CreditRisk+

Bevezetés a kockázatkezelésbe

Medvegyev Péter

2009 március

Az alapprobléma

Tekintsünk egy $[0, T]$ időszakot. Mekkora veszteség érhet minket az adott időszak alatt? A veszteség nagysága két dologtól függ:

1. Az egyedi veszteségek nagyságától, és
2. a veszteségek gyakoriságától.

Felteszük, hogy

1. a veszteségek gyakorisága egy számláló folyamatot alkot,
2. a veszteségek nagysága egy ettől független valószínűségi változókból álló sorozat.

A megközelítés nagyrészt a biztosításmatematikából került át a pénzügyekbe és elsősorban az operációs kockázatok modellezésére szokás használni. A nehézség az, hogy a teljes veszteséget leíró így kapott bonyolult valószínűségi változó nehezen kezelhető analitikusan. Az időhorizont általában egy év. Szemben a piaci kockázatokkal a veszteségek nem, vagy csak részben „gyógyulnak vissza".

A kockáztatott érték definíciója

Definition

Egy adott α valószínűséghez tartozó kockáztatott érték az a legkisebb X_α érték, amelyre annak a valószínűsége, hogy a veszteség nagyobb lesz mint X_α kisebb vagy egyenlő mint α.

A CreditRisk+ modell célja az összetett veszteségeloszláshoz tartozó kockáztatott érték kiszámolása.

Lévy-folyamatok definíciója

Definition

Egy X sztochasztikus folyamatot Lévy-folyamatnak mondunk, ha

1. $X(0) = 0$,
2. az X független növekményű,
3. az X stacionárius növekményű,
4. az X trajektóriái jobbról folytonosak és rendelkeznek bal oldali határértékkel.

A Lévy-folyamatok heurisztikusan olyan folyamatok, amelyek időben homogén módon és véletlenszerűen változnak. A folyamat trajektóriái vagy folytonosak, vagy ugrások vannak bennük. Bizonyos értelemben a Lévy-folyamatok a legegyszerűbb és legszemléletesebb sztochasztikus folyamatok.

A Poisson-folyamat definíciója

Definition

A számláló Lévy-folyamatokat Poisson-folyamatoknak mondjuk.

Egy folyamatot számláló folyamatnak mondunk, ha a trajektóriák a $\{0, 1, 2, \ldots\}$ értékeket veszik fel és monoton nőnek. Hangsúlyozni kell, hogy a folyamat értelmezési tartománya a teljes $\mathbb{R}_+$ félegyenes és egy adott időpontig az ugrások száma nem lehet végtelen, így az ugráspontok nem torlódhatnak. A Lévy tulajdonság azt jelenti, hogy az ugráspontok „egyenletesen" elszórva.jelentkeznek, illetve az egyes ugrások időpontja között nincsen kapcsolat. Természetesen az ugrások között eltelt idő véletlenszerű, de az azonos hosszúságú intervallumokba körülbelül azonos számú ugrás esik.

Az első ugrás időpontja exponenciális eloszlást követ

Az első ugrás

$$\tau_1(\omega) \stackrel{\circ}{=} \inf\{t : X(t,\omega) = 1\} = \inf\{t : X(t,\omega) > 0\} < \infty$$

eloszlása exponenciális eloszlást követ, ugyanis

$$\begin{gathered}
\mathbf{P}(\tau_1 > t+s) = \\
= \mathbf{P}(X(t+s) = 0) = \mathbf{P}(X(s) = 0, X(t+s) - X(s) = 0) = \\
= \mathbf{P}(X(s) = 0)\,\mathbf{P}(X(t+s) - X(s) = 0) = \\
= \mathbf{P}(X(s) = 0)\,\mathbf{P}(X(t) = 0),
\end{gathered}$$

így bizonyos $0 < \lambda < \infty$ számra

$$\mathbf{P}(\tau_1 > t) = \mathbf{P}(X(t) = 0) = \exp(-\lambda t).$$

Megállási idők

A megállási idők olyan események bekövetkezésének véletlen időpontjai, amelyek bekövetkezéséről a bekövetkezés időpontjában értesülünk.

Example

Ha valamely esemény először következik be az általában megállási idő, de az, hogy valami utoljára következik be az nem megállási idő. Az hogy a folyamat átmetsz egy szintet az megállási idő, de az, hogy a maximumát vagy a minimumát felveszi nem megállási idő.

