8. fejezet

Transzformált valószínűségi változók

A valószínűségszámítás tárgya a valószínűségi változók eloszlásának vizsgálata. Az eloszlásokkal kapcsolatban felmerülő leggyakoribb probléma a transzformált változók eloszlásának meghatározása. A probléma számos szempontból az elemi valószínűségszámításhoz tartozik. Ebben a fejezetben az idevágó legfontosabb eredményeket tekintjük át.

8.1. Transzformált változók sűrűségfüggvénye

Ha $(\xi_k)_{k=1}^n$ az $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$ téren értelmezett valószínűségi változók, és g az $\mathbb{R}^n$ téren értelmezett Borel-mérhető függvény, akkor az

$$\eta \mathrel{\hat{=}} g(\xi_1, \ldots, \xi_n)$$

összefüggéssel definiált függvény szintén $\mathcal{A}$-mérhető, vagyis valószínűségi változó. Ebben a fejezetben azt vizsgáljuk, hogy a ξ_k változók eloszlásából hogyan lehet meghatározni az η eloszlását.

8.1 Állítás.
Ha a $(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n)$ vektor együttes sűrűségfüggvénye f, és valamely h függvényre minden $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ halmazra

$$\int_B h d\lambda = \int_{g^{-1}(B)} f d\lambda_n,$$

akkor a h éppen az $\eta \mathrel{\hat{=}} g(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n)$ sűrűségfüggvénye.

Bizonyítás: Ha $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$, akkor mivel f a $(\xi_1, \ldots, \xi_n)$ sűrűségfüggvénye, ezért

$$\begin{aligned}
\int_B h d\lambda &= \int_{g^{-1}(B)} f d\lambda_n = \\
&= \mathbf{P}\left((\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n) \in g^{-1}(B)\right) = \\
&= \mathbf{P}\left(g(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n) \in B\right) \stackrel{\circ}{=} \mathbf{P}(\eta \in B).
\end{aligned}$$

□

Ha a $(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n)$ vektornak van sűrűségfüggvénye, akkor a transzformált változó sűrűségfüggvénye az integráltranszformációs tétel alapján egyszerűen meghatározható. Tegyük fel, hogy a ξ_k-kat az η_k-ra képező transzformáció

$$\varphi : (x_1, x_2, \ldots, x_n) \to (y_1, y_2, \ldots, y_n).$$

A dimenzió azonossága a φ értelmezési tartományánál és értékkészleténél általában nem jelent megszorítást, például az $\eta \stackrel{\circ}{=} g(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n)$ esetben

$$\varphi(x_1, x_2, \ldots, x_n) \stackrel{\circ}{=} (g(x_1, x_2, \ldots, x_n), x_2, x_3, \ldots, x_n). \tag{8.1}$$

Ha f a ξ_k változók együttes sűrűségfüggvénye, akkor a transzformációs tétel alapján minden B Borel-halmazra

$$\begin{aligned}
F(B) &\stackrel{\circ}{=} \mathbf{P}\left((\varphi_1(\xi_1, \ldots, \xi_n), \ldots, \varphi_n(\xi_1, \ldots, \xi_n)) \in B\right) \\
&= \mathbf{P}\left((\xi_1, \ldots, \xi_n) \in \varphi^{-1}(B)\right) = \int_{\varphi^{-1}(B)} f d\lambda_n = \\
&= \int_{T(B)} f d\lambda_n = \\
&= \int_B f(T) \left|\det(T')\right| d\lambda_n,
\end{aligned}$$

feltéve persze, hogy a tétel feltételei teljesülnek, vagyis a $T \stackrel{\circ}{=} \varphi^{-1}$ létezik és differenciálható. Ez alapján érvényes a következő állítás:

8.2 Állítás.
Ha f a $(\xi_1, \ldots, \xi_k)$ vektor sűrűségfüggvénye,

$$(\eta_1, \ldots, \eta_k) \stackrel{\circ}{=} \varphi(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_k),$$

és a φ^{-1} függvény létezik és differenciálható, akkor az $(\eta_1, \ldots, \eta_k)$ sűrűségfüggvénye

$$h(x_1, \ldots, x_k) \stackrel{\circ}{=} f\left(\varphi^{-1}(x_1, \ldots, x_n)\right) \left|\det\left(\frac{d}{dx}\varphi^{-1}(x_1, \ldots, x_n)\right)\right|.$$

Az állítás a alapján ha $\eta \stackrel{\circ}{=} g(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n)$ és φ a **(??)** sorban definiált leképezés, akkor η éppen az

$$(\eta, \xi_2, \xi_3 \ldots, \xi_n) \stackrel{\circ}{=} \varphi(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n)$$

vektor premeleloszlása. Ha h jelöli az η sűrűségfüggvényét, és φ-re teljesülnek az imént belátott állítás feltételei, akkor

$$h(x_1) = \int_{\mathbb{R}} \cdots \int_{\mathbb{R}} f\left(\varphi^{-1}(x_1, \ldots, x_n)\right) \left|\det\left(\frac{d}{dx}\varphi^{-1}(x_1, \ldots, x_n)\right)\right| dx_2 dx_3 \ldots dx_n.$$

8.2. Normális eloszlás függvényei

A valószínűségszámítás legfontosabb eloszlása a normális. Ebben a pontban a normális eloszlásból származtatható eloszlásokat tekintjük át.

8.2.1. Normális eloszlású változók hatványai

Legyen $\xi \cong N(0,1)$ és határozzuk meg az $\eta \stackrel{\circ}{=} \xi^2$ eloszlását. Ha $x \leq 0$, akkor $F_\eta(x) = \mathbf{P}\left(\xi^2 < x\right) = 0$. Ha $x > 0$ akkor

$$\begin{aligned} F_\eta(x) &= \mathbf{P}\left(\xi^2 < x\right) = \mathbf{P}\left(-\sqrt{x} < \xi < \sqrt{x}\right) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\sqrt{x}}^{\sqrt{x}} \exp\left(-\frac{t^2}{2}\right) dt = \\ &= \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{\sqrt{x}} \exp\left(-\frac{t^2}{2}\right) dt. \end{aligned}$$

Deriválással, ha $x > 0$

$$f_\eta(x) = \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{y^2}{2}\right)\Bigg|_{y=\sqrt{x}} \frac{1}{2\sqrt{x}} = \frac{1}{\sqrt{2\pi x}} \exp\left(-\frac{x}{2}\right).$$

Számoljuk ki a várható értéket és a szórást!

