feladatnak: $v = w$.*

1.5 Feladat. *Vegyük a 1.3. feladatban szereplő megtakarítási (saving) modellt azzal a módosítással, hogy nem engedjük meg az eladósodást, azaz $x_t \geq 0$. Fogalmazzuk meg az* (SP) *és* (FE) *feladatokat, és mutassuk meg a következőket.*

(*i*) *Minden $\bar{x}$ lehetséges terv kielégíti a (??) feltételt.*

(*ii*) $w(x_0) = x_0$.

(*iii*) *A feladat nem teljesíti a (1.12) feltételt, és nem igaz a 1.10. tétel állítása.*

Megoldás: A feladatban

$$c_t = x_t - \beta x_{t+1}$$

Ebből a célfüggvény

$$\sum_{t=0}^{\infty} \beta^t \left(x_t - \beta x_{t+1}\right) = \left(x_0 - \beta x_1\right) + \beta \left(x_1 - \beta x_2\right) + \dots$$

A feltételi halmaz

$$0 \leq x_{t+1} \leq \beta^{-1} x_t \leq \beta^{-2} x_{t-1} \to 0,$$

így a célfüggvény értéke éppen a teleszkópikus összegben megmaradó tag, vagyis $w\left(x_0\right) = x_0$. A $v\left(x\right) = x$ nyilván kielégíti a függvényegyenletet. Nyilván az

$$\begin{array}{l} \left(x_0, 0, 0 \dots\right) \\ \left(x_0, \beta^{-1} x_0, 0 \dots\right) \\ \left(x_0, \beta^{-1} x_0, \beta^{-2} x_0 \dots\right) \\ \vdots \end{array}$$

megoldásokra a célfüggvény értéke éppen x_0, vagyis ezek optimális megoldások. vagyis teljesen mindegy, hogy mikor kerül sor a fogyasztásra, ha az véges időpontban megtörténik, akkor az optimális megoldást adja. Vegyük most az $x_t = \beta^{-t} x_0$ megoldásorozatot. Vagyis mindig mindent újraberuházunk. ekkor a hasznosság értéke nulla, vagyis az (x_t) sorozat nem megoldása az (SP) feladatnak. Ugyanakkor mivel $F\left(x, .y\right) = x - \beta y$, ezért az

$$\beta^{-t} x_0 \overset{\circ}{=} w\left(\beta^{-t} x_0\right) = \beta^{-t} x_0 - \beta \cdot \beta^{-(t+1)} x_0 - \beta \cdot \beta^{-(t+1)} x_0$$

egyenlőség teljesül, de a sorozat nem megoldása az (SP) feladatnak, ugyanakkor

$$\beta^t v\left(x_t\right) = x_0.$$

□

1.3. Korlátos egy-lépéses hasznosság

Az előző pontban törökedtünk arra, hogy a lehető legnagyobb általánosságban mozogjunk. Most — annak az érdekében, hogy többet mondó tételeket kapjunk — több speciális feltétellel fogjuk konkretizálni az (SP) és (FE) feladatpárban szereplő változókat. Ezen megkötések között talán a legfontosabb az $F : \mathrm{graph}(\Gamma) \to \mathbb{R}$ hasznossági (one period return function) függvény korlátosságának a megkövetelése, innen ered a pont címe.

Most először egy feltétel listát vezetünk be, amelyeket fokozatosan fogunk használni. A feltételek nem minimálisak abból a szempontból, hogy a kimondott tételekhez némelykor nem feltétlenül lesznek szükségesek.

1.12 Feltétel. (Feltételek a korlátos hasznossághoz)
Az 1.1. jelelölések mellett a következő feltételeket vezetjük be:

(A1) *Az X konvex és kompakt részhalmaza az $\mathbb{R}^\ell$ térnek, és a Γ megfeleltetés nem üres, kompakt-értékű és folytonos (a zárt konvergencia topológia mellett).*

(A2) *Az F egy-lépéses-megtérülés függvény korlátos és folytonos, továbbá $0 < \beta < 1$.*

(A3) *Az $F(\cdot, y) : X \to \mathbb{R}$ függvény szigorúan monoton minden rögzített y mellett, abban az értelemben, hogy*

$$x_1 \leq x_2, \Rightarrow F(x_1, y) < F(x_2, y).$$

(A4) *A Γ függvény monoton növekedő, abban az értelemben, hogy*

$$x_1 \leqq x_2 \Rightarrow \Gamma(x_1) \subseteq \Gamma(x_2).$$

(A5) *Az F függvény szigorúan konkáv az $\mathbb{R}^\ell \times \mathbb{R}^\ell$ téren.*

(A6) *A Γ megfeleltetés konkáv, abban az értelemben, hogy*

$$\lambda\Gamma(x_1) + (1 - \lambda)\Gamma(x_2) \subseteq \Gamma(\lambda x_1 + (1 - \lambda)x_2).$$