Nagyon lényeges, hogy csak megállási idő mentén lehet bámit csinálni. Ha egy esemény bekövetkezésének időpontja nem megállási idő, akkor az esemény lényegében nem figyelhető meg, ugyanis bekövetkezéséről csak utólag értesülünk.

Az erős Markov-tulajdonság

Theorem

Ha X egy Lévy-folyamat és $\tau < \infty$ egy megállási idő, akkor az

$$X^*(t) \overset{\circ}{=} X(t+\tau) - X(\tau)$$

újraindított folyamat

1. *szintén Lévy-folyamat,*
2. *az X^* eloszlása megegyezik az X eloszlásával*
3. *X^* független a τ előtt bekövetkezett eseményektől.*

Az ugrások között eltelt idő is exponeciális

Az erős Markov-tulajdonság miatt az $X_1^*(t) \overset{\circ}{=} X(\tau_1 + t) - X(\tau_1)$ újraindított folyamat eloszlása megegyezik az $X(t)$ folyamat eloszlásával, így az első és a második ugrás között eltelt idő

$$\tau_2(\omega) \overset{\circ}{=} \inf\{t : X(t + \tau_1(\omega), \omega) = 2\} = \inf\{t : X_1^*(t, \omega) > 0\} < \infty$$

azonos eloszlású mint a τ_1 és a τ_1 és a τ_2 függetlenek.

Theorem

Ha az X Poisson-folyamat, akkor az ugrások között eltelt időszakok azonos paraméterű exponenciális eloszlást alkotnak és az egyes ugrások nagysága független.

Előrejelezhető megállási idők

Definition

Egy $\tau > 0$ megállási idő előrejelezhető, ha létezik megállási idők egy (ρ_n) sorozata, amelyre $\rho_n < \tau$ és $\rho_n \nearrow \tau$.

Theorem

A Poisson-folyamatok ugrásai nem előrejelezhetőek.

Ha a τ_1 előrejelezhető lenne, akkor az

$$N_n^*(t) \circeq N(\rho_n + t) - N(\rho_n)$$

Poisson-folyamat lenne λ paraméterrel. Az N_n^* első ugrása $\tau_1 - \rho_n$. De τ_1 és a $\tau_1 - \rho_n$ várható értéke $1/\lambda > 0$. Így

$$\frac{1}{\lambda} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\lambda} = \lim_{n\to\infty} \mathbf{E}(\tau_1 - \rho_n) = \mathbf{E}\left(\lim_{n\to\infty}(\tau_1 - \rho_n)\right) = 0,$$

ami lehetetlen.

A gamma és a béta eloszlások

Definition

Ha λ és az a pozitív számok, akkor az

$$f(x) \doteq \frac{\lambda^a}{\Gamma(a)} x^{a-1} \exp(-\lambda x), \quad x > 0$$

sűrűségfüggvénnyel rendelkező eloszlást (a, λ) paraméterű gamma eloszlásnak mondjuk. Az eloszlást $\Gamma(a, \lambda)$ módon jelöljük.

Definition

Ha α és β pozitív számok, akkor az

$$f(x) \doteq \frac{\Gamma(\alpha+\beta)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} x^{\alpha-1}(1-x)^{\beta-1}, \quad x \in (0,1)$$

sűrűségfüggvénnyel rendelkező eloszlást (α, β) paraméterű béta függvénynek mondjuk. Az eloszlást $B(a, \beta)$-val szokás jelölni.

Examples

Example

$\Gamma(1,\lambda)$ éppen a λ paraméterű exponenciális eloszlás.

Example

$\Gamma(1/2, 1/2)$ éppen a χ_1^2 eloszlás

Legyen $\xi \cong N(0,1)$ és számoljuk ki a $\eta \triangleq \xi^2$ változó eloszlását. Ha $x \leq 0$, akkor $F_\eta(x) = \mathbf{P}(\xi^2 < x) = 0$. Ha $x > 0$, akkor

$$\begin{aligned} F_\eta(x) &= \mathbf{P}(\xi^2 < x) = \mathbf{P}(-\sqrt{x} < \xi < \sqrt{x}) = \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\sqrt{x}}^{\sqrt{x}} \exp\left(-\frac{t^2}{2}\right) dt = \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{\sqrt{x}} \exp\left(-\frac{t^2}{2}\right) dt. \end{aligned}$$