$$\mathbf{M}(\eta) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} x^2 \exp\left(-\frac{x^2}{2}\right) dx = 1 \tag{8.2}$$

$$\begin{aligned} \mathbf{D}^2(\eta) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} x^4 \exp\left(-\frac{x^2}{2}\right) dx - 1^2 = \\ &= \frac{4}{\sqrt{\pi}} \int_0^\infty t^{3/2} \exp(-t)\, dt - 1 = \\ &= \frac{4}{\sqrt{\pi}} \Gamma(5/2) - 1 = \frac{4}{\sqrt{\pi}} \frac{3}{2} \frac{1}{2} \Gamma(1/2) - 1 = 2. \end{aligned} \tag{8.3}$$

A gondolatmenetet általánosítva tekintsük az $N(0,1)$ eloszlás n-dik hatványát, vagyis amikor $\eta \stackrel{\circ}{=} \xi^n$. Két esetet kell megkülönböztetni: ha n páros, illetve ha n páratlan. Kezdjük a páratlan esettel. Ekkor az $x \mapsto x^n = x^{2k+1}$ kifejezés szigorúan monoton nő.

$$F_\eta(x) = \mathbf{P}(\xi^n < x) = \mathbf{P}\left(\xi < \sqrt[n]{x}\right) = F_\xi\left(\sqrt[n]{x}\right) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\sqrt[n]{x}} \exp\left(-\frac{t^2}{2}\right) dt.$$

Ebből deriválással

$$f_\eta(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{y^2}{2}\right)\Bigg|_{y=\sqrt[n]{x}} \frac{1}{n} x^{\frac{1}{n}-1} = \frac{1}{n\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{\sqrt[n]{x^2}}{2}\right) \frac{1}{x^{\frac{n-1}{n}}}.$$

Ha $n = 2k$ páros, akkor

$$\begin{aligned} F_\eta(x) &= \mathbf{P}(\xi^n < x) = \mathbf{P}\left(-\sqrt[n]{x} < \xi < \sqrt[n]{x}\right) = \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\sqrt[n]{x}}^{\sqrt[n]{x}} \exp\left(-\frac{t^2}{2}\right) dt = \\ &= \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{\sqrt[n]{x}} \exp\left(-\frac{t^2}{2}\right) dt. \end{aligned}$$

Ebből deriválással, ha $x > 0$

$$f_\eta(x) = \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{y^2}{2}\right)\bigg|_{y=\sqrt[n]{x}} \frac{1}{n} x^{1/n-1} = \frac{2}{n\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{\sqrt[n]{x^2}}{2}\right) \frac{1}{x^{(n-1)/n}}.$$

Számoljuk ki a várható értéket és a szórást!

$$\mathbf{M}(\eta) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} x^n \exp\left(-\frac{x^2}{2}\right) dx.$$

Ha n páratlan, akkor az integrál értéke nulla, mivel az integrandus páratlan. Ha az $n = 2k$, akkor az integrandus páros. Ekkor $x^2/2 = t$ helyettesítéssel

$$\begin{aligned} \mathbf{M}(\eta) &= \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \int_0^\infty t^k 2^k \exp(-t) \frac{1}{\sqrt{2t}} dt = \frac{2^k}{\sqrt{\pi}} \int_0^\infty t^{k-1/2} \exp(-t)\, dt = \\ &= (2k-1)!! = (n-1)!!. \\ \mathbf{D}^2(\eta) &= \mathbf{M}\left(\eta^2\right) - \mathbf{M}^2(\eta) = \\ &= \begin{cases} (2n-1)!! & \text{ha} \quad n = 2k+1 \\ (2n-1)!! - ((n-1)!!)^2 & \text{ha} \quad n = 2k \end{cases}. \end{aligned}$$

8.2.2. Lévy-eloszlás

Legyen $\xi \cong N(0, \sigma)$, számoljuk ki az $\eta \circeq 1/\xi^2$ eloszlását[1]!

$$F_\eta(x) = \mathbf{P}\left(\frac{1}{\xi^2} < x\right) = \mathbf{P}\left(\xi^2 > \frac{1}{x}\right) = 1 - \frac{2}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_0^{\sqrt{1/x}} \exp\left(-\frac{t^2}{2\sigma^2}\right) dt.$$

Az eloszlás sűrűségfüggvénye

$$f_\eta(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2x^3\pi}} \exp\left(-\frac{1}{2\sigma^2 x}\right), \quad x > 0. \tag{8.4}$$

[1] Az η eloszlását szokás még inverznormális eloszlásnak is nevezni.

Az eloszlás várható értéke[2]

$$\begin{aligned}\int_0^\infty x\frac{1}{\sqrt{2x^3\pi}}\exp\left(-\frac{1}{2x}\right)dx &= \int_0^\infty \frac{1}{\sqrt{2x\pi}}\exp\left(-\frac{1}{2x}\right)dx = \\ &= \frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_0^\infty \sqrt{u}\exp\left(-u\right)\frac{1}{2}u^{-2}du = \\ &= \frac{1}{2\sqrt{\pi}}\int_0^\infty u^{-3/2}\exp\left(-u\right)du = \infty.\end{aligned}$$

8.2.3. Logaritmikusan normális eloszlás

Legyen $\xi \cong N\left(\mu,\sigma\right)$ normális eloszlású valószínűségi változó μ várható értékkel és σ szórással. Tekintsük az $\eta \overset{\circ}{=} \exp\left(\xi\right)$ változót. Ha $x \leq 0$, akkor $F_\eta\left(x\right) = 0$, ha $x > 0$, akkor

$$\begin{aligned}F_\eta\left(x\right) &= \mathbf{P}\left(\exp\left(\xi\right) < x\right) = \mathbf{P}\left(\xi < \ln x\right) = \Phi_{\mu,\sigma}\left(\ln x\right) = \\ &= \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\ln x}\exp\left(-\frac{\left(t-\mu\right)^2}{2\sigma^2}\right)dt.\end{aligned}$$

Ha $x > 0$, akkor deriválással

$$f_\eta\left(x\right) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\exp\left(-\frac{\left(y-\mu\right)^2}{2\sigma^2}\right)\Bigg|_{y=\ln x}\frac{1}{x} = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\frac{1}{x}\exp\left(-\frac{\left(\ln x-\mu\right)^2}{2\sigma^2}\right).$$

Mivel az $\ln\eta$ változó eloszlása normális, ezért az η-ról azt mondjuk, hogy logaritmikusan normális, röviden lognormális eloszlású változó. Határozzuk meg az η várható értékét és szórását!