(A7) *Az F függvény folytonosan deriválható értelmezési tartományának — a* $\mathrm{graph}(\Gamma)$ *halmaznak — a belsejében.*

Mielőtt egyetlen tételt is kimondanánk, vizsgáljuk meg az F korlátosságának és a $0 < \beta < 1$ feltételnek a következményeit. Legyen tehát $|F(x, y)| \leq \kappa$, minden szóba jöhető (x, y) mellett, és lássuk először az (SP) feladatot. Egy $(x_0, \ldots, x_n, \ldots)$ tervhez (úthoz) tartozó hasznosság egyszerűen becsülhető, mivel

$$\left| \sum_{i=0}^{n} \beta^i F(x_i, x_{i+1}) \right| \leq \kappa \cdot \sum_{i=0}^{n} \beta^i \leq \frac{\kappa}{1 - \beta}$$

miatt az összeg abszolút konvergens, és egy útra eső hasznosság legfeljebb $\beta/(1-\beta)$. Eszerint az — az előző pontban megkívánt feltétel — hogy konvergens legyen a végtelen összeg teljesül.

Nézzük most az (FE) feladatot. A 1.7. állítás szerint az (SP) feladat v értékfüggvénye megoldása az (FE) feladatnak is, és az előző paragrafus becslése szerint: $|v(x)| \leq \kappa/(1-\beta)$, minden x elemre. Másrészt az (FE) minden korlátos megoldása a $\beta < 1$ feltétel miatt optimális megoldása az (SP) feladatnak.

Az előbb mondottak szerint nem indokolatlan az (FE) függvényegyenlet *korlátos* megoldásait keresni. Vegyük észre, hogy általános feltételek mellett a v folytonossága is megkívánható. Ehhez elegendő megkövetelni, hogy a $x \mapsto \Gamma(x)$ leképezés folytonos legyen és a lehetséges optimális megoldások halmaza kompakt legyen. E két feltétel automatikusan biztosítja a v folytonosságát. Így nem meglepő, hogy az (FE) feladatnak az X halmazon értelmezett folytonos és korlátos függvények között fogjuk keresni a megoldását. Ezen függvények $C_b(X)$ összessége teljes normált tér a $\sup_{x\in X}|f(x)|$ norma mellett, ami jó lehetőséget ad a Banach-féle fixponttétel alkalmazására. A következő tétel azt mutatja, hogy a megelőző kiinduló gondolatok jó irányba mutatnak, előbb azonban vezessünk be egy újabb jelölést:

1.13 Definíció. ($C_a(X)$ tér, T operáció)
Az 1.1. jelölések mellett, legyen $C_b(X)$ az X halmazon definiált korlátos és folytonos valós függvények halmaza, ellátva az

$$||f|| = \sup_{x\in X}|f(x)|$$

normával. Vegyük a $C_b(X)$ téren a következő T leképezést:

$$T(f)(x) \doteq \sup_{y\in\Gamma(x)}[F(x,y) + \beta f(y)]. \tag{1.13}$$

1.14 Lemma. (Blackwell)
Ha egy T a korlátos függvények halmazát a korlátos függvények halmazába képező operátor monoton és tetszőleges $\alpha \geq 0$ konstans esetén egy $\beta \geq 0$ konstanssal

$$T(f+\alpha) \leq Tf + \alpha\beta$$

akkor a T kontrakció a β konstanssal. A korlátos függvények körében a normát a szuprémum norma definiálja.

Bizonyítás: A monotonitás értelemszerűen azt jelenti, hogy ha $f \leq g$, akkor $Tf \leq Tg$. Mivel az f és a Tf korlátos függvények a rendezésnek nyilván van értelme. A szuprémum norma definíciója alapján

$$f \leq g + \|f-g\|.$$

A megadott tulajdonságok miatt

$$Tf \leq T(g + \|f-g\|) \leq Tg + \beta\|f-g\|$$

Az f és a g szerepének megcserélésével

$$Tg \leq T\left(f + \|f - g\|\right) \leq Tf + \beta \|f - g\|$$

$$\|Tf - Tg\| \leq \beta \|f - g\|,$$

ami éppen a lemma állítása.

□

1.15 Állítás. (Korlátos hasznosság melletti egzisztencia tétel)
Tegyük fel, hogy az X, Γ, F és β kielégítik a 1.12. (A1) *és* (A2) *feltételeket. Ekkor a (1.13) transzformációra igazak a következők:*

(*a*) *A T definíciójában maximum írható.*

(*b*) *A T $C_b(X) \to C_b(X)$ leképezés.*

(*c*) *A T leképezés kontrakció, és így a $C_b(X)$ teljes normált térben van egyetlen v_0 fixpontja.*

(*d*) $\forall v \in C_b(X) \quad ||T^n v - v_0|| \leqq \beta^n ||v - v_0||, \quad n = 0, 1, \ldots.$

(*f*) *A* $G(x) = \{y \in \Gamma(x) : v(x) = F(x, y) + \beta v(y)\}$ *optimális policy megfeleltetés nem üres, kompakt értékű és alulról félig-folytonos leképezés.*