Deriválva, ha $x > 0$, akkor

$$f_\eta(x) = \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{y^2}{2}\right)\Big|_{y=\sqrt{x}} \frac{1}{2\sqrt{x}} = \frac{1}{\sqrt{2\pi x}} \exp\left(-\frac{x}{2}\right).$$

A béta és a gamma függvény közötti kapcsolat

Example

$$B(x,y) = \frac{\Gamma(x)\Gamma(y)}{\Gamma(x+y)}!$$

Legyen

$$\Gamma(x,\lambda) \circeq \int_0^\infty t^{x-1} \exp(-\lambda t)\, dt, \quad x,\lambda > 0.$$

$u = t\lambda$ helyettesítéssel

$$\Gamma(x,\lambda) = \int_0^\infty \left(\frac{u}{\lambda}\right)^{x-1} \exp(-u) \frac{du}{\lambda} = \frac{\Gamma(x)}{\lambda^x}.$$

Az egyik oldalról kiszámolva

$s = t/\left(1-t\right)$ helyettesítéssel

$$
\begin{aligned}
I &\circeq \int_0^\infty \Gamma\left(x+y, 1+s\right) s^{x-1} ds = \int_0^\infty \Gamma\left(x+y\right) \frac{s^{x-1}}{\left(1+s\right)^{x+y}} ds = \\
&= \Gamma\left(x+y\right) \int_0^\infty \left(1+s\right)^{-(x+y)} s^{x-1} ds = \\
&= \Gamma\left(x+y\right) \int_0^1 \left(1+\frac{t}{1-t}\right)^{-(x+y)} \left(\frac{t}{1-t}\right)^{x-1} \frac{1}{\left(1-t\right)^2} dt = \\
&= \Gamma\left(x+y\right) \int_0^1 \left(\frac{1}{1-t}\right)^{-(x+y)} \left(\frac{t}{1-t}\right)^{x-1} \frac{1}{\left(1-t\right)^2} dt = \\
&= \Gamma\left(x+y\right) \int_0^1 t^{x-1} \left(1-t\right)^{y-1} dt \circeq \Gamma\left(x+y\right) B\left(x,y\right).
\end{aligned}
$$

Másik oldalról kiszámolva

$$
\begin{aligned}
I &\overset{\circ}{=} \int_0^\infty \Gamma\left(x+y, 1+s\right) s^{x-1} ds \overset{\circ}{=} \\
&\overset{\circ}{=} \int_0^\infty \int_0^\infty \exp\left(-t\left(1+s\right)\right) t^{x+y-1} s^{x-1} dtds = \\
&= \int_0^\infty \int_0^\infty \exp\left(-t\left(1+s\right)\right) t^{x+y-1} s^{x-1} dsdt = \\
&= \int_0^\infty t^{x+y-1} \exp\left(-t\right) \int_0^\infty \exp\left(-ts\right) s^{x-1} dsdt \overset{\circ}{=} \\
&\overset{\circ}{=} \int_0^\infty t^{x+y-1} \exp\left(-t\right) \Gamma\left(x, t\right) dt = \\
&= \int_0^\infty t^{x+y-1} \exp\left(-t\right) \frac{\Gamma\left(x\right)}{t^x} dt \overset{\circ}{=} \\
&\overset{\circ}{=} \Gamma\left(x\right) \int_0^\infty t^{y-1} \exp\left(-t\right) dt = \Gamma\left(x\right) \Gamma\left(y\right).
\end{aligned}
$$

Example

Calculate the integral

$$\int_{-\infty}^{\infty} \exp\left(-x^2\right) dx!$$

$$\begin{aligned} I &\triangleq \int_0^\infty \int_0^\infty x \exp\left(-x^2\left(1+t^2\right)\right) dx dt = \\ &= \int_0^\infty \left[\frac{\exp\left(-x^2\left(1+t^2\right)\right)}{-2\left(1+t^2\right)}\right]_0^\infty dt = \\ &= \frac{1}{2}\int_0^\infty \frac{1}{1+t^2} dt = \frac{\pi}{4}. \end{aligned}$$

