

# CreditRisk+

## Bevezetés a kockázatkezelésbe

Medvegyev Péter

2009 március

# Az alaprobléma

Tekintsünk egy  $[0, T]$  időszakot. Mekkora veszteség érhet minket az adott időszak alatt? A veszteség nagysága két dologtól függ:

- 1 Az egyedi veszteségek nagyságától, és
- 2 a veszteségek gyakoriságától.

Felteszük, hogy

- 1 a veszteségek gyakorisága egy számláló folyamatot alkot,
- 2 a veszteségek nagysága egy ettől független valószínűségi változókból álló sorozat.

A megközelítés nagyrészt a biztosításmatematikából került át a pénzügyekbe és elsősorban az operációs kockázatok modellezésére szokás használni. A nehézség az, hogy a teljes veszteséget leíró így kapott bonyolult valószínűségi változó nehezen kezelhető analitikusan. Az időhorizont általában egy év. Szemben a piaci kockázatokkal a veszteségek nem, vagy csak részben „gyógyulnak vissza”.

## Definition

Egy adott  $\alpha$  valószínűséghez tartozó kockázatos érték az a legkisebb  $X_\alpha$  érték, amelyre annak a valószínűsége, hogy a veszteség nagyobb lesz mint  $X_\alpha$  kisebb vagy egyenlő mint  $\alpha$ .

A CreditRisk+ modell célja az összetett veszteségeloszláshoz tartozó kockázatos érték kiszámolása.

## Definition

Egy  $X$  sztochasztikus folyamatot Lévy-folyamatnak mondunk, ha

- 1  $X(0) = 0$ ,
- 2 az  $X$  független növekményű,
- 3 az  $X$  stacionárius növekményű,
- 4 az  $X$  trajektóriái jobbról folytonosak és rendelkeznek bal oldali határértékkel.

A Lévy-folyamatok heurisztikusan olyan folyamatok, amelyek időben homogén módon és véletlenszerűen változnak. A folyamat trajektóriái vagy folytonosak, vagy ugrások vannak bennük. Bizonyos értelemben a Lévy-folyamatok a legegyszerűbb és legszemléletesebb sztochasztikus folyamatok.

## Definition

A számláló Lévy-folyamatokat Poisson-folyamatoknak mondjuk.

Egy folyamatot számláló folyamatnak mondunk, ha a trajektóriák a  $\{0, 1, 2, \dots\}$  értékeket veszik fel és monoton nőnek. Hangsúlyozni kell, hogy a folyamat értelmezési tartománya a teljes  $\mathbb{R}_+$  félegyenes és egy adott időpontig az ugrások száma nem lehet végtelen, így az ugráspontok nem torlódhatnak. A Lévy tulajdonság azt jelenti, hogy az ugráspontok „egyenletesen” elszórva jelentkeznek, illetve az egyes ugrások időpontja között nincsen kapcsolat. Természetesen az ugrások között eltelt idő véletlenszerű, de az azonos hosszúságú intervallumokba körülbelül azonos számú ugrás esik.

# Az első ugrás időpontja exponenciális eloszlást követ

Az első ugrás

$$\tau_1(\omega) \doteq \inf \{t : X(t, \omega) = 1\} = \inf \{t : X(t, \omega) > 0\} < \infty$$

eloszlása exponenciális eloszlást követ, ugyanis

$$\begin{aligned} \mathbf{P}(\tau_1 > t + s) &= \\ &= \mathbf{P}(X(t + s) = 0) = \mathbf{P}(X(s) = 0, X(t + s) - X(s) = 0) = \\ &= \mathbf{P}(X(s) = 0) \mathbf{P}(X(t + s) - X(s) = 0) = \\ &= \mathbf{P}(X(s) = 0) \mathbf{P}(X(t) = 0), \end{aligned}$$

így bizonyos  $0 < \lambda < \infty$  számra

$$\mathbf{P}(\tau_1 > t) = \mathbf{P}(X(t) = 0) = \exp(-\lambda t).$$

A megállási idők olyan események bekövetkezésének véletlen időpontjai, amelyek bekövetkezéséről a bekövetkezés időpontjában értesülünk.

