Amerikai opciók diszkrét időhorizonton

Az árazási formula

Az amerikai származtatott termékek olyan termékek, amelyek tetszőleges időpontban lehívhatóak. Mivel az alapfeltevés az, hogy a jövő nem látható előre, a lehívás tetszőleges megállási idő mentén történhet. Legyen tehát adott egy $H = (H_n)$ folyamat. A folyamat tulajdonosának joga van egy τ megállási idő kiválasztásához, és az ω kimenetel esetén a $H_{\tau(\omega)}(\omega)$ értéket „lekaszálni". Az európai származtatott termékek esetén csak a $\tau = T$ megengedett, ahol $T < \infty$ a származtatott termék lejárati ideje. Feltesszük, hogy a H valamilyen értelemben a (B, S) alapfolyamatokhoz kötött, vagyis felteszük, hogy a H adaptált az előre rögzített $(\mathcal{F}_n)$ filtrációra nézve. Feltesszük továbbá, hogy az S által definiált piac teljes, valamint, hogy a piacon nincsen arbitrázs. Fetesszük tehát, hogy az $(\Omega, \mathcal{A})$ mérhető struktúrán van, mégpedig egyetlen $\mathbf{Q}$ martingál mérték, amelyre nézve az $\overline{S}$ diszkontált árfolyam martingál. A kérdés a következő:

Mennyi a H ára?

Az alapfeltétel, hogy a H származtatott terméket eladó személy a H lehívásának időpontjában fedezett állapotban akar lenni. Ehhez az szükséges, hogy a származtatott termék x árából egy olyan önfinanszírozó portfoliót tudjon építeni, amely $V(x)$ értékfolyamatára tetszőleges τ megállási idő esetén $V_\tau(x) \geq H_\tau$ legyen. Természetesen ehhez szükséges és elegendő, ha minden $0 \leq n \leq T$ időpontra $V_n(x) \geq H_n$.

0.1 Definíció.
Valamely x kezdőértékből kiinduló önfinanszírozó stratégia szuperreplikálja a H származtatott terméket, ha a $V(x)$ értékfolyamatra minden n időpontra $V_n(x) \geq H_n$.

Természetesen a vevő sem akar az üzleten veszíteni, ezért csak akkor hajlandó az x áron az üzletbe belemenni, ha van olyan τ megállási idő, amelyre

$$H_\tau = V_\tau.$$

Ugyanis ha ez nem teljesülne, akkor a szuperreplikáló tulajdonság miatt az eladó szisztematikusan keresne rajta, így ő is inkább eladná mint megvenné a H származtatott terméket. Másképpen fogalmazva, ha van olyan x, amelyhez tartozik szuperreplikáló portfolió és τ megállási idő, amelyre a $H_\tau = V_\tau$ egyenlőség teljesül, akkor x éppen a H származtatott termék ára. Megint másképpen fogalmazva, ha $\pi(H) > x$, akkor a származtatott termék drága, így eladva és az x-ből felépítve a szuperreplikáló portfoliót biztos nyereséghez jutunk. Ha pedig $x > \pi(H)$, akkor a szuperreplikáló portfoliót eladva és a származtatott terméket megvéve és a τ időpontban lehívva biztos nyereséghez juthatunk.

Az amerikai opciók árazási problémájának megoldásához két kérdést kell tisztázni:

Létezik-e a megadott tulajdonságú (τ, x) és hogyan számolható ki a (τ, x) pár a modellben szereplő paraméterekből?

Emlékeztetünk, hogy ha a V önfinanszírozó, akkor a $\overline{V}$ diszkontált értékfolyamat martingál. Ilyenkor a megállási opciókról szóló tétel miatt minden $0 \leq \tau \leq T$ megállási időre

$$x = V_0(x) = \overline{V}_0(x) = \mathbf{E}^{\mathbf{Q}}\left(\overline{V}_\tau(x)\right) = \mathbf{E}^{\mathbf{Q}}\left(\frac{V_\tau(x)}{S^0_\tau}\right) \geq \mathbf{E}^{\mathbf{Q}}\left(\frac{H_\tau}{S^0_\tau}\right). \tag{1}$$

Vagyis

$$x = V_0(x) \geq \sup_\tau \mathbf{E}^{\mathbf{Q}}\left(\frac{H_\tau}{S^0_\tau}\right).$$

Ha alkalmasan választott τ esetén egyenlőség van, akkor a H ára

$$\pi(H) = x = V_0(x) = \sup_{\tau} \mathbf{E}^{\mathbf{Q}}\left(\frac{H_\tau}{S_\tau^0}\right) = \max_{\tau} \mathbf{E}^{\mathbf{Q}}\left(\frac{H_\tau}{S_\tau^0}\right) = \mathbf{E}^{\mathbf{Q}}\left(\frac{H_{\tau^*}}{S_{\tau^*}^0}\right),$$

A kérdés tehát a következő:

Miként számolható ki a

$$\sup_{\tau} \mathbf{E}^{\mathbf{Q}}\left(\frac{H_\tau}{S_\tau^0}\right)$$

kifejezés és miként határozható meg a τ, ahol a szuprémum felvevődik?