Valószínűségi változók összege

Theorem

Ha ξ és η független valószínűség változók és a ξ sűrűségfüggvénye f az η sűrűségfüggvénye g, akkor a $\xi+\eta$ sűrűségfüggvénye létezik és éppen

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(z)\, g(x-z)\, dz.$$

$$F_{\xi+\eta}(x) = \mathbf{P}(\xi+\eta<x) = \int_{-\infty}^{\infty} \mathbf{E}(\chi(\xi+\eta<x) \mid \xi = z)\, dF(z) =$$
$$= \int_{-\infty}^{\infty} \mathbf{P}(z+\eta<x \mid \xi=z)\, dF(z) = \int_{-\infty}^{\infty} \mathbf{P}(\eta<x-z)\, f(z)\, dz$$

Ezt elég x szerint deriválni.

Nem negatív valószínűségi változók konvolúciója

Ha $\xi \geq 0$ és $\eta \geq 0$, akkor a konvolúciós integrál

$$\int_0^x f(z)\, g(x-z)\, dz$$

alakra egyszerűsödik.

Független gamma eloszlások összege

Theorem

Ha a τ_i független $\Gamma(a_i,\lambda)$ eloszlásúak, akkor a $\sum_{i=1}^n \tau_i$ eloszlása $\Gamma\left(\sum_{i=1}^n a_i,\lambda\right)$.

$$\int_0^x \frac{\lambda^a}{\Gamma(a)}(x-t)^{a-1}\exp(-\lambda(x-t))\frac{\lambda^b}{\Gamma(b)}t^{b-1}\exp(-\lambda t)\,dt =$$

$$= \frac{\lambda^{a+b}}{\Gamma(a)\Gamma(b)}\exp(-\lambda x)\int_0^x (x-t)^{a-1}t^{b-1}dt =$$

$$= \frac{\lambda^{a+b}}{\Gamma(a)\Gamma(b)}\exp(-\lambda x)\int_0^1 (x-xz)^{a-1}(xz)^{b-1}xdz =$$

$$= \frac{\lambda^{a+b}}{\Gamma(a)\Gamma(b)}\exp(-\lambda x)x^{a+b-1}\int_0^1 (1-z)^{a-1}z^{b-1}dz =$$

$$= \frac{\lambda^{a+b}}{\Gamma(a+b)}\exp(-\lambda x)x^{a+b-1}.$$

Poisson-folyamat ugrásainak időpontja

Corollary

Egy Poisson-folyamat n-dik ugrásának időpontja $\Gamma(n, \lambda)$.

Corollary

A χ_n^2 *eloszlása* $\Gamma(n/2, 1/2)$..

Poisson-folyamat és a Poisson-eloszlás

Corollary

Ha X Poisson-folyamat és λ az ugrásokhoz tartozó exponenciális eloszlás paramétere, akkor

$$\mathbf{P}\left(X\left(t\right)=n\right)=\frac{\left(\lambda t\right)^{n}}{n!}\exp\left(-\lambda t\right).$$

Legyen $\sigma_n \triangleq \sum_{k=1}^{n}\tau_k$. A σ_{n+1} eloszlása $\Gamma\left(n+1,\lambda\right)$.

$$\mathbf{P}\left(X\left(t\right)<n+1\right)=\mathbf{P}\left(\sigma_{n+1}>t\right)=\int_t^{\infty}\frac{\lambda^{n+1}}{\Gamma\left(n+1\right)}x^n\exp\left(-\lambda x\right)dx=$$

$$=\left[\frac{\lambda^{n+1}x^n}{\Gamma\left(n+1\right)}\frac{\exp\left(-\lambda x\right)}{-\lambda}\right]_t^{\infty}+\int_t^{\infty}n\frac{\lambda^n x^{n-1}}{\Gamma\left(n+1\right)}\exp\left(-\lambda x\right)dx=$$

$$=\frac{\left(\lambda t\right)^{n}}{n!}\exp\left(-\lambda t\right)+\mathbf{P}\left(X\left(t\right)<n\right).$$

Poisson-folyamat és a Poisson-eloszlás

$$\mathbf{P}\left(X\left(t\right)=n\right)=\mathbf{P}\left(X\left(t\right)<n+1\right)-\mathbf{P}\left(X\left(t\right)<n\right)=\frac{\left(\lambda t\right)^{n}}{n!}\exp\left(-\lambda t\right).$$

Poisson-eloszlás szimulálása

$L \circeq \exp(-\lambda)$, $k \circeq 0$ and $p \circeq 1$.
do:
    $k \circeq k + 1$
    u egyenletes eloszlás generálásas a $[0, 1]$ szakaszon
    $p \circeq p * u$
while $p \geq L$.
return $p - 1$.