Eszerint — a kikötött feltételek mellett — az (FE) feladatnak egyetlen v megoldása van a $C_b(X)$ térben. Látni fogjuk, hogy az (SP) feladatban a szuprémum felvétetik, és ezért a 1.9. tétel szerint az (SP) feladat minden optimális $(x_0, x_1, \ldots, x_n, \ldots)$ megoldását a (d)-ben szereplő G optimális politika függvény generálja, azaz

$$x_0 \text{ adott}, \qquad x_{i+1} \in G(x_i), \qquad i = 0, 1, \ldots, n, \ldots,$$

azaz az x_0 pontból kiinduló optimális utak rekurziója:

$$x_0 \text{ adott}, \qquad x_{i+1} \in \Gamma(x_i) \quad \text{és} \quad v\left(x_{i+1}\right) = F\left(x_i, x_{i+1}\right) + \beta v\left(x_i\right).$$

Bizonyítás: A bizonyítások viszonylag rövidek:

(a): Az folytonos függvény felveszi a maximumát a $\Gamma(x)$ kompakt halmazon.
(b): Az F és f korlátosak, ezért a Tf függvény is korlátos. A folytonossága a maximum-tételből adódik: a $\Gamma(x)$ kompakt értékü folytonos megfeleletetés esetében az $[F(x, \cdot) + \beta v(\cdot)]$ folytonos függvény mellett a

$$x \to \max_{y \in \Gamma(x)} [F(x, \cdot) + \beta v(\cdot)]$$

függvény folytonos.

(c): A T kontrakció voltát Blackwell meglepő elégséges feltétele biztosítja. Ehhez azt kell látni, hogy a T:
1) Monoton. Ha $f \leq g$, akkor nyilvánvalóan

$$\max_{y\in\Gamma(x)}[F(x,y)+\beta f(y)] \leq \max_{y\in\Gamma(x)}[F(x,y)+\beta g(y)].$$

2) Discounting: $\exists\beta \in (0,1)$, amelyre $T(f+\alpha)(x) \leq T(f)(x)+\beta\alpha$. Ennek az ellenőrzése:

$$\begin{aligned} T(f+\alpha)(x) &= \sup_{y\in\Gamma(x)}[F(x,y)+\beta f(y)+\beta\alpha] = \\ &= \sup_{y\in\Gamma(x)}[F(x,y)+\beta f(y)]+\beta\alpha = T(f)(x)+\beta\alpha. \end{aligned}$$

Ezekután már Banach fixpont tétele adja, hogy van egyetlen $v \in C_b(X)$ fixpont, azaz

$$T(v)(x) = \sup_{y\in\Gamma(x)}[F(x,y)+\beta v(y)],$$

tehát az (FE) problémának egyetlen $v \in C_b(X)$ megoldása van.
(d): A Blackwell-féle állításban a β adódik kontrakciós tényezőnek. A Banach-tételnél közismert, hogy a v fixpont és tetszőleges v_0 kezdő pont esetében az iteráció tulajdonsága:

$$d\left(T^n(v_0),v\right) \leq \beta^n d(v_0,v), \qquad n=0,1,\dots,$$

ami éppen a (d) állítás.
(e): Ez pontosan a maximum tétel állítása az optimális megoldások $G(x)$ összességére.

□

A következő egyszerű tétel választ ad arra, hogy milyen feltételek biztosítják szigorúan monoton megoldás létezését az (FE) problémában.

1.16 Állítás. (Az (FE) szigorúan monoton növő megoldása)
Ha az 1.12.(A1)–(A4) feltételek teljesülnek, akkor az (FE) *probléma (egyetlen) megoldása szigorúan monoton.*

Bizonyítás: A 1.15. állítás bizonyításában szereplő $T : (C_b(X) \to C_b(X)$ leképezésnek a kontrakciós tétel biztosít egyetlen v fixpontot. Azt kell belátnuk, hogy a v szigorúan monoton növő. Legyen $A \subseteq C_b(X)$ a monoton növekedő, a $B \subseteq C_b(X)$ pedig a szigorúan monoton növekedő leképezések összessége. A T leképezés az A zárt halmazt a B halmazba képezi: Ha az f monoton növekedő, akkor a $T(f)$ is az. Legyen ehhez $x_1 \leq x_2$ és $x_1 \neq x_2$. Ekkor a Γ monotonitása és az f szigorú monotonitása miatt

$$\begin{aligned} T(f)(x_1) &= \max_{y\in\Gamma(x_1)}[F(x_1,y)+\beta f(y)] \leq \max_{y\in\Gamma(x_2)}[F(x_1,y)+\beta f(y) < \\ &< \max_{y\in\Gamma(x_2)}[F(x_2,y)+\beta f(y) = T(f)(x_2). \end{aligned}$$

Eszerint $T(A) \subseteq B \subseteq A$, és így az A egy x_0 pontjából kiindulva a $T^n(x_0)$ iterációk az A halmazban maradnak és így — a zártság miatt — a v fixpont is eleme az A. Az előbbi tartalmazás miatt a $v \in A$ pontot a T a B-be képezi, azaz $T(v) = v \in B$, ahogyan állítottuk.