0.2 Példa.
Amerikai call opció.

Legyen H amerikai call opció. Ilyenkor

$$H_n = (S_n - K)^+ .$$

A diszkontált kifizetés

$$\overline{H}_n = \left(\frac{S_n}{S_n^0} - \frac{K}{S_n^0}\right)^+ .$$

Az $\overline{S}$ a $\mathbf{Q}$ alatt martingál. Ha feltesszük, hogy az $1/S_0$ diszkonttényező csökken, akkor a

$$-\frac{K}{S_n^0}$$

kifejezés várható értéke nő, vagyis az

$$\frac{S_n}{S_n^0} - \frac{K}{S_n^0}$$

szintén növeli a várható értéket, vagyis szubmartingál. Szubmartingálok konvex és monoton növekedő függvénye szintén szubmartingál. A szubmartingálokra vonatkozó megállási opciókról szóló tétel miatt tetszőleges τ megállási idő esetén

$$\mathbf{E}^{\mathbf{Q}}\left(\frac{H_\tau}{S_\tau^0}\right) \leq \mathbf{E}^{\mathbf{Q}}\left(\frac{H_T}{S_T^0}\right).$$

Így az elmondottak miatt a call opció ára

$$\pi(H) = \mathbf{E}^{\mathbf{Q}}\left(\frac{H_T}{S_T^0}\right)$$

amely azonos az európai opció árával. A put opciók esetén

$$H_n = (K - S_n)^+ .$$

A

$$\frac{K}{S_n^0} - \frac{S_n}{S_n^0}$$

kifejezés azonban szupermartingál. Szupermartingálok monoton növő konkáv és nem konvex függvénye lesz szupermartingál, így a bemutatott gondolatmenet a put opció esetén nem alkalmazható.

□

Snell-féle burkoló

Az árazás megoldásához szükséges optimalizációs feladatot szokás az optimális megállítás problémájának mondani. Az amerikai opciók árazási feladatának megoldása céljából először ezt a matematikai problémát kell megvizsgálnunk. A különböző integrálok és feltételes várható értékek létezésének biztosítása céljából az egyszerűség kedvért tegyük fel, hogy $H \geq 0$. Legyen tehát $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$ tetszőleges valószínűségi mező és legyen H tetszőleges adaptált folyamat. Hogyan számolható ki a

$$\sup_{\tau} \mathbf{E}(H_\tau)? \tag{2}$$

A keresett értéket visszafelé való indukcióval tudjuk kiszámolni. Jelöljet Δ_n a $n \leq \tau \leq T$ egyenlőtlenséget kielégítő megállási idők halmazát. Speciálisan Δ_0 az összes megállási idők halmaza. Legyen

$$X_n \mathrel{\hat{=}} \sup_{\tau \in \Delta_n} \mathbf{E}(H_\tau \mid \mathcal{F}_n).$$

Ha feltesszük, hogy $\mathcal{F}_0 = \{\emptyset, \Omega\}$, akkor X_0 egy konstans és az értéke éppen (2). Vegyük azonban észre, hogy ha az $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$ fölött értelmezett megállási idők halmaza nem megszámlálható, akkor a szuprémum mögötti kifejezés nem lesz feltétlenül $\mathcal{F}_n$-mérhető. Ilyenkor sup helyett lényeges szuprémumot kell írni. Ha persze feltesszük, hogy a valószínűségi mező végesen generált, akkor a Δ_n szintén véges, így ilyenkor nem lépnek fel mérhetőségi problémák. Vegyük ugyanakkor azt is észre, hogy mivel a feltételes várható érték csak nulla valószínűségű halmazok erejéig értelmes a szuprémum használata elvileg is problémás, ugyanis nem világos, hogy melyik verzióját kell a feltételes várható értéknek venni.

Foglalkozzunk tehát röviden a lényeges szuprémum fogalmával.