Logaritmust véve $\sum \ln u_i \geq -\lambda$ vagyis $\sum \left(-\frac{1}{\lambda} \ln u_i\right) \leq 1$.Az $-1/\lambda \ln u_i$ eloszlása

$$\mathbf{P}\left(-\frac{1}{\lambda} \ln u_i < x\right) = \mathbf{P}(\ln u_i > -\lambda x) = \mathbf{P}(u_i > \exp(-\lambda x)) = 1 - \exp(-\lambda$$

ami exponenciális.

A CreditRisk+ model

Legyen $T > 0$ rögzített intervallum. Mennyi veszteség keletkezik a $[0, T]$ szakaszon? Tegyük fel, hogy

1. a veszteségek bekövetkezése Poisson-folyamat szerint alakul
2. a veszteségek eloszlása azonos
3. a veszteségek függetlenek.

Keresendő

$$X_\alpha \doteq \inf \{X : \mathbf{P}(Loss > X) \leq \alpha\} \doteq Var_\alpha$$

Az össszetett veszteség $Loss = \sum_{k=0}^{\infty} \chi\left(\sigma_k \leq T\right) \xi_k$ ahol $\left(\sigma_k\right)$ az ugrások időpontja és ξ_k a σ_k időpontban bekövetkező veszteség A legegyszerűbb a Laplace-transzformáció kiszámolása. Ha $\mathbf{P}\left(N = k\right) \overset{\circ}{=} p_k$, akkor

$$
\begin{aligned}
L_{Loss}\left(s\right) & \overset{\circ}{=} \mathbf{E}\left(\exp\left(-s \cdot Loss\right)\right) = \mathbf{E}\left(\mathbf{E}\left(\exp\left(-s \cdot Loss\right) \mid N = k\right)\right) = \\
& = \sum_{k=0}^{\infty} \mathbf{E}\left(\exp\left(-s \cdot Loss\right) \mid N = k\right) \cdot p_k = \\
& = \sum_{k=0}^{\infty} \mathbf{E}\left(\exp\left(-s \cdot \sum_{i=0}^{k} \xi_i\right)\right) \cdot p_k = \\
& = \sum_{k=0}^{\infty} \left(\mathbf{E}\left(\exp\left(-s \cdot \xi\right)\right)\right)^k p_k = G\left(L_\xi\left(s\right)\right)
\end{aligned}
$$

ahol $G\left(z\right) \overset{\circ}{=} \sum_{k=0}^{\infty} z^k p_k$ az ugrások számának generátorfüggvénye.

A generátorfüggvény kiszámolása

Example

Ha a veszteségek száma Poisson-eloszlást követ, akkor

$$
\begin{aligned}
G(z) &\overset{\circ}{=} \sum_{k=0}^{\infty} z^k \frac{\lambda^k}{k!} \exp(-\lambda) = \exp(-\lambda) \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(z\lambda)^k}{k!} = \\
&= \exp(-\lambda)\exp(z\lambda) = \exp(\lambda(z-1)).
\end{aligned}
$$

Ha a veszteségek nagysága exponenciális eloszlást követ μ paraméterrel:

$$
\begin{aligned}
L_{\xi}(s) &= \int_0^{\infty} \mu \exp(-\mu x)\exp(-sx)\,dx = \mu \int_0^{\infty} \exp(-(\mu+s)x)\,dx = \\
&= \mu \left[-\frac{\exp(-\mu+s)x}{\mu+s} \right]_0^{\infty} = \frac{\mu}{\mu+s} \\
L_{Loss}(s) &= \exp\left(\lambda\left(\frac{\mu}{\mu+s} - 1\right)\right) = \exp\left(\frac{-\lambda s}{\mu+s}\right).
\end{aligned}
$$

A Poisson-eloszlás paramétere is véletlen

A Poisson-folyamat paramétere számos külső tényezőtől függ. Így nem tudjuk a λ partaméter értékét. Tegyük fel, hogy a feltételes eloszlása lesz Poisson

$$\mathbf{P}\left(N = n \mid \lambda\right) = \frac{\lambda^n}{n!} \exp\left(-\lambda\right).$$