□

A következő tétel abba az irányba halad, hogy mikor lehet biztosítani az optimális út (terv) unicitását, vagy ami ezzel ekvivalens: az optimal policy megfeleltetés értékei egyelemű halmazok (szingletonok).

1.17 Állítás. (Az (FE) megoldás szigorú konkávitása)
Tegyük fel, hogy teljesülnek az 1.12.(A1),(A2),(A5),(A6) feltételek. Ekkor az (FE) *feladat egyetlen $v \in C_b(X)$ megoldása szigorúan konkáv, a*

$$G(x) = \{y \in \Gamma(x) : v(x) = F(x, y) + \beta v(y)\}$$

optimális politika függvény pedig egyértékü (szingleton) folytonos függvény.

A G optimális politika függvény szingleton volta azt jelenti — ugyanúgy jelölve az egy elemű halmazt, mint az elemet — hogy az optimális $\bar{x}$ út egyetlen, és

$$x_0 \quad \text{adott} \quad \text{és} \quad x_{i+1} = G(x_i), \quad i = 0, 1, \ldots,$$

mivel a **??**. tétel szerint a jelen feltételek mellett minden optimális utat a G generál.

Bizonyítás: A 1.15. állítás szerint az (FE) feladatnak létezik egyetlen v folytonos és korlátos megoldása, és G az optimális politika megfeleltetés felülről félig folytonos. Továbbá az **??**. állítás alapján a feltételekből az is következik, hogy minden optimális utat a G generál.

Legyen $C_{bc}(X)$ a folytonos, korlátos és konkáv a $C_{bcs}(X)$ pedig a folytonos, korlátos és szigorúan konkáv függvények összessége. Nyilvánvalóan $C_{bcs}(X) \subseteq C_{bc}(X)$, és a $C_{bc}(X)$ zárt részhalmaza a $C_b(X)$ teljes metrikus térnek. Ha megmutatjuk, hogy

$$T(C_{bc}(X)) \subseteq C_{bcs}(X) \subseteq C_{bc}(X), \tag{1.14}$$

akkor hasonlóan mint a 1.15. állítás bizonyításában kapjuk is, hogy $v \in C_{bcs}(X)$, azaz v fixpont szigorúan konkáv. Lássuk ezekután a (1.14) tartalmazás igazolását. Legyen ehhez $f \in C_{bc}(X)$, $x_1, x_2 \in X$ tetszőleges pontok és $\alpha \in [0, 1]$. Az y_1 és y_2 pontokat válasszuk meg úgy, hogy

$$\begin{aligned} T(f)(x_1) &= \max_{y \in \Gamma(x_1)} [F(x_1, y) + \beta f(y)] = [F(x_1, y_1) + \beta f(y_1)], \quad y_1 \in \Gamma(x_1), \\ T(f)(x_2) &= \max_{y \in \Gamma(x_2)} [F(x_2, y) + \beta f(y)] = [F(x_2, y_2) + \beta f(y_2)], \quad y_2 \in \Gamma(x_2). \end{aligned}$$

Mivel a Γ konvexsége (1.12.(A6) feltétel) miatt $\alpha y_1 + (1-\alpha) y_2 \in \Gamma(\alpha x_1 + (1-\alpha) x_2)$, ezért

$$T(f)(\alpha x_1 + (1 - \alpha) x_2) =$$

$$\begin{aligned}
&= \max_{y\in\Gamma(\alpha x_1+(1-\alpha)x_2)}[F(\alpha x_1+(1-\alpha)x_2)+\beta f(y)] \geq \\
&\geq [F(\alpha x_1+(1-\alpha)x_2, \alpha y_1+(1-\alpha)y_2)+\beta f(\alpha y_1+(1-\alpha)y_2)].
\end{aligned}$$

Az 1.12.(A5) feltétel szerint az F szigorúan konkáv, az f pedig a választás miatt konkáv, ezért az előző becslés a következőképpen folytatható:

$$T(f)(\alpha x_1+(1-\alpha)x_2) >$$

$$\begin{aligned}
&> [\alpha F(x_1,y_1)+(1-\alpha)F(x_2,y_2)]+\beta[\alpha f(y_1)+(1-\alpha)f(y_2)] = \\
&= \alpha[F(x_1,y_1)+\beta f(y_1)]+(1-\alpha)[F(x_2,y_2)+\beta f(y_2)],
\end{aligned}$$

ami pedig a (**??**) és (1.14) felhasználálsával egyenlőséggel folytatható, és így végül is kapjuk:

$$T(f)(\alpha x_1+(1-\alpha)x_2) > \alpha T(f)(x_1)+(1-\alpha)T(f)(x_2),$$

tehát a $T(f)$ szigorúan konkáv, és így $T(C_{bc}(X)) \subseteq C_{bcs}(X)$.