## Example

Ha valamely esemény először következik be az általában megállási idő, de az, hogy valami utoljára következik be az nem megállási idő. Az hogy a folyamat átmetsz egy szintet az megállási idő, de az, hogy a maximumát vagy a minimumát felveszi nem megállási idő.

Nagyon lényeges, hogy csak megállási idő mentén lehet bámit csinálni. Ha egy esemény bekövetkezésének időpontja nem megállási idő, akkor az esemény lényegében nem figyelhető meg, ugyanis bekövetkezéséről csak utólag értesülünk.

## Theorem

*Ha  $X$  egy Lévy-folyamat és  $\tau < \infty$  egy megállási idő, akkor az*

$$X^*(t) \stackrel{\circ}{=} X(t + \tau) - X(\tau)$$

*újraindított folyamat*

- 1 *szintén Lévy-folyamat,*
- 2 *az  $X^*$  eloszlása megegyezik az  $X$  eloszlásával*
- 3  *$X^*$  független a  $\tau$  előtt bekövetkezett eseményektől.*



Az erős Markov-tulajdonság miatt az  $X_1^*(t) \stackrel{\circ}{=} X(\tau_1 + t) - X(\tau_1)$  újraindított folyamat eloszlása megegyezik az  $X(t)$  folyamat eloszlásával, így az első és a második ugrás között eltelt idő

$$\tau_2(\omega) \stackrel{\circ}{=} \inf \{t : X(t + \tau_1(\omega), \omega) = 2\} = \inf \{t : X_1^*(t, \omega) > 0\} < \infty$$

azonos eloszlású mint a  $\tau_1$  és a  $\tau_1$  és a  $\tau_2$  függetlenek.

## Theorem

*Ha az  $X$  Poisson-folyamat, akkor az ugrások között eltelt időszakok azonos paraméterű exponenciális eloszlást alkotnak és az egyes ugrások nagysága független.*

## Definition

Egy  $\tau > 0$  megállási idő előrejelezhető, ha létezik megállási idők egy  $(\rho_n)$  sorozata, amelyre  $\rho_n < \tau$  és  $\rho_n \nearrow \tau$ .

## Theorem

*A Poisson-folyamatok ugrásai nem előrejelezhetőek.*

Ha a  $\tau_1$  előrejelezhető lenne, akkor az

$$N_n^*(t) \stackrel{\circ}{=} N(\rho_n + t) - N(\rho_n)$$

Poisson-folyamat lenne  $\lambda$  paraméterrel. Az  $N_n^*$  első ugrása  $\tau_1 - \rho_n$ . De  $\tau_1$  és a  $\tau_1 - \rho_n$  várható értéke  $1/\lambda > 0$ . Így

$$\frac{1}{\lambda} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\lambda} = \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbf{E}(\tau_1 - \rho_n) = \mathbf{E}\left(\lim_{n \rightarrow \infty} (\tau_1 - \rho_n)\right) = 0,$$

ami lehetetlen.

# A gamma és a béta eloszlások

## Definition

Ha  $\lambda$  és az  $a$  pozitív számok, akkor az

$$f(x) \doteq \frac{\lambda^a}{\Gamma(a)} x^{a-1} \exp(-\lambda x), \quad x > 0$$

sűrűségfüggvénnyel rendelkező eloszlást  $(a, \lambda)$  paraméterű gamma eloszlásnak mondjuk. Az eloszlást  $\Gamma(a, \lambda)$  módon jelöljük.

## Definition

Ha  $\alpha$  és  $\beta$  pozitív számok, akkor az

$$f(x) \doteq \frac{\Gamma(\alpha + \beta)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} x^{\alpha-1} (1-x)^{\beta-1}, \quad x \in (0, 1)$$

sűrűségfüggvénnyel rendelkező eloszlást  $(\alpha, \beta)$  paraméterű béta függvénynek mondjuk. Az eloszlást  $B(a, \beta)$ -val szokás jelölni.

## Example

$\Gamma(1, \lambda)$  éppen a  $\lambda$  paraméterű exponenciális eloszlás.