Tegyük fel, hogy a λ eloszlása (α, β) paraméterű gamma eloszlást alkot, ahol (α, β) a külső tényezők eloszlásának függvénye. Mi lesz az N eloszlása?

$$\mathbf{P}\left(N = n\right) = \mathbf{E}\left(\mathbf{P}\left(N = n \mid \lambda\right)\right) = \frac{1}{n!}\left(\mathbf{E}\left(\lambda^n \exp\left(-\lambda\right)\right)\right)$$

A gamma eloszlással való keverés

A gamma eloszlás sűrűségfüggvényének képlete alapján

$$\mathbf{E}\left(\lambda^{\gamma}\exp\left(\lambda z\right)\right)=\int_0^{\infty}\lambda^{\gamma}\exp\left(\lambda z\right)\frac{\beta^{\alpha}}{\Gamma\left(\alpha\right)}\lambda^{\alpha-1}\exp\left(-\beta\lambda\right)d\lambda=$$

$$=\frac{\beta^{\alpha}}{\Gamma\left(\alpha\right)}\int_0^{\infty}\lambda^{\gamma+\alpha-1}\exp\left(-\left(\beta-z\right)\lambda\right)d\lambda=$$

$$=\frac{\beta^{\alpha}\Gamma\left(\alpha+\gamma\right)}{\Gamma\left(\alpha\right)\left(\beta-z\right)^{\alpha+\gamma}}\cdot 1=\frac{\Gamma\left(\alpha+\gamma\right)}{\beta^{\gamma}\Gamma\left(\alpha\right)\left(1-z/\beta\right)^{\alpha+\gamma}}$$

ahol $\beta>z$ és $\alpha+\gamma>0$.

Gamma eloszlással való keverés

Ha $z = -1$, $\gamma = n$ akkor mivel $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$

$$\mathbf{P}(N = n) = \frac{\Gamma(\alpha + n)}{n!\Gamma(\alpha)} \frac{1}{\beta^n} \frac{1}{(1 + 1/\beta)^{\alpha+n}} =$$

$$= \frac{(\alpha + n - 1)\Gamma(\alpha + n - 1)}{n!\Gamma(\alpha)} \frac{1}{\beta^n} \frac{1}{(1 + 1/\beta)^{\alpha+n}} = \cdots =$$

$$= \frac{\prod_{k=0}^{n-1} (\alpha + k)\Gamma(\alpha)}{n!\Gamma(\alpha)} \frac{1}{\beta^n} \frac{1}{(1 + 1/\beta)^{\alpha+n}} \circeq \binom{\alpha + n - 1}{n} p^\alpha q^n$$

ahol $p = \beta/(1+\beta)$, $q = 1/(1+\beta)$. Ezt negatív binomiális eloszlásnak mondják. Ha $\alpha = 1$ a gamma eloszlás exponenciális. Ekkor

$$\mathbf{P}(N = n) = pq^n.$$

A negatív binomiális eloszlás

Ha n egy természetes szám, akkor $\Gamma(n) = (n-1)!$ Így definíció szerint

$$\binom{\alpha+n-1}{n} \triangleq \frac{\Gamma(\alpha+n)}{n!\Gamma(\alpha)} = \frac{\prod_{k=0}^{n-1}(\alpha+k)}{n!}.$$

Másoldalról

$$\binom{-\alpha}{n} \triangleq \frac{-\alpha(-\alpha-1)\ldots(-\alpha-n-1)}{n!} = (-1)^n \frac{\prod_{k=0}^{n-1}(\alpha+k)}{n!}.$$