Mivel a $\Gamma(x)$ konvex, az F pedig szigorúan konkáv, ezért a

$$T(f)(x) = \max_{y\in\Gamma(x)}[F(x,y)+\beta f(y)]$$

a maximumt egyetlen y pontban éretik el, ezért a

$$G(x) = \{y\in\Gamma(x) : v(x) = F(x,y)+\beta v(y)\}$$

egyértékű függvény. A folytonossága onnan ered, hogy a G, mint halmazértékű függvény felülről félig folytonos.

□

A következő tételben azt látjuk be, hogy a 1.17. tétel feltételei mellett a T leképezésnek nemcsak a $T^n(v_0)$ iteráltjai tartanak a v megoldáshoz, hanem a policy függvény is.

1.18 Lemma.
Legyen $X \subseteq \mathbb{R}^l$ és $Y \subseteq \mathbb{R}^n$. Tegyük fel, hogy a $\Gamma : X \to Y$ halmazértékű leképezés nem üres, konvex és kompakt értékkészletű, valamint folytonos. Tegyük fel, hogy a graph (Γ) *halmazon értelmezett f függvény folytonos és minden x-re az $y \mapsto f(x,y)$ függvény szigorúan konkáv. Legyen*

$$g(x) \triangleq \operatorname{argmax}_{y\in\Gamma(x)} f(x,y)$$

az optimum függvény. Tetszőleges $\varepsilon > 0$ és $x \in X$ esetén létezik olyan $\delta_x > 0$, hogy

$$\|g(x)-y\| < \varepsilon$$

valahányszor

$$y \in \Gamma(x) \quad \text{\textit{és}} \quad |f(x,g(x))-f(x,y)| < \delta_x.$$

Ha az X kompakt, akkor a δ választható univerzálisnak.

Bizonyítás: Vegyük észre, hogy a megadott feltételek esetén a g létezik, folytonos és valóban függvény.

Tegyük fel, hogy az X kompakt. Megmutatjuk, hogy ekkor a $\mathrm{graph}(\Gamma)$ is kompakt. Az állítás bizonyos szempontból a Weierstrass-tétel általánosítása, vagyis elegendő belátni, hogy a

$$\mathrm{range}(\Gamma) = \cup_x \Gamma(x)$$

korlátos, ugyanis a folytonosságból következő felülről félig folytonosság miatt $\mathrm{graph}(\Gamma)$ az $X \times \mathrm{cl}(\mathrm{range}(\Gamma))$ kompakt halmaz zárt része. A könyv a felülről félig folytonosságot úgy definiálja, hogy minden $x_n \to x$ és $y_n \in \Gamma(x_n)$ esetén, van az (y_n) sorozatnak konvergens részsorozata, amely határértéke eleme a $\Gamma(x)$ halmaznak. Ebből következően ha a $\mathrm{range}(\Gamma)$ nem lenne korlátos, akkor lenne (x_n, y_n) sorozat, amelyre $\|y_n\| \geq n$ és $y_n \in \Gamma(x_n)$. Mivel az X kompakt, ezért feltehető, hogy az (x_n) konvergens, amely ellentmond a felülről félig folytonosság definíciójának.

Tetszőleges $\varepsilon > 0$ esetén definiáljuk az

$$A_\varepsilon \doteq \{(x, y) \in \mathrm{graph}(\Gamma) : \|g(x) - y\| \geq \varepsilon\}$$

halmazokat. Ha $A_\varepsilon = \emptyset$ minden $\varepsilon > 0$ esetén, akkor a Γ egy értékű leképezés és az állítás triviálisan teljesül. Ellenkező esetben az $A_\varepsilon \neq \emptyset$ egy bizonyos ε_0-tól kezdődően. Ha most $0 < \varepsilon < \varepsilon_0$, akkor legyen

$$\delta \doteq \min_{(x,y)\in A_\varepsilon} |f(x, g(x)) - f(x, y)|.$$

A g a Γ folytossága miatt felülről félig folytonos halmazértékű leképezés. Mivel kompakt halmazon van értelmezve és mivel egy értékű, ezért a g egy valójában egy folytonos függvény. Az A_ε a g folytonossága miatt szintén kompakt és ugyancsak a g folytonossága miatt a minimum, vagyis δ eléretik. Így $\delta > 0$, ugyanis $g(x)$ az egyetlen minimum és $(x, g(x)) \notin A_\varepsilon$. Ezért ha

$$y \in \Gamma(x) \qquad \text{és} \qquad \|g(x) - y\| \geq \varepsilon$$

vagyis ha $(x, y) \in A_\varepsilon$ akkor

$$|f(x, g(x)) - f(x, y)| \geq \delta.$$

Tehát ha a komplementer állításra áttérve fogalmazzuk, akkor

$$\|g(x) - y\| < \varepsilon$$

mindannyiszor, ha

$$|f(x, g(x)) - f(x, y)| < \delta,$$

ami éppen a bizonyítandó állítás. Ha az X nem kompakt, akkor a gondolatmenet minden x pontra külön alkalmazható. Ekkor felhasználhatjuk, hogy az X lokálisan kompakt, vagyis minden x-nek van kompakt környezete és az állítást erre a környezetre leszűkítve tekitjük.