## Example

$\Gamma(1/2, 1/2)$  éppen a  $\chi_1^2$  eloszlás

Legyen  $\zeta \cong N(0, 1)$  és számoljuk ki a  $\eta \doteq \zeta^2$  változó eloszlását. Ha  $x \leq 0$ , akkor  $F_\eta(x) = \mathbf{P}(\zeta^2 < x) = 0$ . Ha  $x > 0$ , akkor

$$\begin{aligned} F_\eta(x) &= \mathbf{P}(\zeta^2 < x) = \mathbf{P}(-\sqrt{x} < \zeta < \sqrt{x}) = \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\sqrt{x}}^{\sqrt{x}} \exp\left(-\frac{t^2}{2}\right) dt = \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{\sqrt{x}} \exp\left(-\frac{t^2}{2}\right) dt. \end{aligned}$$

Deriválva, ha  $x > 0$ , akkor

$$f_\eta(x) = \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{y^2}{2}\right) \Big|_{y=\sqrt{x}} \frac{1}{2\sqrt{x}} = \frac{1}{\sqrt{2\pi x}} \exp\left(-\frac{x}{2}\right).$$

## Example

$$B(x, y) = \frac{\Gamma(x) \Gamma(y)}{\Gamma(x+y)}!$$

Legyen

$$\Gamma(x, \lambda) \doteq \int_0^{\infty} t^{x-1} \exp(-\lambda t) dt, \quad x, \lambda > 0.$$

$u = t\lambda$  helyettesítéssel

$$\Gamma(x, \lambda) = \int_0^{\infty} \left(\frac{u}{\lambda}\right)^{x-1} \exp(-u) \frac{du}{\lambda} = \frac{\Gamma(x)}{\lambda^x}.$$

$s = t / (1 - t)$  helyettesítéssel

$$\begin{aligned} I &\stackrel{\circ}{=} \int_0^{\infty} \Gamma(x+y, 1+s) s^{x-1} ds = \int_0^{\infty} \Gamma(x+y) \frac{s^{x-1}}{(1+s)^{x+y}} ds = \\ &= \Gamma(x+y) \int_0^{\infty} (1+s)^{-(x+y)} s^{x-1} ds = \\ &= \Gamma(x+y) \int_0^1 \left(1 + \frac{t}{1-t}\right)^{-(x+y)} \left(\frac{t}{1-t}\right)^{x-1} \frac{1}{(1-t)^2} dt = \\ &= \Gamma(x+y) \int_0^1 \left(\frac{1}{1-t}\right)^{-(x+y)} \left(\frac{t}{1-t}\right)^{x-1} \frac{1}{(1-t)^2} dt = \\ &= \Gamma(x+y) \int_0^1 t^{x-1} (1-t)^{y-1} dt \stackrel{\circ}{=} \Gamma(x+y) B(x, y). \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 I &\stackrel{\circ}{=} \int_0^{\infty} \Gamma(x+y, 1+s) s^{x-1} ds \stackrel{\circ}{=} \\
 &\stackrel{\circ}{=} \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} \exp(-t(1+s)) t^{x+y-1} s^{x-1} dt ds = \\
 &= \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} \exp(-t(1+s)) t^{x+y-1} s^{x-1} ds dt = \\
 &= \int_0^{\infty} t^{x+y-1} \exp(-t) \int_0^{\infty} \exp(-ts) s^{x-1} ds dt \stackrel{\circ}{=} \\
 &\stackrel{\circ}{=} \int_0^{\infty} t^{x+y-1} \exp(-t) \Gamma(x, t) dt = \\
 &= \int_0^{\infty} t^{x+y-1} \exp(-t) \frac{\Gamma(x)}{t^x} dt \stackrel{\circ}{=} \\
 &\stackrel{\circ}{=} \Gamma(x) \int_0^{\infty} t^{y-1} \exp(-t) dt = \Gamma(x) \Gamma(y).
 \end{aligned}$$

# The density function of the Gaussian distribution

## Example

Calculate the integral

$$\int_{-\infty}^{\infty} \exp(-x^2) dx!$$

$$\begin{aligned} I &\stackrel{\circ}{=} \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} x \exp(-x^2(1+t^2)) dx dt = \\ &= \int_0^{\infty} \left[ \frac{\exp(-x^2(1+t^2))}{-2(1+t^2)} \right]_0^{\infty} dt = \\ &= \frac{1}{2} \int_0^{\infty} \frac{1}{1+t^2} dt = \frac{\pi}{4}. \end{aligned}$$