$$\begin{aligned}\mathbf{M}\left(\eta\right) &= \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\int_{\mathbb{R}}\exp\left(x\right)\exp\left(-\frac{\left(x-\mu\right)^2}{2\sigma^2}\right)dx = \\ &= \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\int_{\mathbb{R}}\exp\left(x-\frac{\left(x-\mu\right)^2}{2\sigma^2}\right)dx = \\ &= \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\int_{\mathbb{R}}\exp\left(x-\frac{x^2-2x\mu+\mu^2}{2\sigma^2}\right)dx = \\ &= \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\int_{\mathbb{R}}\exp\left(-\frac{\left(x-\left(\mu+\sigma^2\right)\right)^2}{2\sigma^2}\right)\exp\left(\mu+\frac{\sigma^2}{2}\right)dx = \\ &= \exp\left(\mu+\frac{\sigma^2}{2}\right)\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\int_{\mathbb{R}}\exp\left(-\frac{\left(x-\left(\mu+\sigma^2\right)\right)^2}{2\sigma^2}\right)dx = \\ &= \exp\left(\mu+\frac{\sigma^2}{2}\right).\end{aligned}$$

[2] A sűrűségfüggvény képletéből látható, hogy a várható értéket megadó integrál alulról becsülhető a $c/\sqrt{x}$ kifejezéssel, így az integrál közvetlen kiszámolása nélkül is evidens, hogy az integrál értéke végtelen.

A szórás meghatározásához tekintsük a következőket:

$$\begin{aligned}
\mathbf{D}^2(\eta) &= \mathbf{M}\left((\exp(\xi))^2\right) - \mathbf{M}^2(\exp(\xi)) = \\
&= \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} \exp(2x) \exp\left(-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right) dx - \left(\exp\left(\mu + \frac{\sigma^2}{2}\right)\right)^2 .
\end{aligned}$$

Számoljuk ki az integrált!

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} \exp(2x) \exp\left(-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right) dx = \\
= & \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} \exp\left(-\frac{\left(x - \left(\mu + 2\sigma^2\right)\right)^2}{2\sigma^2} + \frac{4\mu\sigma^2 + 4\sigma^4}{2\sigma^2}\right) dx = \\
= & \frac{\exp\left(2\mu + 2\sigma^2\right)}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} \exp\left(-\frac{\left(x - \left(\mu + 2\sigma^2\right)\right)^2}{2\sigma^2}\right) dx = \\
= & \exp\left(2\mu + 2\sigma^2\right) .
\end{aligned}$$

Ez alapján

$$\begin{aligned}
\mathbf{D}^2(\eta) &= \exp\left(2\mu + 2\sigma^2\right) - \left(\exp\left(\mu + \frac{\sigma^2}{2}\right)\right)^2 = \\
&= \exp\left(2\mu + \sigma^2\right)\left(\exp\left(\sigma^2\right) - 1\right) = \\
&= \mathbf{M}^2(\eta)\left(\exp\left(\sigma^2\right) - 1\right) .
\end{aligned} \tag{8.5}$$

Térjünk rá a momentumok vizsgálatára. A lognormális eloszlás érdekes tulajdonsága, hogy az eloszlást nem határozzák meg a momentumai[3]. Az egyszerűbb számolás végett tegyük fel, hogy $\mu = 0$ és $\sigma = 1$. Számoljuk ki a momentumokat!

$$\begin{aligned}
\mathbf{M}\left(\eta^k\right) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} \exp(kx) \exp\left(-\frac{x^2}{2}\right) dx = \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} \exp\left(-\frac{x^2 - 2kx}{2}\right) dx = \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} \exp\left(-\frac{(x-k)^2}{2} + \frac{k^2}{2}\right) dx = \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(\frac{k^2}{2}\right) \int_{\mathbb{R}} \exp\left(-\frac{(x-k)^2}{2}\right) dx = \\
&= \exp\left(\frac{k^2}{2}\right) .
\end{aligned}$$

Legyen

$$f(x) = \frac{1}{x\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{\ln x^2}{2}\right), \quad x > 0$$

[3]A momentumok túl gyorsan nőnek!

az eloszlás sűrűségfüggvénye és tekintsük a

$$g(x) = f(x)(1 + \sin(2\pi \ln(x))), \quad x > 0$$

függvényt. Mivel $g(x) \geq 0$ és

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}} g(x)\,dx &= \int_0^\infty \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{1}{x} \exp\left(-\frac{\ln^2(x)}{2}\right)(1 + \sin(2\pi \ln(x)))\,dx = \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^\infty \exp\left(-\frac{u^2}{2}\right)(1 + \sin(2\pi u))\,du = \\
&= 1 + \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} \exp\left(-\frac{u^2}{2}\right) \sin(2\pi u)\,du = 1
\end{aligned}$$

ezért a g egy eloszlás sűrűségfüggvénye[4]. Vegyük észre, hogy a g és az f momentumai megegyeznek, hiszen

$$\begin{aligned}
&\int_{\mathbb{R}} x^k (f(x) - g(x))\,dx = \\
&= \int_0^\infty x^k \frac{1}{x\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{\ln^2(x)}{2}\right) \sin(2\pi \ln(x))\,dx = \\
&= \int_0^\infty \frac{1}{x\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{\ln^2(x) - 2k\ln(x)}{2}\right) \sin(2\pi \ln(x))\,dx = \\
&= \int_0^\infty \frac{1}{x\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{(\ln(x) - k)^2}{2} + \frac{k^2}{2}\right) \sin(2\pi \ln(x))\,dx = \\
&= \exp\left(\frac{k^2}{2}\right) \int_{-\infty}^\infty \exp\left(-\frac{u^2}{2}\right) \sin(2\pi(u + k))\,du = \\
&= \exp\left(\frac{k^2}{2}\right) \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^\infty \exp\left(-\frac{u^2}{2}\right) \sin(2\pi u)\,du = 0.
\end{aligned}$$

Tanulságos megvizsgálni az eloszlás momentumgeneráló függvényét[5].

$$\begin{aligned}
M(s) &\stackrel{\circ}{=} \mathbf{M}(\exp(s\eta)) = \int_0^\infty \exp(sx) \frac{1}{x\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{\ln^2(x)}{2}\right) dx = \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^\infty \exp\left(s \exp(u) - \frac{u^2}{2}\right) du.
\end{aligned}$$

Ha $s \geq 0$, akkor az integrál végtelen, és mivel $\eta > 0$, ezért a momentumgeneráló függvénye biztosan értelmezve van az $s \leq 0$ számokra, tehát az $M(s)$ értelmezési tartománya a $(-\infty, 0]$ halmaz.

[4]Az utolsó integrál értékének kiszámolásakor felhasználtuk, hogy az integrandus páratlan, és ezért az integrálja nulla.

[5]V.ö.: 10.7. definíció, 451. oldal.