$\square$

1.19 Állítás. (A policy függvény konvergenciája)
Tegyük fel, hogy teljesülnek az 1.12.(A1),(A2),(A5),(A6) feltételek, és legyen a v az (FE) *feladatnak, az 1.17. tétel szerint létező, egyetlen $v \in C_b(X)$, szigorúan konkáv megoldása. Ha a v_0 folytonos, korlátos és konkáv függvény, azaz $v_0 \in C_{bc}(X)$, és*

$$\begin{aligned} v_{n+1} &= Tv_n, \quad n = 1, 2, \ldots, \\ g_n(x) &= \operatorname{argmax}_{y \in \Gamma(x)}[F(x, y) + \beta v_n(y)], \quad n = 0, 1, 2, \ldots, \end{aligned}$$

akkor

$$\lim_{n \to \infty} g_n = g \quad \textit{pontonként}$$

és a limesz egyenletes, ha az X halmaz kompakt.

Bizonyítás: A bizonyítás szorosan összefügg a 1.17. tétel igazolásával, és használjuk az ott bevezetett jelöléseket. Az említett tétel bizonyításának a magja az $T(C_{bc}(X)) \subseteq C_{bcs}(X)$ tartalmazás belátása volt. A jelen tételben szereplő $v_0 \in C_{bcs}(X)$ feltevés miatt, az előző tartalmazás miatt

$$v_{n+1} = Tv_n \in C_{bcs}(X), \quad n = 1, 2, \ldots.$$

Vegyük a következő f_n függvényeket:

$$\begin{aligned} f_n(x, y) &\doteq F(x, y) + \beta v_n(y), \quad n = 1, 2, \ldots, \\ f(x, y) &\doteq F(x, y) + \beta v(y). \end{aligned}$$

Vegyük észre, hogy mivel g maximalizálja a második egyenletet

$$\begin{aligned} 0 &\le f(x, g(x)) - f(x, g_n(x)) \le \\ &\le f(x, g(x)) - f_n(x, g(x)) + f_n(x, g(x)) - f(x, g_n(x)) \le \\ &\le 2\|f - f_n\| \end{aligned}$$

Mivel $f_n \to f$ egyenletesen, ezért tetszőleges $\delta > 0$ esetén van olyan $M_\delta \ge 1$, hogy

$$0 \le f(x, g(x)) - f(x, g_n(x)) \le 2\|f - f_n\| < \delta$$

minden x-re és minden $n \ge M_\delta$ esetén. A $g_n(x) \to g(x)$ konvergencia igazolásához meg kell mutatni, hogy minden $\varepsilon > 0$ számhoz van olyan N_ε, hogy

$$|g(x) - g_n(x)| < \varepsilon, \quad \text{ha} \quad n \ge N_\varepsilon.$$

Az előző lemma alapján elegendő belátni, hogy minden $\delta_x > 0$ és $x \in X$ esetén van olyan $N_x \ge 1$, hogy

$$|f(x, g(x)) - f(x, g_n(x))| < \delta_x \quad \text{ha} \quad n \ge N_\varepsilon.$$

Ez azonban az elmondottak miatt teljesül. Ha az X kompakt, akkor az előző lemma alapján az imént kimondott feltétel egyenletesen teljesül.

□

A következő tétel arra ad választ, hogy milyen elégséges feltételt tudunk mondani arra, amikor az értékfüggvény deriválható.

1.20 Állítás. (Az értékfüggvény deriválhatósága)
Tegyük fel, hogy teljesülnek az (A1), (A4) és (A5)–(A7) feltételeket. Ha v illetve g az egyértelműen létező értékfüggvény illetve optimális policy függvény és

$$x_0 \in \mathrm{int}(X), \quad g(x_0) \in \mathrm{int}(\Gamma(x_0)),$$

akkor

$$\frac{d}{dx} v(x)_{|x=x_0} = \frac{d}{dx} F\left(x, g(x_0)\right)_{|x=x_0}. \tag{1.15}$$

A (1.15) részleteiben azt jelenti, hogy

$$\frac{\partial}{\partial \xi_i} v(x)_{|x=x_0} = \frac{\partial}{\partial \xi_i} F\left(x, g(x_0)\right)_{|x=x_0}, \quad i = 1, 2, \ldots, l.$$

Bizonyítás: A bizonyításban felhasználjuk a következő lemmát.

1.21 Lemma. (Feltétel konvex függvény deriválhatóságához)
Legyen az $X \subseteq R^n$ egy konvex halmaz, $x_0 \in \mathrm{int}(X)$ és az $f : X \to \mathbb{R}$ és $h : X \to \mathbb{R}$ legyenek konvex függvények, amelyekre

(*i*) $f(x_0) = h(x_0)$.