## Theorem

Ha  $\xi$  és  $\eta$  független valószínűség változók és a  $\xi$  sűrűségfüggvénye  $f$  az  $\eta$  sűrűségfüggvénye  $g$ , akkor a  $\xi + \eta$  sűrűségfüggvénye létezik és éppen

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(z) g(x-z) dz.$$

$$\begin{aligned} F_{\xi+\eta}(x) &= \mathbf{P}(\xi + \eta < x) = \int_{-\infty}^{\infty} \mathbf{E}(\chi(\xi + \eta < x) \mid \xi = z) dF(z) = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \mathbf{P}(z + \eta < x \mid \xi = z) dF(z) = \int_{-\infty}^{\infty} \mathbf{P}(\eta < x - z) f(z) dz \end{aligned}$$

Ezt elég  $x$  szerint deriválni.

Ha  $\xi \geq 0$  és  $\eta \geq 0$ , akkor a konvolúciós integrál

$$\int_0^x f(z) g(x-z) dz$$

alakra egyszerűsödik.

## Theorem

Ha a  $\tau_i$  független  $\Gamma(a_i, \lambda)$  eloszlásúak, akkor a  $\sum_{i=1}^n \tau_i$  eloszlása  $\Gamma(\sum_{i=1}^n a_i, \lambda)$ .

$$\begin{aligned} \int_0^x \frac{\lambda^a}{\Gamma(a)} (x-t)^{a-1} \exp(-\lambda(x-t)) \frac{\lambda^b}{\Gamma(b)} t^{b-1} \exp(-\lambda t) dt &= \\ &= \frac{\lambda^{a+b}}{\Gamma(a)\Gamma(b)} \exp(-\lambda x) \int_0^x (x-t)^{a-1} t^{b-1} dt = \\ &= \frac{\lambda^{a+b}}{\Gamma(a)\Gamma(b)} \exp(-\lambda x) \int_0^1 (x-xz)^{a-1} (xz)^{b-1} x dz = \\ &= \frac{\lambda^{a+b}}{\Gamma(a)\Gamma(b)} \exp(-\lambda x) x^{a+b-1} \int_0^1 (1-z)^{a-1} z^{b-1} dz = \\ &= \frac{\lambda^{a+b}}{\Gamma(a+b)} \exp(-\lambda x) x^{a+b-1}. \end{aligned}$$

## Corollary

*Egy Poisson-folyamat  $n$ -dik ugrásának időpontja  $\Gamma(n, \lambda)$ .*

## Corollary

*A  $\chi_n^2$  eloszlása  $\Gamma(n/2, 1/2)$ ..*

## Corollary

Ha  $X$  Poisson-folyamat és  $\lambda$  az ugrásokhoz tartozó exponenciális eloszlás paramétere, akkor

$$\mathbf{P}(X(t) = n) = \frac{(\lambda t)^n}{n!} \exp(-\lambda t).$$

Legyen  $\sigma_n \doteq \sum_{k=1}^n \tau_k$ . A  $\sigma_{n+1}$  eloszlása  $\Gamma(n+1, \lambda)$ .

$$\begin{aligned} \mathbf{P}(X(t) < n+1) &= \mathbf{P}(\sigma_{n+1} > t) = \int_t^\infty \frac{\lambda^{n+1}}{\Gamma(n+1)} x^n \exp(-\lambda x) dx = \\ &= \left[ \frac{\lambda^{n+1} x^n \exp(-\lambda x)}{-\lambda} \right]_t^\infty + \int_t^\infty n \frac{\lambda^n x^{n-1}}{\Gamma(n+1)} \exp(-\lambda x) dx = \\ &= \frac{(\lambda t)^n}{n!} \exp(-\lambda t) + \mathbf{P}(X(t) < n). \end{aligned}$$

$$\mathbf{P}(X(t) = n) = \mathbf{P}(X(t) < n + 1) - \mathbf{P}(X(t) < n) = \frac{(\lambda t)^n}{n!} \exp(-\lambda t).$$

# Poisson-eloszlás szimulálása

$L \stackrel{\circ}{=} \exp(-\lambda)$ ,  $k \stackrel{\circ}{=} 0$  and  $p \stackrel{\circ}{=} 1$ .

do:

$k \stackrel{\circ}{=} k + 1$

$u$  egyenletes eloszlás generálása a  $[0, 1]$  szakaszon

$p \stackrel{\circ}{=} p * u$

while  $p \geq L$ .

return  $p - 1$ .