Következésképpen

$$\mathbf{P}(N=n) = (-1)^n \binom{-\alpha}{n} p^\alpha q^n.$$

A negatív binomiális eloszlás generátorfüggvénye

A Poisson eloszlás generátorfüggvényét és a gamma eloszlás sűrűségfüggvényét használva

$$G(z) \circeq \mathbf{E}\left(z^N\right) = \mathbf{E}\left(\mathbf{E}\left(z^N \mid \lambda\right)\right) \circeq \mathbf{E}\left(G_\lambda(z)\right) =$$

$$= \int_0^\infty G_\lambda(z) \cdot \frac{\beta^\alpha}{\Gamma(\alpha)} \lambda^{\alpha-1} \exp(-\beta\lambda)\, d\lambda =$$

$$= \int_0^\infty \exp(\lambda(z-1)) \cdot \frac{\beta^\alpha}{\Gamma(\alpha)} \lambda^{\alpha-1} \exp(-\beta\lambda)\, d\lambda =$$

$$= \frac{\beta^\alpha}{\Gamma(\alpha)} \int_0^\infty \lambda^{\alpha-1} \exp(-\lambda(\beta+1-z))\, d\lambda =$$

$$= \frac{\beta^\alpha}{\Gamma(\alpha)} \Gamma(a, \beta+1-z) = \frac{\beta^\alpha}{\Gamma(\alpha)} \frac{\Gamma(\alpha)}{(\beta+1-z)^\alpha} = \left(\frac{\beta}{\beta+1-z}\right)^\alpha$$

A veszteségek Laplace-transzformációjának képletét használva

Example

Ha a veszteségek nagysága exponenciális μ paraméterrel, akkor

$$L_{Loss}(s) = G(L_\theta(z)) = \left(\frac{\beta}{\beta + 1 - \frac{\mu}{\mu+s}}\right)^\alpha .$$

A veszteségek generátorfüggvénye

Tegyük fel, hogy a lehetséges eloszlásokat egy diszkrét eloszlással közelítjük. Tegyük fel, hogy a veszteségek valószínűsége $(r_j)_{j=0}^{M}$.

$$\begin{aligned} G(z) &\doteq \sum_{n=0}^{\infty} \mathbf{P}(L=n) z^n \doteq \sum_{n=0}^{\infty} A_n z^n = \mathbf{E}\left(z^L\right) = \mathbf{E}\left(\mathbf{E}\left(z^L\right) \mid N=k\right) = \\ &= \mathbf{E}\left(\mathbf{E}\left(z^{\sum_{k=1}^{N}\xi_k}\right) \mid N=k\right) = \sum_k \mathbf{E}\left(z^{\sum_{i=1}^{k}\xi_i}\right) \cdot p_k = \\ &= \sum_k \left(\mathbf{E}\left(z^{\xi}\right)\right)^k \cdot p_k = F(P(z)), \end{aligned}$$

ahol $P(z) \doteq \sum_{j=0}^{M} z^j r_j$ veszteség generátorfüggvénye és F veszteség frekvenciáinak generátorfüggvénye.

A veszteségek generátorfüggvénye, egy példa

Example

Ha a lehetséges veszteségek $1, 2$ és 4, millió és ezek bekövetkezési valószínűségai $r_1 = 0,1$, $r_2 = 0,4$ és $r_4 = 0,5$, akkor

$$P(z) = 0,1z + 0,4z^2 + 0z^3 + 0,5z^4.$$

A veszteségek generátorfüggvénye, egy példa

Ha a bekövetkezések száma Poisson-eloszlást alkot, akkor

$$F(z) \doteq \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda^k}{k!} \exp(-\lambda) z^k = \exp(\lambda(z-1)).$$

Vezessük be a $\mu_j \doteq \lambda r_j$ jelölést. Ekkor

$$P(z) = \sum_{j=0}^{M} r_j z^j \doteq \sum_{j=0}^{M} \frac{\mu_j}{\lambda} z^j.$$

$$\widehat{P}(z) \doteq \lambda P(z) = \sum_{j=0}^{M} \mu_j z^j$$

Leibnitz formula

Theorem

$(uv)^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} u^{(k)} v^{(n-k)}$.

Indukcióval lehet igazolni. Ha $n = 0$ és $n = 1$ akkor a formula közismerten igaz..