(*ii*) $f(x) \geq h(x)$, *ha az x eleme az x_0 egy U környezetének.*

(*iii*) *Tegyük fel, hogy az f deriválható az x_0 pontban.*

Ekkor a h függvény is deriválható az x_0 pontban.

Bizonyítás: Mivel a függvények konvexek, Az x_0 belső pontban mind az f, mind a h szubderiválható. Definíció szerint egy $b \in R^n$ pontosan akkor eleme a h függvény $\partial h(x_0)$ szubderváltjának, ha

$$\forall x \in U, \quad h(x) - h(x_0) \geq \langle b, x - x_0 \rangle.$$

Ebből az (i) és (ii) feltételek alapján:

$$\forall x \in U, \quad f(x) - f(x_0) \geq h(x) - h(x_0) \geq \langle b, x - x_0 \rangle,$$

és emiatt $b \in \partial f(x_0)$. De az f a lemma feltételeo miatt deriválható és így a közismert tétel szerint: $b = f'(x_0)$, tehát a $\partial h(x_0)$ is egyetlen pontból áll, ami a h deriváltja: $h'(x_0) = f'(x_0)$.

□

Most pedig lássuk a jelenlegi tétel igazolását, amiben a lemmát konvex helyett konkáv függvényekre alkalmazzuk, megfelelően változtatva az egyenlőtlenség irányát. Vegyük a következő konkáv függvényeket

$$f(x) \triangleq F\left(x, g(x_0)\right) + \beta v\left(g(x_0)\right),$$

$$v(x) = \max_{y \in \Gamma(x)} \left[F(x,y) + \beta v(y) \right].$$

Az f és v teljesítik a lemma feltételeit az x_0 pont egy környezetében, hiszen $f(x_0) = v(x_0)$, mivel a g az optimális policy függvény, az

$$\begin{aligned} f(x) &\overset{\circ}{=} F\left(x, g(x_0)\right) + \beta v\left(g(x_0)\right) \le \\ &\le \max_{y \in \Gamma(x)} \left[F(x,y) + \beta v(y) \right] = v(x) \end{aligned}$$

egyenlőtlenség pedig fennáll az $x_0 \in \Gamma(x_0)$ egy környezetében.

Ennek indoka a következő: Megmutatjuk, hogy van olyan környezete az x_0-nak, amelyre $g(x_0) \in \Gamma(x)$ a környezet minden x pontjára. Ehhez elegendő belátni, hogy az $(x_0, g(x_0))$ köré rajzolható egy olyan téglatest, amely része a gráfnak. Mivel véges dimenziós térben minden norma ekvivalens, ezért elegendő belátni, hogy az $(x_0, g(x_0))$ pár nem csak eleme, hanem belső pontja is a $\operatorname{graph}(\Gamma)$ halmaznak. Ha nem így lenne, akkor az $(x_0, g(x_0))$ pont a gráf határpontja lenne. Az (A6) feltétel szerint a Γ konvex, így a $\operatorname{graph}(\Gamma)$ halmaz konvex[2] és ezért az $(x_0, g(x_0))$ pontban lenne egy (p_1, p_2) támaszsíkja:

$$p_1 x + p_2 y \le p_1 x_0 + p_2 g(x_0), \quad (x,y) \in \operatorname{graph}(\Gamma).$$

De a feltétel szerint $x_0 \in \operatorname{int}(X)$ és $g(x_0) \in \operatorname{int}(g(x_0))$, ezért az egyenlőtlenség csak akkor teljesülhet, ha $p_1 = 0$ és $p_2 = 0$, ami lehetelen.

Az (A7) feltétel szerint az f deriválható[3] az x_0 pontban, és így a fenti lemma szerint a v függvény is deriválható, és deriváltja megegyezik az f deriváltjával. A f függvényt deriválva kapjuk a (1.15) formulát.

□

1.3.1. Feladatok, gyakorlatok

1.6 Feladat. *Tegyük fel, hogy az X halmaz konvex. Ekkor fennállnak a következő állítások:*

(*i*) *Ha Γ konvex, azaz kielégíti a 1.12.(A6) feltételt, akkor a $\Gamma(x)$ halmaz minden x-re konvex.*

(*ii*) *A Γ pontosan akkor elégíti ki a 1.12.(A6) feltételt, ha a gráfja konvex.*

Megoldás: Ha $y_1, y_2 \in \Gamma(x)$ és $\lambda \in (0,1)$, akkor a Γ konvexitása miatt

$$\lambda \Gamma(x) + (1-\gamma)\Gamma(x) \subseteq \Gamma(\lambda x + (1-\gamma)x) = \Gamma(x),$$

[2] V.ö.: 1.6. feladat.

[3] A bizonyításból látszik, hogy az F függvénynek csak az első argumentumában való deriválhatósága szükséges.

ami a $\Gamma(x)$ konvexségét jelenti.