8.2.4. Normális eloszlás szimulálása

Hogyan lehet számítógéppel egyszerűen normális eloszlást szimulálni? Miként ismert, a $(0,1)$ intervallumon értelmezett egyenletes eloszlású változó generálása egyszerű. A (7.16) összefüggés szerint ha az η egyenletes eloszlású a $(0,1)$ intervallumon, akkor

$$\mathbf{P}\left(F^{-1}(\eta) < x\right) = \mathbf{P}(\eta < F(x)) = F(x),$$

tehát az $F^{-1}(\eta)$ eloszlása F. Ez alapján egyenletes eloszlásból könnyen készíthetünk olyan eloszlást, amely eloszlásfüggvényének létezik inverze, és az inverz hatékonyan számolható[6]. A normális eloszlás esetén ilyen formula nincsen. Hatékony, és főleg egyszerű, módszer a következő[7]:

8.3 Állítás.
Ha δ_1, δ_2 független, a $(0,1)$ intervallumon egyenletes eloszlású változók, akkor a

$$\xi \mathrel{\hat{=}} \sqrt{-2\ln\delta_1}\cos(2\pi\delta_2), \quad \eta \mathrel{\hat{=}} \sqrt{-2\ln\delta_1}\sin(2\pi\delta_2)$$

változók függetlenek, és $\xi \cong \eta \cong N(0,1)$.

Bizonyítás: A módszer igazolása céljából vegyünk két független $N(0,1)$ változót, és a (ξ,η) párt tekintsük az $\mathbb{R}^2$ sík véletlenül kiválasztott pontjának. Mi történik, ha (ρ,φ) polárkoordinátákra térünk át? A (ρ,φ) eloszlását a 8.2. állítás alapján írhatjuk fel. Legyen

$$S(\rho,\varphi) \mathrel{\hat{=}} \rho(\cos\varphi, \sin\varphi) = (x,y)$$

a polárkoordinátákról való visszatérést megadó leképezés. Az S az origón kívül, vagyis a $\rho > 0$ tartományon injektív, és az origótól eltekintve teljesíti az integráltranszformációs tétel feltételeit. Az origó nullamértékű halmaz, ezért az alábbi számolások végrehajthatók. Könnyen látható, hogy

$$|\det(S')| = \left|\det\begin{pmatrix} \cos t & \sin t \\ -r\sin t & r\cos t \end{pmatrix}\right| = r.$$

Ha A Borel-halmaz, akkor egyszerű számolással[8]

$$\begin{aligned}
\mathbf{P}((\rho,\varphi)\in A) &= \mathbf{P}\left(S^{-1}(\xi,\eta)\in A\right) = \mathbf{P}((\xi,\eta)\in S(A)) = \\
&= \frac{1}{2\pi}\int\int_{S(A)} \exp\left(-\frac{1}{2}\left(x^2+y^2\right)\right) dxdy = \\
&= \frac{1}{2\pi}\int\int_{A} \exp\left(-\frac{1}{2}r^2\right) rdrdt,
\end{aligned}$$

amiből a (ρ,φ) sűrűségfüggvénye

$$f(r,t) \mathrel{\hat{=}} \frac{1}{2\pi}\exp\left(-\frac{r^2}{2}\right) r = g(r)\,h(t),$$

[6] Ilyen az exponenciális vagy a Cauchy- eloszlás.
[7] Ez az úgynevezett Box—Muller módszer.
[8] V.ö: 8.2. állítás, 276. oldal.

ahol

$$\begin{aligned} g(r) &\mathrel{\circeq} r\exp\left(-\frac{r^2}{2}\right), \quad r>0, \\ h(t) &\mathrel{\circeq} \frac{1}{2\pi}, \quad t\in(0,2\pi), \end{aligned}$$

vagyis a polárkoordináták is függetlenek, a szög a $(0,2\pi)$ intervallumban egyenletes eloszlású, a sugár eloszlásának sűrűségfüggvénye[9] pedig $r\exp\left(-r^2/2\right)$. A gondolatmenet megfordítható: ha a (ρ,φ) pár eloszlása éppen ilyen, akkor a (ξ,η) két független normális eloszlást definiál. Normális eloszlású változók szimulálása tehát visszavezethető egy egyenletes, és egy $r\exp\left(-r^2/2\right)$ sűrűségfüggvényű változó szimulálására. Ha a δ a $(0,1)$ intervallumon egyenletes eloszlású, akkor a $\rho \mathrel{\circeq} \sqrt{-2\ln\delta}$ eloszlása

$$\mathbf{P}(\rho<r)=\mathbf{P}\left(\delta>\exp\left(-\frac{1}{2}r^2\right)\right)=1-\exp\left(-\frac{1}{2}r^2\right),$$

amely sűrűségfüggvénye éppen az $r\exp\left(-r^2/2\right)$.

□

A trigonometrikus függvények elhagyásával a módszer némiképpen hatékonyabbá[10] tehető. Legyen a (δ_1,δ_2) az origó körüli 1 sugarú körben egyenletes eloszlású[11]. Ha $\rho \mathrel{\circeq} \sqrt{\delta_1^2+\delta_2^2}$ a (δ_1,δ_2) véletlenül választott pont origótól való távolsága, akkor

$$\mathbf{P}\left(\rho^2<x\right)=\mathbf{P}\left(\rho<\sqrt{x}\right)=\frac{\left(\sqrt{x}\right)^2\pi}{\pi}=x,$$

ami alapján a ρ^2 $(0,1)$ egyenletes. Ha polárkoordinátákra térünk át, akkor

$$\mathbf{P}((\rho,\varphi)\in A)=\mathbf{P}((\delta_1,\delta_2)\in T(A))=\frac{1}{\pi}\int_{T(A)}dxdy=\frac{1}{2\pi}\int_A 2rdrdt,$$

amiből a polárkoordináták függetlenek,[12] és a sűrűségfüggvényeik

$$\begin{aligned} g(r) &\mathrel{\circeq} 2r, \quad r\in(0,1), \\ h(t) &\mathrel{\circeq} \frac{1}{2\pi}, \quad t\in(0,2\pi), \end{aligned}$$

amely alapján a φ szög független a sugártól, és a $(0,2\pi)$ intervallumban egyenletes eloszlású. Mivel

$$\cos\varphi=\frac{\delta_1}{\rho}, \quad \sin\varphi=\frac{\delta_2}{\rho},$$

[9] A később bevezetett definíció alapján a sugár eloszlása χ_2.

[10] Átlagos PC-n a gépidő nyereség kb 20%.