0.3 Definíció.
Legyen A $\mathcal{F}$-mérhető valós értékű függvények egy halmaza. Az $\mathcal{F}$-mérhető g függvény az A halmaz lényeges szuprémuma, ha

1. *$f \overset{m.m.}{\leq} g$, minden $f \in A$ esetén, vagyis a g az A minden elemét majdnem mindenhol értelemben dominálja, és*
2. *a g a legkisebb ilyen függvény, vagyis ha a h egy olyan függvény amely az A minden elemét majdnem mindenhol dominálja, akkor $g \overset{m.m..}{\leq} h$.*

1 Definition Amennyiben hangsúlyozni akarjuk hogy lényeges szuprémumról van szó, akkor a lényeges szuprémumot az $\operatorname{ess\,sup}$ módon fogjuk jelölni.

Hangsúlyozni kell, hogy a lényeges szuprémum $\mathcal{F}$-mérhető. Ha $\mathcal{F} = \{\emptyset, \Omega\}$, akkor a sup és az $\operatorname{ess\,sup}$ azonoak. Ugyancsak hangsúlyozni kell, hogy az $\operatorname{ess\,sup}$ egy kiterjesztett valós szám értékű függvény, vagyis felveheti a $+\infty$ értéket is.

0.4 Állítás.
Tetszőleges A valós értékű mérhető függvények esetén létezik a $g \mathrel{\hat{=}} \operatorname{ess\,sup} A$ függvény. Létezik olyan $(f_n) \subseteq A$ sorozat, amelyre

$$\sup_n f_n \overset{m.m..}{=} g.$$

Ha az A halmaz háló, vagyis $a, b \in A$ esetén $\max(a, b) \in A$, akkor az $(f_n) \subseteq A$ sorozat választható olymódon, hogy $f_n \overset{m.m.}{\nearrow} g$.

Bizonyítás: Az $\overline{\mathbb{R}}$ rendezési struktúrája ekvivalens a $[0, 1]$ rendezésével[1], így feltehető, hogy az A halmaz $[0, 1]$ értékű függvényekből áll, vagyis feltehető, hogy az A elemei integrálhatóak.

[1] Az $\overline{\mathbb{R}}$ rendezett halmazban minden nem üres halmaz rendelkezik szuprémummal, a szuprémum legfeljebb $+\infty$.

Legyen $\mathcal{N}$ az A összes megszámlálható részhalmazából álló halmaz. Ha $N \in \mathcal{N}$, akkor az N megszámlálható, így az $f_N \stackrel{\circ}{=} \sup_{n \in N} f_n$ függvény mérhető. Tekintsük a

$$1 \geq \alpha \stackrel{\circ}{=} \sup_{N \in \mathcal{N}} \mathbf{E}(f_N)$$

számot. Az α szuprémum eléretik, ugyanis ha $N_m \in \mathcal{N}$ egy olyan sorozat, amelyre $\mathbf{E}(f_{N_m}) \nearrow \alpha$, akkor $N \stackrel{\circ}{=} \cup_m N_m \in \mathcal{N}$, és $\mathbf{E}(f_N) = \alpha$, ugyanis

$$\alpha \geq \mathbf{E}(f_N) \geq \mathbf{E}(f_{N_m}) \to \alpha.$$

Nyilván

$$g \stackrel{\circ}{=} f_N = \sup_{n \in N} f_n$$

mérhető. Megmutatjuk, a g egy jó választás az $\operatorname{ess\,sup}$ függvényre. Ha $f \in A$, akkor a $B \stackrel{\circ}{=} (f_n)_{n \in N} \cup f$ egy megszámlálható család és

$$f_B \geq f, \quad f_B \geq f_N,$$

miközben

$$\alpha \geq \mathbf{E}(f_B) \geq \mathbf{E}(f_N) = \alpha,$$

amiből $0 \leq \mathbf{E}(f_B) = \mathbf{E}(f_N) \leq 1 < \infty$, így

$$g \stackrel{\circ}{=} f_N \stackrel{m.m}{=} f_B \geq f.$$

Hasonló érvelés alapján ha $h \geq A$, akkor $h \stackrel{m.m.}{=} g$. Ha az A háló, akkor tekinthetjük a $h_n = \max_{k \leq n} f_k \in A$ növekedő sorozatot, és nyilvánvalóan $h_n \nearrow \sup_k f_k \stackrel{m.m..}{=} g$.

□

0.5 Definíció.
Az

$$X_n \stackrel{\circ}{=} \operatorname*{ess\,sup}_{\tau \in \Delta_n} \mathbf{E}(H_\tau \mid \mathcal{F}_n).$$

sorozatot a H Snell-burkolójának szokás mondani.

Hangsúlyozzuk, hogy az új definíció nem módosítja az X_0 értékét, amely egy valós szám.