Logaritmust véve  $\sum \ln u_i \geq -\lambda$  vagyis  $\sum \left(-\frac{1}{\lambda} \ln u_i\right) \leq 1$ . Az  $-1/\lambda \ln u_i$  eloszlása

$$\mathbf{P} \left( -\frac{1}{\lambda} \ln u_i < x \right) = \mathbf{P} (\ln u_i > -\lambda x) = \mathbf{P} (u_i > \exp(-\lambda x)) = 1 - \exp(-\lambda x)$$

ami exponenciális.

Legyen  $T > 0$  rögzített intervallum. Mennyi veszteség keletkezik a  $[0, T]$  szakaszon? Tegyük fel, hogy

- 1 a veszteségek bekövetkezése Poisson-folyamat szerint alakul
- 2 a veszteségek eloszlása azonos
- 3 a veszteségek függetlenek.

Keresendő

$$X_\alpha \stackrel{\circ}{=} \inf \{X : \mathbf{P}(\text{Loss} > X) \leq \alpha\} \stackrel{\circ}{=} \text{Var}_\alpha$$



# A veszteség folyamat

Az összetett veszteség  $Loss = \sum_{k=0}^{\infty} \chi(\sigma_k \leq T) \zeta_k$  ahol  $(\sigma_k)$  az ugrások időpontja és  $\zeta_k$  a  $\sigma_k$  időpontban bekövetkező veszteség A legegyszerűbb a Laplace-transzformáció kiszámolása. Ha  $\mathbf{P}(N = k) \doteq p_k$ , akkor

$$\begin{aligned} L_{Loss}(s) &\doteq \mathbf{E}(\exp(-s \cdot Loss)) = \mathbf{E}(\mathbf{E}(\exp(-s \cdot Loss) \mid N = k)) = \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \mathbf{E}(\exp(-s \cdot Loss) \mid N = k) \cdot p_k = \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \mathbf{E}\left(\exp\left(-s \cdot \sum_{i=0}^k \zeta_i\right)\right) \cdot p_k = \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} (\mathbf{E}(\exp(-s \cdot \zeta)))^k p_k = G(L_{\zeta}(s)) \end{aligned}$$

ahol  $G(z) \doteq \sum_{k=0}^{\infty} z^k p_k$  az ugrások számának generátorfüggvénye.

## Example

Ha a veszteségek száma Poisson-eloszlást követ, akkor

$$\begin{aligned} G(z) &\doteq \sum_{k=0}^{\infty} z^k \frac{\lambda^k}{k!} \exp(-\lambda) = \exp(-\lambda) \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(z\lambda)^k}{k!} = \\ &= \exp(-\lambda) \exp(z\lambda) = \exp(\lambda(z-1)). \end{aligned}$$

Ha a veszteségek nagysága exponenciális eloszlást követ  $\mu$  paraméterrel:

$$\begin{aligned} L_{\xi}(s) &= \int_0^{\infty} \mu \exp(-\mu x) \exp(-sx) dx = \mu \int_0^{\infty} \exp(-(\mu+s)x) dx \\ &= \mu \left[ -\frac{\exp(-(\mu+s)x)}{\mu+s} \right]_0^{\infty} = \frac{\mu}{\mu+s} \end{aligned}$$

$$L_{Loss}(s) = \exp\left(\lambda \left(\frac{\mu}{\mu+s} - 1\right)\right) = \exp\left(\frac{-\lambda s}{\mu+s}\right).$$

# A Poisson-eloszlás paramétere is véletlen

A Poisson-folyamat paramétere számos külső tényezőtől függ. Így nem tudjuk a  $\lambda$  paraméter értékét. Tegyük fel, hogy a feltételes eloszlása lesz Poisson

$$\mathbf{P}(N = n \mid \lambda) = \frac{\lambda^n}{n!} \exp(-\lambda).$$

Tegyük fel, hogy a  $\lambda$  eloszlása  $(\alpha, \beta)$  paraméterű gamma eloszlást alkot, ahol  $(\alpha, \beta)$  a külső tényezők eloszlásának függvénye. Mi lesz az  $N$  eloszlása?