[11] Ilyen párt két a $(0,1)$ szakaszon egyenletes eloszlású változóból könnyű csinálni. Ha v_i $(0,1)$ egyenletes, akkor A $2\nu_i-1$ változók $(-1,1)$ egyenletesek, a szimulálás során pedig el kell hagyni azokat a párokat, amelyek kívül esnek a körön. Könnyen látható, hogy a leszűkített eloszlás egyenletes. Mivel a pontok $\pi/4=0,7684\ldots$ valószínűséggel a körön belül lesznek, körülbelül minden negyedik szimulált párt kell elhagyni.

[12] Az eredeti Descartes koordináták nem függetlenek!

ezért a már belátottak alapján a

$$\xi \stackrel{\circ}{=} \delta_1 \sqrt{-\frac{\ln \rho^2}{\rho^2}}, \quad \eta \stackrel{\circ}{=} \delta_2 \sqrt{-\frac{\ln \rho^2}{\rho^2}}$$

változók független $N(0,1)$ eloszlást alkotnak.

8.3. Valószínűségi változók összege

Legyenek ξ és η független változók. Célunk meghatározni az $\zeta \stackrel{\circ}{=} \xi + \eta$ eloszlását. A ζ F eloszlásfüggvénye

$$F(z) = \mathbf{P}(\zeta < z) = \mathbf{P}(\xi + \eta < z) = \mathbf{P}((\xi, \eta) \in B(z)),$$

ahol $B(z) \stackrel{\circ}{=} \{(x, y) : x + y < z\}$. Ha H jelöli a ξ és G az η eloszlásfüggvényét, és a két eloszlás független, akkor a Fubini-tétel alapján

$$\begin{aligned} \mathbf{P}((\xi, \eta) \in B(z)) &= \int_{B(z)} d(H \times G) = \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} \chi_{B(z)}(x, y)\, dH(x)\, dG(y) = \\ &= \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} \chi_{B(z,y)}(x)\, dH(x)\, dG(y), \end{aligned}$$

ahol $B(z, y)$ a $B(z)$ halmaz y-szerinti metszete, vagyis

$$B(z, y) \stackrel{\circ}{=} \{x : (x, y) \in B(z)\} = \{x : x + y < z\} = \{x : x < z - y\}.$$

Ez alapján

$$F(z) = \int_{\mathbb{R}} \int_{-\infty}^{z-y} dH(x)\, dG(y) = \int_{\mathbb{R}} H(z - y)\, dG(y).$$

8.4 Definíció.
Az

$$\int_{\mathbb{R}} H(z - y)\, dG(y) \tag{8.6}$$

képlettel megadott eloszlást a G és a H eloszlások konvolúciójának mondjuk és a $H \star G$ módon jelöljük.

8.5 Állítás.
Független valószínűségi változók összegének eloszlása az összeadandók eloszlásának konvolúciója.

8.6 Következmény.
A (8.5) művelet kommutatív és asszociatív.

Célszerű hangsúlyozni, hogy az eloszlások konvolúciója algebrai szempontból emlékeztet az összadásra, de mivel a változók és az eloszlásfüggvények között nincs bijekció, ezért a konvolúciúra nem érvényes a „törlési szabály”, vagyis a konvolúció, szemben az összeadással, nem csoport, és nem is ágyazható be csoportba[13].

Ha a ξ és az η nem független és f a (ξ, η) együttes sűrűségfüggvénye, akkor $F(z) = \int_{B(z)} f d\lambda_2$. Ha

$$\widetilde{f}(x, y) \mathrel{\hat{=}} \begin{cases} f(x, y) & \text{ha} \quad x + y < z \\ 0 & \text{ha} \quad x + y \geq z \end{cases},$$

akkor $F(z) = \int_{\mathbb{R}^2} \widetilde{f} d\lambda_2$, amely Fubini-tétele alapján kettős integrállá írható, vagyis

$$F(z) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{z-y} f(x, y)\, dxdy.$$

A belső integrálban $u = x + y$ helyettesítést végezve

$$F(z) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{z} f(u - y, y)\, dudy.$$

Az f helyett ismét az $\widetilde{f}$ függvényt írva, majd megint felhasználva a Fubini-tételt az integrálokat felcserélhetjük:

$$F(z) = \int_{-\infty}^{z} \int_{-\infty}^{\infty} f(u - y, y)\, dydu. \tag{8.7}$$

A Fubini-tétel alapján az

$$s(u) \mathrel{\hat{=}} \int_{-\infty}^{\infty} f(u - y, y)\, dy = \int_{-\infty}^{\infty} f(x, u - x)\, dx \tag{8.8}$$

függvény integrálható és a (8.6) miatt az $s(u)$ éppen a $\xi + \eta$ sűrűségfüggvénye. Ha ξ és η függetlenek, akkor $f(x, y) = h(x)\, g(y)$, és a (8.7) képlet által definiált sűrűségfüggvény éppen a ξ és az η sűrűségfüggvényének konvolúciója:

$$s(u) \mathrel{\hat{=}} \int_{-\infty}^{\infty} h(u - y)\, g(y)\, dy = \int_{-\infty}^{\infty} h(x)\, g(u - x)\, dx. \tag{8.9}$$

8.7 Példa.
Egyenletes eloszlású változók konvolúciója.

Emlékeztetünk, hogy az elemi valószínűségszámításban geometriai valószínűségi mezőn az olyan valószínűségi mezőket értjük, ahol $\Omega \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$, $\mathcal{A}$ az Ω Borel-halmazai, és $\mathbf{P}(A) \mathrel{\hat{=}} \lambda_n(A) / \lambda_n(\Omega)$. A definícióban természetesen $\lambda(\Omega) < \infty$. Az $\Omega \subseteq$

[13] V.ö.: 10.38. példa, 481. oldal. A törlési szabály azt jelenti, hogy a $H * F = G * F$ egyenlőségből mikor következik a $H = G$. Miként később látni fogjuk, ha karakterisztikus függvényekre térünk át, akkor ez $\varphi_H \varphi_F = \varphi_G \varphi_F$ egyenlőséget jelenti, amelyből a φ_F csak akkor hagyható el, ha minden t esetén $\varphi_F(t) \neq 0$. Ez teljesül például a normális eloszlásra, illetve általánosabban minden korlátlanul osztható eloszlásra.