0.6 Állítás.
A Snell-burkoló elemei kiszámolhatóak a következő hátrafelé haladó indukcióval:

$$\begin{aligned} X_T &= H_T \\ X_n &= \max(H_n, \mathbf{E}(X_{n+1} \mid \mathcal{F}_n)). \end{aligned}$$

Bizonyítás: Jelölje $\widehat{X}_n$ az állításban szereplő, hátrafelé haladó indukciós eljárás eredményét. Az $X_T = H_T = \widehat{X}_T$ egyenlőség nyilvánvaló, ugyanis $\Delta_T = \{T\}$ és a H adaptált, így a H_T nyilván $\mathcal{F}_T$-mérhető. Az n konstans megállási idő, $n \in \Delta_n$, a H adaptált, így nyilván

$$X_n \stackrel{m.m.}{\geq} \mathbf{E}(H_n \mid \mathcal{F}_n) \stackrel{m.m.}{=} H_n.$$

Megjegyezzük, hogy a lényeges szuprémum mögött álló

$$\mathcal{G} \stackrel{\circ}{=} \{\mathbf{E}(H_\tau \mid \mathcal{F}_n) : \tau \in \Delta_n\}$$

halmaz háló, vagyis ha $H_{\tau_1}, H_{\tau_2} \in \mathcal{G}$, akkor a $\max(H_{\tau_1}, H_{\tau_2}) \in \mathcal{G}$ is teljesül. Legyen

$$B \stackrel{\circ}{=} \{\mathbf{E}(H_{\tau_1} \mid \mathcal{F}_n) < \mathbf{E}(H_{\tau_2} \mid \mathcal{F}_n)\} \in \mathcal{F}_n,$$

és
$$\tau \mathrel{\hat{=}} \chi_{B^c}\tau_1 + \chi_B\tau_2.$$
Egyrészt $\tau \geq n$, másrészt, ha $t \geq n$, akkor
$$\{\tau \leq t\} = (\{\tau_1 \leq t\} \cap B^c) \cup (\{\tau_2 \leq t\} \cap B) \in \mathcal{F}_t,$$
így $\tau \in \Delta_n$. Ugyanakkor
$$\begin{aligned}
\mathbf{E}(H_\tau \mid \mathcal{F}_n) &= \mathbf{E}(\chi_{B^c}H_{\tau_1} + \chi_B H_{\tau_2} \mid \mathcal{F}_n) = \\
&= \chi_{B^c}\mathbf{E}(H_{\tau_1} \mid \mathcal{F}_n) + \chi_B\mathbf{E}(H_{\tau_2} \mid \mathcal{F}_n) = \\
&= \max(\mathbf{E}(H_{\tau_1} \mid \mathcal{F}_n), \mathbf{E}(H_{\tau_2} \mid \mathcal{F}_n)).
\end{aligned}$$
A lényeges szuprémum alaptulajdonsága miatt van olyan megállási időkből álló sorozat, hogy $\tau_k \in \Delta_{n+1}$, és
$$\mathbf{E}(H_{\tau_k} \mid \mathcal{F}_{n+1}) \overset{m.m.}{\nearrow} X_{n+1}.$$
Az $\mathcal{F}_n$ szerint feltételes várható értéket véve és felhasználva, hogy $\mathcal{F}_n \subseteq \mathcal{F}_{n+1}$ valamint hogy $\Delta_{n+1} \subseteq \Delta_n$, a feltételes várható értékekre vonatkozó monoton konvergencia tétel szerint
$$\begin{aligned}
\mathbf{E}(X_{n+1} \mid \mathcal{F}_n) &= \mathbf{E}\left(\lim_k \mathbf{E}(H_{\tau_k} \mid \mathcal{F}_{n+1}) \mid \mathcal{F}_n\right) = \\
&= \lim_k \mathbf{E}(\mathbf{E}(H_{\tau_k} \mid \mathcal{F}_{n+1}) \mid \mathcal{F}_n) = \\
&= \lim_k \mathbf{E}(H_{\tau_k} \mid \mathcal{F}_n) \leq X_n,
\end{aligned}$$
Ebből következően
$$X_n \overset{m.m.}{\geq} \max(H_n, \mathbf{E}(X_{n+1} \mid \mathcal{F}_n)) \mathrel{\hat{=}} \widehat{X}_n.$$
Most térjünk rá a másik irány igazolására. Tetszőleges $\tau \in \Delta_n$ esetén
$$H_\tau = H_n\chi_{\{\tau=n\}} + H_{\tau\vee(n+1)}\chi_{\{\tau>n\}},$$
ahol $\tau \vee (n+1) \mathrel{\hat{=}} \max(n+1, \tau)$. Fontos hangsúlyozni, hogy $\tau \vee (n+1) \in \Delta_{n+1}$, így az X_{n+1} definíciója szerint
$$\mathbf{E}\left(H_{\tau\vee(n+1)} \mid \mathcal{F}_{n+1}\right) \overset{m.m.}{\leq} X_{n+1}.$$
A két oldalon feltételes várható értéket véve
$$\mathbf{E}\left(H_{\tau\vee(n+1)} \mid \mathcal{F}_n\right) = \mathbf{E}\left(\mathbf{E}\left(H_{\tau\vee(n+1)} \mid \mathcal{F}_{n+1}\right) \mid \mathcal{F}_n\right) \overset{m.m.}{\leq} \mathbf{E}(X_{n+1} \mid \mathcal{F}_n).$$
Így minden $\tau \in \Delta_n$ esetén
$$\begin{aligned}
\mathbf{E}(H_\tau \mid \mathcal{F}_n) &= H_n\chi_{\{\tau=n\}} + \mathbf{E}\left(H_{\tau\vee(n+1)} \mid \mathcal{F}_n\right)\chi_{\{\tau>n\}} \leq \\
&\leq H_n\chi_{\{\tau=n\}} + \mathbf{E}(X_{n+1} \mid \mathcal{F}_n)\chi_{\{\tau>n\}} \leq \\
&\leq \max(H_n, \mathbf{E}(X_{n+1} \mid \mathcal{F}_n)) = \widehat{X}_n,
\end{aligned}$$
következésképpen
$$X_n \mathrel{\hat{=}} \operatorname*{ess\,sup}_\tau \mathbf{E}(H_\tau \mid \mathcal{F}_n) \leq \widehat{X}_n.$$
Összefoglalva: $X = \widehat{X}$.