Lássuk először azt, hogy a Γ konvexsége implikálja gráfjának a konvexségét. Legyen ehhez $(x_1, y_1), (x_2, y_2) \in \mathrm{graph}(\Gamma)$ és $\lambda \in (0,1)$, azaz $y_1 \in \Gamma(x_1)$ és $y_2 \in \Gamma(x_2)$. Ebből kiindulva, a Γ konvexsége miatt:

$$\lambda y_1 + (1-\lambda)y_2 \in \lambda\Gamma(x_1) + (1-\lambda)\Gamma(x_2) \subseteq \Gamma\left(\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2\right),$$

és így

$$\lambda(x_1, y_1) + (1-\lambda)(x_2, y_2) = (\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2, \lambda y_1 + (1-\lambda)y_1) \in \mathrm{graph}(\Gamma),$$

tehát a gráf konvex.

Tegyük fel most, hogy a gráf konvex, és legyen $y_1 \in \Gamma(x_1)$ és $y_2 \in \Gamma(x_2)$. Eszerint az (x_1, y_1) és (x_2, y_2) elemei a gráfnak, és így a konvex burkuk is eleme:

$$\alpha(x_1, y_1) + (1-\alpha)(x_2, y_2) = (\alpha x_1 + (1-\alpha)x_2, \alpha y_1 + (1-\alpha)y_1) \in \mathrm{graph}(\Gamma),$$

ami azt jelenti, hogy $\alpha y_1 + (1-\alpha)y_1 \in \Gamma\alpha x_1 + (1-\alpha)x_2)$, tehát a Γ konvex.

□

1.7 Feladat. *Mutassuk meg, hogy konvex kúpon definiált homogén és kvázikonkáv függvény konkáv.*

Megoldás: Legyen a függvény $f : C \to \mathbb{R}$, $x_1, x_2 \in C$ és $\alpha \in [0,1]$. Tegyük fel, hogy $f(x_1)$ és $f(x_2)$ pozitív. Vegyük a következő átalakítást

$$f(\alpha x_1 + (1-\alpha)x_2) = f\left(\frac{\alpha}{f(x_2)}(f(x_2)x_1) + \frac{1-\alpha}{f(x_1)}(f(x_1)x_2)\right).$$

A pozitív homogenitás miatt ezt a következőképpen alakíthatjuk tovább

$$\left(\frac{\alpha}{f(x_2)} + \frac{1-\alpha}{f(x_1)}\right) \cdot f\left(\frac{\alpha/f(x_2)}{\alpha/f(x_2) + (1-\alpha)/f(x_1)}(f(x_2)x_1) + \right.$$
$$\left. + \frac{(1-\alpha)/f(x_1)}{\alpha/f(x_2) + (1-\alpha)/f(x_1)}(f(x_1)x_2)\right).$$

Az f kvázikonkávitása miatt a második tényező kisebb-egyenlő, mint

$$\min\{f(f(x_2)x_1), f(f(x_1)x_2),$$

ezért kapjuk, hogy

$$\begin{aligned}
f(\alpha x_1 + (1-\alpha)x_2) &\geqq \left(\frac{\alpha}{f(x_2)} + \frac{1-\alpha}{f(x_1)}\right)\min\{f(f(x_2)x_1), f(f(x_1)x_2)\} = \\
&= \left(\frac{\alpha}{f(x_2)} + \frac{1-\alpha}{f(x_1)}\right)\min\{f(x_2)f(x_1), f(x_1)f(x_2)\} = \\
&= \left(\frac{\alpha}{f(x_2)} + \frac{1-\alpha}{f(x_1)}\right)f(x_1)f(x_2) = \\
&= \alpha f(x_1) + (1-\alpha)f(x_2).
\end{aligned}$$

És ezzel beláttuk az állítást pozitív függvényértékek mellett. Hasonlóan belátható—az f helyett a $-f$ függvényt véve—hogy a $-f$ függvény konvex, és így az f konkáv. Nem látom most, hogy mi a helyzet, ha $f(x_1)f(x_2) \leqq 0$.

$\square$

Tárgymutató

$\bar{x}$, 4
$\bar{x}_i$, 4
(FE), 5
(SP), 5
(SP) megoldása, 12
állapotváltozó, 4
út
    lehetséges, 4

amortizációs faktor, 4

Bellman-egyenlet, 5, 6

diszkontálási tényező, 4
diszkontált megtérülés, 4

egy lépéses megtérülés, 4

feladat
    függvényegyenlet, 5
    szuprémum, 5
funkcionál-egyenlet probléma, 5

hasznosság, 4

indukciós lemma, 6

lehetséges
    út, 4
    terv, 4
lehetséges út, 4
lehetséges terv, 4

megtérülés, 4
    diszkontált, 4
    egy lépéses, 4

one period return, 4

plan, 4

szuprémum feladat, 5
szuprémum probléma, 5

terv
    lehetséges, 4