$\mathbb{R}^n$ halmazon értelmezett $(\xi_k)_{k=1}^n$ változókat egyenletes eloszlásúnak mondjuk, ha az együttes eloszlásuk az Ω halmazon geometriai valószínűségi mezőt alkot. Ha a ξ és az η változók az $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$ halmazon egyenletes eloszlásúak, akkor a $\xi + \eta$ s sűrűségfüggvénye

$$s(u) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\chi_\Omega(u-x,x)}{\lambda_2(\Omega)} dx = \frac{\lambda(\Omega \cap H(u))}{\lambda_2(\Omega)},$$

ahol $H(u) \circeq \{y + x = u\}$ az y tengelyt az u pontban metsző -1 meredekségű egyenes. Például, ha Ω az origó középpontú, $r = 1$ sugarú kör és a $(\xi.\eta)$ pár a körlemezen egyenletes eloszlású, akkor a $\xi + \eta$ sűrűségfüggvénye

$$s(u) = \frac{\sqrt{2}}{\pi}\sqrt{2-u^2}, \ -\sqrt{2} < u < \sqrt{2}.$$

□

8.8 Következmény.
Ha a H és a G eloszlásoknak van h, illetve g sűrűségfüggvénye, akkor a $H \star G$ eloszlásnak is van sűrűségfüggvénye, amely éppen a sűrűségfüggvények (8.8) konvolúciója. Ha a H vagy a G eloszlásnak van sűrűségfüggvénye, akkor a $H \star G$ konvolúciónak is van sűrűségfüggvénye.

Bizonyítás: Csak az utolsó állítást kell igazolni. A H sűrűségfüggvénye legyen h. Ha $F \circeq H \star G$, akkor

$$\begin{aligned} F(x) &= \int_{\mathbb{R}} H(x-y)\, dG(y) = \int_{\mathbb{R}} \int_{-\infty}^{x-y} h(u)\, d\lambda(u)\, dG(y) = \\ &= \int_{\mathbb{R}} \int_{-\infty}^{x} h(v-y)\, d\lambda(v)\, dG(y) = \int_{-\infty}^{x} \int_{\mathbb{R}} h(v-y)\, dG(y)\, d\lambda(v), \end{aligned}$$

tehát az F konvolúció sűrűségfüggvénye

$$f(x) \circeq \int_{\mathbb{R}} h(x-y)\, dG(y).$$

Érdemes megjegyezni, hogy az f formálisan az F-ből az integrál mögött való deriválással is megkapható.

□

8.9 Állítás.
Ha integrálható függvényekre a konvolúció műveletét a $*$ jellel jelöljük, akkor könnyen látható, hogy teljesülnek az alábbi állítások:

$$\begin{aligned} f * g &= g * f \\ (f * g) * h &= f * (g * h) \\ (f + g) * h &= f * h + g * h. \end{aligned}$$

Érdemes megjegyezni, hogy a (8.7) összefüggés az integráltranszformációs tétel alapján is meghatározható. Ha $\varphi(x,y) \triangleq (x+y,y)$, akkor $\varphi^{-1}(u,v) = (u-v,v)$, és ezért a $\varphi(\xi,\eta) = (\xi+\eta,\eta)$ vektor sűrűségfüggvénye $f(u-v,v)$, amiből a $\xi+\eta$ sűrűségfüggvénye az első változó szerinti peremeloszlás sűrűségfüggvénye, vagyis $s(u) = \int_{\mathbb{R}} f(u-v,v)\,dv$.

8.10 Definíció.
A (ξ,η) vektor eloszlása normális, ha az együttes sűrűségfüggvényük

$$f(x,y) \triangleq \frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2\sqrt{1-r^2}}\times$$

$$\times\exp\left(-\frac{1}{2(1-r^2)}\left(\frac{(x-\mu_1)^2}{\sigma_1^2} - 2r\frac{(x-\mu_1)(y-\mu_2)}{\sigma_1\sigma_2} + \frac{(y-\mu_2)^2}{\sigma_2^2}\right)\right),$$

ahol μ_1 és μ_2 a megfelelő várható értékek, σ_1 és σ_2 a szórások és r a korrelációs együttható.

8.11 Példa.
Ha a (ξ,η) eloszlása normális, akkor a $\xi+\eta$ eloszlása is normális[14].

A (8.7) alapján az összeg sűrűségfüggvénye

$$g(z) = \frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2\sqrt{1-r^2}}\int_{\mathbb{R}} h(z,y)\,dy,$$

ahol a $h(z,y)$ integrandus

$$\exp\left(-\frac{1}{2(1-r^2)}\left(\frac{(y-\mu_1)^2}{\sigma_1^2} - 2r\frac{(y-\mu_1)(z-y-\mu_2)}{\sigma_1\sigma_2} + \frac{(z-y-\mu_2)^2}{\sigma_2^2}\right)\right).$$

Az egyszerűbb jelölés végett $v \triangleq z-\mu_1-\mu_2$, és végezzük el az $u \triangleq y-\mu_1$ helyettesítést.

$$g(z) = \frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2\sqrt{1-r^2}}\times$$

$$\int_{\mathbb{R}}\exp\left(-\frac{1}{2(1-r^2)}\left(\frac{u^2}{\sigma_1^2} - 2r\frac{u(v-u)}{\sigma_1\sigma_2} + \frac{(v-u)^2}{\sigma_2^2}\right)\right)du.$$

Az exponenciális függvény kitevőjében levő zárójeles kifejezést teljes négyzetté alakítva, majd a négyzetes tagra

$$t(u) \triangleq \frac{1}{\sqrt{1-r^2}}u\frac{\sqrt{\sigma_2^2+2r\sigma_1\sigma_2+\sigma_1^2}}{\sigma_1\sigma_2} - \frac{v}{\sigma_2}\frac{r\sigma_2+\sigma_1}{\sqrt{\sigma_2^2+2r\sigma_1\sigma_2+\sigma_1^2}},$$

[14] Később, a karakterisztikus függvény segítségével újra be fogjuk látni az állítást. Az itt közölt gondolatmenet azért érdemel figyelmet, mivel jól példázza, hogy időnként a közvetlen, a definícióra épülő út, bár esetleg elemi, mégsem mindig a legjobb, a legvilágosabb. Matematikában igen gyakran két pont között a legjobb út a kerülő út!

helyettesítést végezve némi számolás után

$$g(z) = \frac{1}{\sqrt{\sigma_2^2 + 2r\sigma_1\sigma_2 + \sigma_1^2}\sqrt{2\pi}} \exp\left(\frac{1}{2}\frac{v^2}{\sigma_2^2 + 2r\sigma_1\sigma_2 + \sigma_1^2}\right).$$

Bevezetve a

$$\mu \mathrel{\hat{=}} \mu_1 + \mu_2, \quad \sigma \mathrel{\hat{=}} \sqrt{\sigma_2^2 + 2r\sigma_1\sigma_2 + \sigma_1^2} \tag{8.10}$$

jelöléseket és a v-t visszahelyettesítve

$$g(z) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left(\frac{(z-\mu)^2}{2\sigma^2}\right).$$