□

0.7 Állítás.
Az X Snell-burkoló a legkisebb olyan $(\mathcal{F}_n)$-szupermartingale, amely dominálja a H folyamatot.

Bizonyítás: Az előző állítás szerint $X_n \geq H_n$, és $X_n \geq \mathbf{E}(X_{n+1} \mid \mathcal{F}_n)$, és az X dominálja a H folyamatot és az X szupermartingál[2]. Legyen Y egy másik olyan szupermartingál, amely dominálja a H folyamatot. Ekkor $Y_T \geq H_T = X_T$. Az Y szupermartingál, így

$$Y_{T-1} \geq \mathbf{E}(Y_T \mid \mathcal{F}_{T-1}) \geq \mathbf{E}(H_T \mid \mathcal{F}_{T-1}) = \mathbf{E}(X_T \mid \mathcal{F}_{T-1}),$$

így

$$Y_{T-1} \geq \max(H_{T-1}, \mathbf{E}(X_T \mid \mathcal{F}_{T-1})) = X_{T-1}.$$

Általában visszafelé haladó indukcióval

$$Y_{n-1} \geq \mathbf{E}(Y_n \mid \mathcal{F}_{n-1}) \geq \mathbf{E}(X_n \mid \mathcal{F}_{n-1}),$$

így

$$Y_{n-1} \geq \max(H_{n-1}, \mathbf{E}(X_n \mid \mathcal{F}_{n-1})) = X_{n-1}.$$

□

Létezik-e τ^* optimális megállási stratégia, vagyis a szuprémum helyébe írható-e maximum?

0.8 Állítás.
A

$$\tau^* = \min\{n \geq 0 : H_n = X_n\} \tag{3}$$

változó egyrészt véges[3] *megállási idő, másrészt a τ^* optimális megállási idő.*

Bizonyítás: A τ^* megállási idő, ugyanis

$$\begin{aligned}\{\tau^* = 0\} &= \{H_0 = X_0\} \in \mathcal{F}_0 \\ \{\tau^* = n\} &= \{H_n = X_n\} \cap \left(\bigcap_{k=0}^{n-1} \{H_k < X_k\}\right) \in \mathcal{F}_n\end{aligned}$$

ugyanis az X és a H adaptáltak. (A τ^* éppen a $H - X$ találati ideje a $B \triangleq \{0\}$ halmaz esetén.) A Snell-burkoló definíciója alapján $X_T = H_T$, így biztosan $0 \leq \tau^* \leq T$. Megmutatjuk, hogy a $X_n^{\tau^*} \triangleq X_{n\wedge\tau^*}$ megállított folyamat martingál. Legyen

$$x_n \triangleq \chi(\tau^* \geq n).$$

A τ^* megállási idő, így

$$\{x_n = 1\} = \{\tau^* \geq n\} = \{\tau^* \leq n-1\}^c \in \mathcal{F}_{n-1},$$