$$(uv)^{(n+1)} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \left(u^{(k)} v^{(n-k)}\right)' =$$

$$= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \left(u^{(k+1)} v^{(n-k)} + u^{(k)} v^{(n+1-k)}\right) =$$

$$= \binom{n}{0} v^{(n+1)} + \sum_{k=1}^{n} u^{(k)} v^{(n+1-k)} \left(\binom{n}{k} + \binom{n}{k-1}\right) + \binom{n}{n} u^{(n+1)} =$$

$$= \binom{n+1}{0} v^{(n+1)} + \sum_{k=1}^{n} u^{(k)} v^{(n+1-k)} \binom{n+1}{k} + \binom{n+1}{n+1} u^{(n+1)} =$$

$$= \sum^{n+1} \binom{n+1}{k} u^{(k)} v^{(n+1-k)}.$$

Panjer rekurzió

A Poisson-eloszlás képletét használva

$$A_n \circeq \mathbf{P}\left(L = n\right) = \frac{1}{n!} G^{(n)}\left(0\right),$$

akkor

$$\frac{1}{n!} G^{(n)}\left(0\right) = \frac{1}{n!} \frac{d^{n-1}}{dz^{n-1}} \left(\frac{d}{dz} G\left(0\right)\right) = \frac{1}{n!} \frac{d^{n-1}}{dz^{n-1}} \left(\lambda G\left(z\right) \frac{d}{dz} P\left(z\right)\right) =$$

$$= \frac{1}{n!} \frac{d^{n-1}}{dz^{n-1}} \left(G\left(z\right) \frac{d}{dz} \lambda P\left(z\right)\right) = \frac{1}{n!} \frac{d^{n-1}}{dz^{n-1}} \left(G\left(z\right) \frac{d}{dz} \widehat{P}\left(z\right)\right) =$$

$$= \frac{1}{n!} \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n-1}{k} G^{(n-k-1)}\left(0\right) \widehat{P}^{(k+1)}\left(0\right) =$$

$$= \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{n!} \binom{n-1}{k} A_{n-k-1} \left(n-k-1\right)! \left(k+1\right)! \mu_{k+1} =$$

$$= \sum_{k=0}^{n-1} \frac{k+1}{n} A_{n-k-1} \mu_{k+1}.$$

Panjer rekurzióban szereplő konstansok

Egyszerűen számolva

$$\frac{1}{n!}\binom{n-1}{k}(n-k-1)!\,(k+1)! =$$
$$= \frac{1}{n!}\frac{(n-1)!}{k!\,(n-1-k)!}(n-k-1)!\,(k+1)! =$$
$$= \frac{k+1}{n}.$$

Az iteráció induló értéke $G(0) = \exp(\lambda(P(0)-1))$.

Generalization

What does happen if the distribution of the events is not Poisson? Assume that the generator function of the losses G has the property

$$\frac{d}{dz}\ln\left(G\left(z\right)\right)=\frac{A\left(z\right)}{B\left(z\right)}=\frac{\sum_{k=0}^{r}a_k z^k}{\sum_{k=0}^{s}b_k z^k}.$$

That is

$$B\left(z\right)\frac{d}{dz}G\left(z\right)=G\left(z\right)A\left(z\right).$$

Example

A negatív binomiális eloszlással számolva

$$\frac{d}{dz}\ln\left(\frac{\beta}{\beta+1-P(z)}\right)^{\alpha}=\frac{\frac{d}{dz}\left(\frac{\beta}{\beta+1-P(z)}\right)^{\alpha}}{\left(\frac{\beta}{\beta+1-P(z)}\right)^{\alpha}}=\frac{\frac{d}{dz}\left(\beta+1-P(z)\right)^{-\alpha}}{\left(\beta+1-P(z)\right)^{-\alpha}}$$

$$=\frac{-\alpha\left(\beta+1-P(z)\right)^{-\alpha-1}P'(z)}{\left(\beta+1-P(z)\right)^{-\alpha}}=\frac{-\alpha P'(z)}{\beta+1-P(z)}\circeq\frac{A(z)}{B(z)}$$

Általánosítás

$$\left(\sum_{k=0}^{s} b_k z^k\right)\left(\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)\,A_{n+1}z^n\right)=\sum_{k=0}^{r} a_k z^k\left(\sum_{n=0}^{\infty}A_n z^n\right).$$

A z^n-hez tartozó tagok

$$\sum_{j=0}^{\min(s,n)} b_j\,(n+1-j)\,A_{n+1-j}, \qquad \sum_{i=0}^{\min(r,n)} a_i A_{n-i}$$

amiből

$$b_0\,(n+1)\,A_{n+1}=\sum_{i=0}^{\min(r,n)} a_i A_{n-i}-\sum_{j=1}^{\min(s,n)} b_j\,(n+1-j)\,A_{n+1-j}$$

ami egy rekurzió az (A_n).sorozatra.