$$\mathbf{P}(N = n) = \mathbf{E}(\mathbf{P}(N = n \mid \lambda)) = \frac{1}{n!} (\mathbf{E}(\lambda^n \exp(-\lambda)))$$

A gamma eloszlás sűrűségfüggvényének képlete alapján

$$\begin{aligned} \mathbf{E}(\lambda^\gamma \exp(\lambda z)) &= \int_0^\infty \lambda^\gamma \exp(\lambda z) \frac{\beta^\alpha}{\Gamma(\alpha)} \lambda^{\alpha-1} \exp(-\beta\lambda) d\lambda = \\ &= \frac{\beta^\alpha \Gamma(\alpha + \gamma)}{\Gamma(\alpha) (\beta - z)^{\alpha+\gamma}} \int_0^\infty \frac{(\beta - z)^{\alpha+\gamma}}{\Gamma(\alpha + \gamma)} \lambda^{\alpha+\gamma-1} \exp(-(\beta - z)\lambda) d\lambda = \\ &= \frac{\beta^\alpha \Gamma(\alpha + \gamma)}{\Gamma(\alpha) (\beta - z)^{\alpha+\gamma}} \cdot 1 = \frac{\Gamma(\alpha + \gamma)}{\beta^\gamma \Gamma(\alpha) (1 - z/\beta)^{\alpha+\gamma}} \end{aligned}$$

ahol  $\beta > z$  és  $\alpha + \gamma > 0$ .

# Gamma eloszlással való keverés

Ha  $z = -1$ ,  $\gamma = n$  akkor mivel  $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$

$$\begin{aligned} \mathbf{P}(N = n) &= \frac{\Gamma(\alpha + n)}{n! \Gamma(\alpha)} \frac{1}{\beta^n} \frac{1}{(1 + 1/\beta)^{\alpha+n}} = \\ &= \frac{(\alpha + n - 1) \Gamma(\alpha + n - 1)}{n! \Gamma(\alpha)} \frac{1}{\beta^n} \frac{1}{(1 + 1/\beta)^{\alpha+n}} = \dots = \\ &= \frac{\prod_{k=0}^{n-1} (\alpha + k) \Gamma(\alpha)}{n! \Gamma(\alpha)} \frac{1}{\beta^n} \frac{1}{(1 + 1/\beta)^{\alpha+n}} \stackrel{\circ}{=} \binom{\alpha + n - 1}{n} p^\alpha q^n \end{aligned}$$

ahol  $p = \beta / (1 + \beta)$ ,  $q = 1 / (1 + \beta)$ . Ezt negatív binomiális eloszlásnak mondják. Ha  $\alpha = 1$  a gamma eloszlás exponenciális. Ekkor

$$\mathbf{P}(N = n) = pq^n.$$

# A negatív binomiális eloszlás

Ha  $n$  egy természetes szám, akkor  $\Gamma(n) = (n-1)!$  Így definíció szerint

$$\binom{\alpha + n - 1}{n} \stackrel{\circ}{=} \frac{\Gamma(\alpha + n)}{n! \Gamma(\alpha)} = \frac{\prod_{k=0}^{n-1} (\alpha + k)}{n!}.$$

Másoldalról

$$\binom{-\alpha}{n} \stackrel{\circ}{=} \frac{-\alpha(-\alpha-1)\dots-\alpha(-\alpha-n+1)}{n!} = (-1)^n \frac{\prod_{k=0}^{n-1} (\alpha + k)}{n!}.$$