következésképpen az x folyamat előrejelezhető. Nyilván

$$X_n^{\tau^*} - X_{n-1}^{\tau^*} = x_n(X_n - X_{n-1}). \tag{4}$$

Mivel a τ^* az első olyan n, amelyre $H_n = X_n$, így a $\{\tau^* \geq n\}$ halmazon $X_{n-1} > H_{n-1}$. Mivel az indukciós formula szerint

$$X_{n-1} = \max(H_{n-1}, \mathbf{E}(X_n \mid \mathcal{F}_{n-1})),$$

ezért a $\{\tau^* \geq n\}$ halmazon $X_{n-1} = \mathbf{E}(X_n \mid \mathcal{F}_{n-1})$. Így a (4) alapján, felhasználva, hogy az x_n $\mathcal{F}_{n-1}$-mérhető

$$\begin{aligned}\mathbf{E}\left(X_n^{\tau^*} - X_{n-1}^{\tau^*} \mid \mathcal{F}_{n-1}\right) &= x_n\mathbf{E}(X_n - X_{n-1} \mid \mathcal{F}_{n-1}) = \\ &= \chi\{\tau^* \geq n\}(\mathbf{E}(X_n \mid \mathcal{F}_{n-1}) - X_{n-1}) = 0,\end{aligned}$$

[2]Emlékeztetünk, hogy a szupermartingálok definíciója szerint az X^--nak integrálhatónak kell lenni. Mivel azonban a feltételek szerint $H \geq 0$ ez biztosan teljesül.

[3]Ha a feltétel a minimum mögött nem teljesülne, akkor a megállási szabály definíció szerint $+\infty$ lenne.

következésképpen az X^{τ_*} martingál. Az X_0 konstans, ugyanis a modell definíciója szerint $\mathcal{F}_0 = \{\emptyset, \Omega\}$, így az X^{τ_*} martingál tulajdonsága szerint

$$X_0 = X_0^{\tau^*} = \mathbf{E}\left(X_T^{\tau^*}\right) = \mathbf{E}\left(X_{\tau^*}\right) = \mathbf{E}\left(H_{\tau^*}\right),$$

ahol az utolsó egyenlőség a $X_{\tau^*} = H_{\tau^*}$ következménye. Legyen $0 \leq \tau \leq T$, tetszőleges megállási idő. Az imént belátottak és az X_0 definíciója miatt

$$\mathbf{E}\left(H_{\tau^*}\right) = X_0 \mathrel{\hat{=}} \sup_{\tau} \mathbf{E}\left(H_\tau\right) \geq \mathbf{E}\left(H_\tau\right),$$

következésképpen τ^* valóban optimális megállási idő.

□

Általában az optimális megállási idő nem egyértelmű. Érvényes a következő karakterizáció:

0.9 Következmény. (Optimalitási kritérium)
Valamely τ megállási idő optimális a H kifizetés esetén pontosan akkor, ha

1. $H_\tau = X_\tau$
2. *az X^τ megállított folyamat martingál, ahol*

X a H Snell-burkolója.

Bizonyítás: Az egyik irány az előző állítás bizonyítása alapján világos: Ha a feltétel teljesül, akkor a τ optimális. Csak azt kell belátni, hogy ha a τ optimális, akkor érvénye az 1. és a 2.

Mivel az X dominálja a H kifizetést, ezért $H \leq X$, így $H_\tau \leq X_\tau$. Ha a τ optimális, akkor a megállási opciókról szóló tétel alapján, felhasználva, hogy az X szupermartingál

$$X_0 = \mathbf{E}\left(H_\tau\right) \leq \mathbf{E}\left(X_\tau\right) \leq \mathbf{E}\left(X_0\right) = X_0,$$

ami csak úgy teljesülhet, ha teljesül az első feltétel, vagyis $H_\tau = X_\tau$. Be akarjuk látni a második feltételt. A már belátott első feltétel szerint

$$X_0 = \mathbf{E}\left(H_\tau\right) = \mathbf{E}\left(X_\tau\right).$$

Az X szupermartingál, így a megállási opciókról szóló tétel szerint

$$X_0 \geq \mathbf{E}\left(X_{\tau\wedge n}\right) \geq \mathbf{E}\left(X_\tau\right) = X_0$$

Tehát

$$\mathbf{E}\left(X_{\tau\wedge n}\right) = \mathbf{E}\left(X_\tau\right) = \mathbf{E}\left(\mathbf{E}\left(X_\tau \mid \mathcal{F}_n\right)\right). \tag{5}$$

A megállított szupermartingál szintén szupermartingál, így az X^τ szupermartingál. Ezt felhasználva

$$X_n^\tau = X_{\tau\wedge n} \geq \mathbf{E}\left(X_T^\tau \mid \mathcal{F}_n\right) = \mathbf{E}\left(X_\tau \mid \mathcal{F}_n\right).$$

Az (5) szerint az előző sorban egyenlőség van, így

$$X_n^\tau \overset{m.m.}{=} \mathbf{E}\left(X_\tau \mid \mathcal{F}_n\right),$$

következésképpen az X^τ az X_τ fix változó $(\mathcal{F}_n)$ szerinti várható értékeiből áll, így valóban martingál.