□

8.12 Példa.
Két normális eloszlású valószínűségi változó összege nem feltétlenül normális!

Természetesen az előzőek alapján ez csak akkor fordulhat elő, ha az összeadandók együttes eloszlása nem normális. Legyenek F_1 illetve F_2 kétdimenziós normális eloszlások. Tekintsük az $F \mathrel{\hat{=}} (F_1 + F_2)/2$ eloszlásfüggvényt[15]. Tegyük fel, hogy mind a két eloszlásra nézve mind a két peremeloszlás várható értéke nulla, szórása egy, és az F_1-hez tartozó r_1 korrelációs együttható különbözik az F_2-höz tartozó r_2 együtthatótól. Az F-nek van sűrűségfüggvénye, amely a két sűrűségfüggvény $1/2$ súllyal vett kombinációja.

$$\begin{aligned} f(x,y) &= \frac{1}{4\pi\sqrt{1-r_1^2}} \exp\left(-\frac{1}{2(1-r_1^2)}\left(x^2 - 2r_1xy + y^2\right)\right) + \\ &+ \frac{1}{4\pi\sqrt{1-r_2^2}} \exp\left(-\frac{1}{2(1-r_2^2)}\left(x^2 - 2r_2xy + y^2\right)\right). \end{aligned}$$

A definíciókból világos, hogy az x és y szerinti peremeloszlásokra[16]

$$\begin{aligned} g(x) &\mathrel{\hat{=}} \int_{\mathbb{R}} f(x,y)\,dy = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{x^2}{2}\right), \\ h(y) &\mathrel{\hat{=}} \int_{\mathbb{R}} f(x,y)\,dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{y^2}{2}\right). \end{aligned}$$

Ha a (ξ, η) eloszlása F, akkor a ξ és az η standard normális eloszlású. Számoljuk ki a $\xi + \eta$ összeg eloszlását! A (8.7) és (8.9) képletek alapján az összeg sűrűségfüggvénye

$$\int_{\mathbb{R}} f(z-y,y)\,dy = \frac{1}{2}\frac{1}{\sigma_1\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{z^2}{2\sigma_1^2}\right) + \frac{1}{2}\frac{1}{\sigma_2\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{z^2}{2\sigma_2^2}\right)$$

ahol $\sigma_1 \mathrel{\hat{=}} \sqrt{2(1+r_1)}$, $\sigma_2 \mathrel{\hat{=}} \sqrt{2(1+r_2)}$. Mivel $r_1 \neq r_2$, ezért $\sigma_1 \neq \sigma_2$, ezért az összeg eloszlása nem normális.

□

[15] Az F eloszlás nem normális.

[16] Tehát a peremeloszlások standard normális eloszlást alkotnak.

8.3.1. χ^2-eloszlás

Az n szabadságfokú χ_n^2 változót mint n darab független, standard normális eloszlású változók négyzetének összegét definiáljuk. A χ_n^2 eloszlását χ_n^2 eloszlásnak mondjuk. Ha $n = 1$, akkor, miként már láttuk, a $\chi_1^2 \cong N(0,1)^2$ sűrűségfüggvénye

$$k_1(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi x}} \exp\left(-\frac{x}{2}\right), \quad x > 0.$$

Az indukciós sejtés szerint

$$k_n(x) = \frac{1}{2^{n/2}\Gamma(n/2)} x^{n/2-1} \exp\left(-\frac{x}{2}\right), \quad x > 0. \tag{8.11}$$

A (8.8) szerint

$$k_{n+1}(x) = \int_{\mathbb{R}} k_1(x-y) k_n(y)\,dy = \int_0^\infty k_1(x-y) k_n(y)\,dy,$$

hiszen ha $y \leq 0$, akkor $k_n(y) = 0$. Ha $x \leq 0$, $y \geq 0$, akkor $x - y \leq 0$, amiből $k_1(x-y) = 0$, vagyis ha $x \leq 0$, akkor $k_{n+1}(x) = 0$. Ha $x > 0$, akkor a $k_1(x-y)k_n(y)$ a $[0,x]$ intervallumon kívül nulla, vagyis

$$\begin{aligned} k_{n+1}(x) &= \int_0^x k_1(x-y) k_n(y)\,dy = \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{\exp(-x/2)}{2^{n/2}\Gamma(n/2)} \int_0^x \frac{y^{n/2-1}}{\sqrt{x-y}} dy. \end{aligned}$$

A $t = y/x$ helyettesítéssel

$$\begin{aligned} k_{n+1}(x) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{\exp(-x/2)}{2^{n/2}\Gamma(n/2)} \int_0^1 \frac{x^{n/2-1}t^{n/2-1}}{\sqrt{x-tx}} x dt = \\ &= \frac{x^{n/2-1}\sqrt{x}}{\sqrt{2\pi}} \frac{\exp(-x/2)}{2^{n/2}\Gamma(n/2)} B\left(\frac{n}{2}, \frac{1}{2}\right), \end{aligned}$$

ahol $B(x,y)$ a béta függvény. A béta és a gamma függvény közötti azonosságot[17] valamint a $\Gamma(1/2) = \sqrt{\pi}$ összefüggést[18] felhasználva

$$\begin{aligned} k_{n+1}(x) &= \frac{x^{(n+1)/2-1}}{\sqrt{2\pi}} \frac{\exp(-x/2)}{2^{n/2}\Gamma(n/2)} \frac{\Gamma(n/2)\Gamma(1/2)}{\Gamma((n+1)/2)} = \\ &= \frac{x^{(n+1)/2-1}}{\sqrt{2}} \frac{\exp(-x/2)}{2^{n/2}\Gamma((n+1)/2)} = \\ &= \frac{1}{2^{(n+1)/2}\Gamma((n+1)/2)} x^{(n+1)/2-1} \exp\left(-\frac{x}{2}\right). \end{aligned}$$

A várható értéket és a szórást a (8.1) és a (8.2) alapján könnyű meghatározni, mivel a függetlenség miatt a várható értékek és a szórás négyzetek összeadódnak.

$$\mathbf{M}\left(\chi_n^2\right) = n\mathbf{M}\left(\chi_1^2\right) = n, \quad \mathbf{D}^2\left(\chi_n^2\right) = n\mathbf{D}^2\left(\chi_1^2\right) = 2n.$$

[17] V.ö.: 2.80. példa, 70. oldal.

[18] V.ö.: (**??**) sor, **??**. oldal.