Következésképpen

$$\mathbf{P}(N = n) = (-1)^n \binom{-\alpha}{n} p^\alpha q^n.$$

# A negatív binomiális eloszlás generátorfüggvénye

A Poisson eloszlás generátorfüggvényét és a gamma eloszlás sűrűségfüggvényét használva

$$\begin{aligned} G(z) &\doteq \mathbf{E}(z^N) = \mathbf{E}(\mathbf{E}(z^N | \lambda)) \doteq \mathbf{E}(G_\lambda(z)) = \\ &= \int_0^\infty G_\lambda(z) \cdot \frac{\beta^\alpha}{\Gamma(\alpha)} \lambda^{\alpha-1} \exp(-\beta\lambda) d\lambda = \\ &= \int_0^\infty \exp(\lambda(z-1)) \cdot \frac{\beta^\alpha}{\Gamma(\alpha)} \lambda^{\alpha-1} \exp(-\beta\lambda) d\lambda = \\ &= \frac{\beta^\alpha}{\Gamma(\alpha)} \int_0^\infty \lambda^{\alpha-1} \exp(-\lambda(\beta+1-z)) d\lambda = \\ &= \frac{\beta^\alpha}{\Gamma(\alpha)} \Gamma(\alpha, \beta+1-z) = \frac{\beta^\alpha}{\Gamma(\alpha)} \frac{\Gamma(\alpha)}{(\beta+1-z)^\alpha} = \left(\frac{\beta}{\beta+1-z}\right)^\alpha \end{aligned}$$

# A veszteségek Laplace-transzformációjának képletét használva

## Example

Ha a veszteségek nagysága exponenciális  $\mu$  paraméterrel, akkor

$$L_{Loss}(s) = G(L_{\theta}(z)) = \left( \frac{\beta}{\beta + 1 - \frac{\mu}{\mu + s}} \right)^{\alpha}.$$



# A veszteségek generátorfüggvénye

Tegyük fel, hogy a lehetséges eloszlásokat egy diszkrét eloszlással közelítjük. Tegyük fel, hogy a veszteségek valószínűsége  $(r_j)_{j=0}^M$ .

$$\begin{aligned} G(z) &\stackrel{\circ}{=} \sum_{n=0}^{\infty} \mathbf{P}(L = n) z^n \stackrel{\circ}{=} \sum_{n=0}^{\infty} A_n z^n = \mathbf{E}(z^L) = \mathbf{E}(\mathbf{E}(z^L) \mid N = k) = \\ &= \mathbf{E}(\mathbf{E}(z^{\sum_{k=1}^N \xi_k}) \mid N = k) = \sum_k \mathbf{E}(z^{\sum_{i=1}^k \xi_i}) \cdot p_k = \\ &= \sum_k (\mathbf{E}(z^{\xi}))^k \cdot p_k = F(P(z)), \end{aligned}$$

ahol  $P(z) \stackrel{\circ}{=} \sum_{j=0}^M z^j r_j$  veszteség generátorfüggvénye és  $F$  veszteség frekvenciáinak generátorfüggvénye.

## Example

Ha a lehetséges veszteségek 1, 2 és 4, millió és ezek bekövetkezési valószínűségei  $r_1 = 0,1$ ,  $r_2 = 0,4$  és  $r_4 = 0,5$ , akkor

$$P(z) = 0,1z + 0,4z^2 + 0z^3 + 0,5z^4.$$

# A veszteségek generátorfüggvénye, egy példa

Ha a bekövetkezések száma Poisson-eloszlást alkot, akkor

$$F(z) \doteq \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda^k}{k!} \exp(-\lambda) z^k = \exp(\lambda(z-1)).$$

Vezessük be a  $\mu_j \doteq \lambda r_j$  jelölést. Ekkor

$$P(z) = \sum_{j=0}^M r_j z^j \doteq \sum_{j=0}^M \frac{\mu_j}{\lambda} z^j.$$

$$\widehat{P}(z) \doteq \lambda P(z) = \sum_{j=0}^M \mu_j z^j$$

## Theorem

$$(uv)^{(n)} = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} u^{(k)} v^{(n-k)}.$$

Indukcióval lehet igazolni. Ha  $n = 0$  és  $n = 1$  akkor a formula közismerten igaz..

$$\begin{aligned} (uv)^{(n+1)} &= \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \left( u^{(k)} v^{(n-k)} \right)' = \\ &= \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \left( u^{(k+1)} v^{(n-k)} + u^{(k)} v^{(n+1-k)} \right) = \\ &= \binom{n}{0} v^{(n+1)} + \sum_{k=1}^n u^{(k)} v^{(n+1-k)} \left( \binom{n}{k} + \binom{n}{k-1} \right) + \binom{n}{n} u^{(n+1)} = \\ &= \binom{n+1}{0} v^{(n+1)} + \sum_{k=1}^n u^{(k)} v^{(n+1-k)} \binom{n+1}{k} + \binom{n+1}{n+1} u^{(n+1)} = \\ &= \sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} u^{(k)} v^{(n+1-k)}. \end{aligned}$$