□

0.10 Következmény.
A (3) sorban definiált megállási idő a legkisebb optimális megálláso idő.

A Doob—Meyer felbontás és a szuperhedge létezése

Térjünk vissza az amerikai opciók árazási problémájára.

0.11 Állítás. (Doob–Meyer felbontás)
Ha X szupermartingál[4]*, akkor van olyan M martingál és A előrejelentjező, növekedő folyamat, hogy*
$$X = M + A, \quad A_0 = 0.$$

Bizonyítás: Legyen $M_0 \circeq X_0$, $A_0 \circeq 0$, és
$$M_n \circeq X_0 + \sum_{j=0}^{n-1} \left(X_{j+1} - \mathbf{E}\left(X_{j+1} \mid \mathcal{F}_j\right)\right), \quad A_n \circeq \sum_{j=0}^{n-1} \left(\mathbf{E}\left(X_{j+1} \mid \mathcal{F}_j\right) - X_j\right).$$
Könnyen látható, hogy $X = M + A$.
$$\begin{aligned}
\mathbf{E}\left(M_{n+1} \mid \mathcal{F}_n\right) &\circeq \mathbf{E}\left(X_0 + \sum_{j=0}^{n} \left(X_{j+1} - \mathbf{E}\left(X_{j+1} \mid \mathcal{F}_j\right)\right) \mid \mathcal{F}_n\right) = \\
&= \mathbf{E}\left(X_0 \mid \mathcal{F}_n\right) + \sum_{j=0}^{n} \mathbf{E}\left(X_{j+1} - \mathbf{E}\left(X_{j+1} \mid \mathcal{F}_j\right) \mid \mathcal{F}_n\right) = \\
&= X_0 + \sum_{j=0}^{n-1} \left(X_{j+1} - \mathbf{E}\left(X_{j+1} \mid \mathcal{F}_j\right)\right) + 0,
\end{aligned}$$
így M martingál. Az X szubmartingál, így $\mathbf{E}\left(X_{j+1} \mid \mathcal{F}_j\right) - X_j \geq 0$ következésképpen az A_n $\mathcal{F}_{n-1}$-mérhető és növekedő. Megmutatjuk, hogy a felbontás egyértelmű. Ha $X_n = M_n' + A_n'$ egy másik felbontás, akkor
$$\begin{aligned}
A_{n+1}' - A_n' &= X_{n+1} - M_{n+1}' - \left(X_n - M_n'\right) = \\
&= \left(X_{n+1} - X_n\right) - \left(M_{n+1}' - M_n'\right) = \\
&= A_{n+1} - A_n + \left(M_{n+1} - M_n\right) - \left(M_{n+1}' - M_n'\right).
\end{aligned}$$
Ha az $\mathcal{F}_n$-szerint feltételes várható értéket veszünk, majd felhasználjuk, hogy az A és az A' előrejelezhető, valamint, hogy az M és az M' martingál
$$A_{n+1}' - A_n' = A_{n+1} - A_n + 0 - 0.$$
Mivel $A_0 = A_0' = 0$, ezért minden n-re $A_n = A_n'$. Ezt felhasználva az $M_n = M_n'$ egyenlőség már evidens.

□

0.12 Állítás.
Ha a piac teljes és nincsen arbitrázs, akkor van olyan x^*, amelyre optimális.

Bizonyítás: A feltételek miatt van, mégpedig egyetlen olyan $\mathbf{Q}$ mérték, amely mellett az $\overline{S}$ martingál. Legyen a $\overline{H}$ a diszkontált kifizetésekből álló folyamat. Jelölje X a $\overline{H}$-hoz tartozó Snell-burkolót. Az X szupermartingál, így rendelkezik Doob–Meyer felbontással: $X = M - A$, ahol M martingál és $A \geq 0$, $A_0 = 0$ és az A növekedő. Mivel a modell teljes, ezért létezik olyan x^*, hogy a hozzá tartozó önfinanszírozó portfolió diszkontált értékfolyamatára $\overline{V}_T\left(x^*\right) = M_T$. A $\overline{V}\left(x^*\right)$ martingál, tehát
$$\overline{V}_n\left(x^*\right) = \mathbf{E}\left(\overline{V}_T\left(x^*\right) \mid \mathcal{F}_n\right) = \mathbf{E}\left(M_T \mid \mathcal{F}_n\right) = M_n.$$

[4] Ha az X szupermartingál, akkor $-X$ is a szubmartingál, így szupermartingálok esetén a dekompozició $X = M - A$ alakú.