A Poisson-eloszlás képletét használva

$$A_n \doteq \mathbf{P}(L = n) = \frac{1}{n!} G^{(n)}(0),$$

akkor

$$\begin{aligned} \frac{1}{n!} G^{(n)}(0) &= \frac{1}{n!} \frac{d^{n-1}}{dz^{n-1}} \left( \frac{d}{dz} G(0) \right) = \frac{1}{n!} \frac{d^{n-1}}{dz^{n-1}} \left( \lambda G(z) \frac{d}{dz} P(z) \right) = \\ &= \frac{1}{n!} \frac{d^{n-1}}{dz^{n-1}} \left( G(z) \frac{d}{dz} \lambda P(z) \right) = \frac{1}{n!} \frac{d^{n-1}}{dz^{n-1}} \left( G(z) \frac{d}{dz} \hat{P}(z) \right) = \\ &= \frac{1}{n!} \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n-1}{k} G^{(n-k-1)}(0) \hat{P}^{(k+1)}(0) = \\ &= \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{n!} \binom{n-1}{k} A_{n-k-1} (n-k-1)! (k+1)! \mu_{k+1} = \\ &= \sum_{k=0}^{n-1} \frac{k+1}{n} A_{n-k-1} \mu_{k+1}. \end{aligned}$$

Egyszerűen számolva

$$\begin{aligned} & \frac{1}{n!} \binom{n-1}{k} (n-k-1)! (k+1)! = \\ &= \frac{1}{n!} \frac{(n-1)!}{k! (n-1-k)!} (n-k-1)! (k+1)! = \\ & \qquad \qquad \qquad = \frac{k+1}{n}. \end{aligned}$$

Az iteráció induló értéke  $G(0) = \exp(\lambda(P(0) - 1))$ .

What does happen if the distribution of the events is not Poisson? Assume that the generator function of the losses  $G$  has the property

$$\frac{d}{dz} \ln (G(z)) = \frac{A(z)}{B(z)} = \frac{\sum_{k=0}^r a_k z^k}{\sum_{k=0}^s b_k z^k}.$$

That is

$$B(z) \frac{d}{dz} G(z) = G(z) A(z).$$

## Example

A negatív binomiális eloszlással számolva

$$\begin{aligned} \frac{d}{dz} \ln \left( \frac{\beta}{\beta + 1 - P(z)} \right)^\alpha &= \frac{\frac{d}{dz} \left( \frac{\beta}{\beta + 1 - P(z)} \right)^\alpha}{\left( \frac{\beta}{\beta + 1 - P(z)} \right)^\alpha} = \frac{\frac{d}{dz} (\beta + 1 - P(z))^{-\alpha}}{(\beta + 1 - P(z))^{-\alpha}} \\ &= \frac{-\alpha (\beta + 1 - P(z))^{-\alpha-1} P'(z)}{(\beta + 1 - P(z))^{-\alpha}} = \frac{-\alpha P'(z)}{\beta + 1 - P(z)} \stackrel{\circ}{=} \frac{A(z)}{B(z)} \end{aligned}$$



$$\left( \sum_{k=0}^s b_k z^k \right) \left( \sum_{n=0}^{\infty} (n+1) A_{n+1} z^n \right) = \sum_{k=0}^r a_k z^k \left( \sum_{n=0}^{\infty} A_n z^n \right).$$

A  $z^n$ -hez tartozó tagok

$$\sum_{j=0}^{\min(s,n)} b_j (n+1-j) A_{n+1-j}, \quad \sum_{i=0}^{\min(r,n)} a_i A_{n-i}$$

amiből

$$b_0 (n+1) A_{n+1} = \sum_{i=0}^{\min(r,n)} a_i A_{n-i} - \sum_{j=1}^{\min(s,n)} b_j (n+1-j) A_{n+1-j}$$

ami egy rekurzió az  $(A_n)$ .sorozatra.