Mivel $A_0 = 0$, és miként láttuk létezik τ^* optimális megállási idő

$$V_0(x^*) = \overline{V}_0(x^*) = M_0 = M_0 - A_0 = X_0 = \sup_\tau \mathbf{E}\left(\overline{H}_\tau\right) = \mathbf{E}\left(\overline{H}_{\tau^*}\right).$$

és

$$\begin{aligned} V_n(x^*) &= S_n^0 M_n = S_n^0 (X_n + A_n) \geq S_n^0 \left(\overline{H}_n + A_n\right) \geq \\ &\geq S_n^0 \overline{H}_n = H_n. \end{aligned}$$

□

A Doob—Meyer felbontás segítségével további optimális megállási időket is meghatározhatunk.

0.13 Definíció.
Legyen H tetszőleges és legyen X a H Snell-burkolója. Legyen $X = M - A$ az X Doob–Meyer felbontása. Legyen

$$\tau^{**}(\omega) \stackrel{\circ}{=} \begin{cases} T & ha \quad A_T(\omega) = 0 \\ \min\{n : A_{n+1}(\omega) > 0\} & ha \quad A_T(\omega) > 0 \end{cases}.$$

0.14 Állítás.
A τ^{**} a H egy optimális megállási ideje. A τ^{**} az utolsó optimális megállási idő.

Bizonyítás: Mivel az A előrejelezhető, ezért az A_{n+1} $\mathcal{F}_n$-mérhető, így

$$\{\tau^{**} = n\} = \cap_{k \leq n} \{A_k = 0\} \cap \{A_{n+1} > 0\} \in \mathcal{F}_n$$

tehát a τ^{**} megállási idő. A τ^{**} optimalitását az optimalitási kritérium segítségével fogjuk igazolni. Nyilván $A^{\tau^{**}} = 0$, tehát

$$X^{\tau^{**}} = M^{\tau^{**}} - A^{\tau^{**}} = M^{\tau^{**}}.$$

Az M martingál, minden megákkított martingál martingál, tehát az $X^{\tau^{**}}$martingál, így a második feltétel teljesül. Megmutatjuk, hogy $X_{\tau^{**}} = H_{\tau^{**}}$.

$$\begin{aligned} X_{\tau^{**}} &= \sum_{k=0}^{T-1} \chi(\tau^{**} = k) X_k + \chi(\tau^{**} = T) X_T = \\ &= \sum_{k=0}^{T-1} \chi(\tau^{**} = k) \max(H_k, \mathbf{E}(X_{k+1} \mid \mathcal{F}_k)) + \chi(\tau^{**} = T) H_T. \end{aligned}$$

Mivel az A előrejelezhető és az M martingál, ezért

$$\mathbf{E}(X_{k+1} \mid \mathcal{F}_k) = \mathbf{E}(M_{k+1} - A_{k+1} \mid \mathcal{F}_k) = M_k - A_{k+1}.$$

A $\{\tau^{**} = k\}$ halmazon $A_k = 0$, de $A_{k+1} > 0$, így ezen a halmazon $X_k = M_k$, és

$$\mathbf{E}(X_{k+1} \mid \mathcal{F}_k) = \mathbf{E}(M_{k+1} - A_{k+1} \mid \mathcal{F}_k) = M_k - A_{k+1} < M_k = X_k,$$

így ezen a halmazon

$$X_k = \max(H_k, \mathbf{E}(X_{k+1} \mid \mathcal{F}_k)) = H_k$$

következésképpen $X_{\tau^{**}} = H_{\tau^{**}}$, amely éppen az első feltétel.

Végül megmutatjuk, hogy a τ^{**} az utolsó optimális megállási idő. Legyen τ optimális megállási idő és tegyük fel, hogy egy pozitív mértékű halmazon $\tau > \tau^{**}$. Ezen a halmazon az A_τ pozitív. Mivel $A \geq 0$, ezért $\mathbf{E}(A_\tau) > 0$, így a megállási opciókról szóló tétel szerint

$$\mathbf{E}(H_\tau) \leq \mathbf{E}(X_\tau) = \mathbf{E}(M_\tau) - \mathbf{E}(A_\tau) < \mathbf{E}(M_\tau) = \mathbf{E}(M_0) = \mathbf{E}(X_0) = X_0,$$

tehát a τ nem lehet optimális.

□