8.3.2. χ-eloszlás

Az n szabadságfokú χ_n eloszlást, mint a χ_n^2 eloszlású változók négyzetgyökének eloszlását definiáljuk. A sűrűségfüggvényekre vonatkozó transzformációs formula alapján, ha $x > 0$, akkor a h_n sűrűségfüggvény

$$\begin{aligned} h_n(x) &= k_n\left(x^2\right)2x = \frac{\left(x^2\right)^{n/2-1}\exp\left(-x^2/2\right)}{2^{n/2}\Gamma(n/2)}2x = \\ &= \frac{1}{2^{n/2-1}\Gamma(n/2)}x^{n-1}\exp\left(-\frac{x^2}{2}\right). \end{aligned}$$

Számoljuk ki a szórást és a várható értéket!

$$\mathbf{M}(\chi_n) = \int_0^\infty xk_n(x)\,dx = \frac{1}{2^{n/2-1}\Gamma(n/2)}\int_0^\infty x^n\exp\left(-\frac{x^2}{2}\right)dx.$$

A szokásos $t = x^2/2$ helyettesítéssel

$$\begin{aligned} \mathbf{M}(\chi_n) &= \frac{1}{2^{n/2-1}\Gamma(n/2)}\int_0^\infty 2^{n/2}t^{n/2}\exp(-t)\frac{1}{\sqrt{2t}}dt = \\ &= \frac{\sqrt{2}}{\Gamma(n/2)}\int_0^\infty t^{(n+1)/2-1}\exp(-t)\,dt = \\ &= \sqrt{2}\frac{\Gamma((n+1)/2)}{\Gamma(n/2)}. \\ \mathbf{D}^2(\chi_n) &= \mathbf{M}\left(\chi_n^2\right) - \mathbf{M}(\chi_n)^2 = n - 2\frac{\Gamma((n+1)/2)^2}{\Gamma(n/2)^2}. \end{aligned}$$

A χ_3 eloszlást szokás Maxwell-eloszlásnak[19] is nevezni. A χ_3 sűrűségfüggvénye

$$\begin{aligned} h_3(x) &= \frac{2x^{3-1}\exp\left(-x^2/2\right)}{2^{3/2}\Gamma(3/2)} = \frac{1}{\sqrt{2}\Gamma(3/2)}x^2\exp\left(-\frac{x^2}{2}\right) = \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}(1/2)\Gamma(1/2)}x^2\exp\left(-\frac{x^2}{2}\right) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}x^2\exp\left(-\frac{x^2}{2}\right), \end{aligned}$$

várható értéke és szórása

$$\begin{aligned} \mathbf{M}(\chi_3) &= \sqrt{2}\frac{\Gamma\left(\frac{3+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{3}{2}\right)} = \sqrt{2}\frac{\Gamma(2)}{\Gamma\left(\frac{3}{2}\right)} = \frac{\sqrt{2}}{\frac{1}{2}\sqrt{\pi}} = 2\sqrt{\frac{2}{\pi}}, \\ \mathbf{D}^2(\chi_3) &= 3 - 2\frac{\Gamma\left(\frac{3+1}{2}\right)^2}{\Gamma\left(\frac{3}{2}\right)^2} = 3 - \frac{2\Gamma^2(2)}{\Gamma\left(\frac{3}{2}\right)^2} = 3 - \frac{2}{\frac{1}{4}\pi} = 3 - \frac{8}{\pi}. \end{aligned}$$

[19] A χ_3 az ideális gáz atomjainak sebességeloszlását adja meg az $\mathbb{R}^3$ térben.

8.4. Valószínűségi változók szorzata és hányadosa

Legyenek ξ és η valószínűségi változók, és legyen f az együttes sűrűségfüggvényük. Határozzuk meg a $\zeta \circeq \xi/\eta$, illetve a $\phi \circeq \xi \cdot \eta$ változók sűrűségfüggvényét! Megjegyezzük, hogy mivel feltételeztük, hogy a (ξ, η) párnak létezik f sűrűségfüggvénye, ezért

$$\mathbf{P}(\eta = 0) = \mathbf{P}((\xi, \eta) \in \mathbb{R} \times \{0\}) = \int_{\mathbb{R} \times \{0\}} f d\lambda_2 = 0,$$

vagyis, bár a hányados, mint valószínűségi változó nem feltétlenül minden kimenetre értelmes, de egy nullmértékű halmaztól eltekintve értelmes, vagyis valószínűségi változó, amelynek az eloszlása egyértelműen meghatározott. Legyen h a ζ sűrűségfüggvénye, és H jelölje az eloszlásfüggvényt.

$$H(z) = \mathbf{P}\left(\frac{\xi}{\eta} < z\right) = \mathbf{P}((\xi, \eta) \in B(z)),$$

ahol

$$\begin{aligned} B(z) &\circeq \left\{(x, y) : \frac{x}{y} < z, y \neq 0\right\} = \\ &= \{(x, y) : x < zy,\ y > 0\} \cup \{(x, y) : x > zy,\ y < 0\}. \end{aligned}$$

Ha f a (ξ, η) sűrűségfüggvénye, akkor $H(z) = \int_{B(z)} f d\lambda_2$. Az integrált a Fubini-tétel alapján kettős integrállá alakítva

$$H(z) = \int_{\mathbb{R}} \int_{B(z,y)} f(x, y)\, dx dy,$$

ahol

$$B(z, y) \circeq \begin{cases} (-\infty, zy) & \text{ha} \quad y > 0 \\ (zy, +\infty) & \text{ha} \quad y < 0 \end{cases}.$$

Az x szerinti belső integrálban $uy = x$ helyettesítést végezve, ha $y > 0$, akkor

$$\int_{-\infty}^{z} f(uy, y)\, y du,$$

ha pedig $y < 0$, akkor

$$\int_{z}^{-\infty} f(uy, y)\, y du = \int_{-\infty}^{z} f(uy, y)(-y)\, du.$$

Az $y = 0$ eset valószínűsége nulla, így összefoglalva

$$H(z) = \int_{\mathbb{R}} \int_{-\infty}^{z} f(uy, y)\, |y|\, du dy.$$

Fubini-tétel alapján felcserélve az integrálokat

$$H(z) = \int_{-\infty}^{z} \int_{\mathbb{R}} f(uy, y)\, |y|\, dy du.$$

Mivel ismételten a Fubini-tétel alapján az

$$u \mapsto \int_{\mathbb{R}} f(uy, y)\,|y|\,dy$$

függvény integrálható, ezért a $H(z)$-nek létezik h sűrűségfüggvénye, és

$$h(u) = \int_{\mathbb{R}} f(uy, y)\,|y|\,dy. \tag{8.12}$$

Ha ξ és η független, akkor

$$h(u) = \int_{\mathbb{R}} f_{\xi}(uy)\, f_{\eta}(y)\,|y|\,dy. \tag{8.13}$$

8.13 Példa.
Normális eloszlású változók hányadosa Cauchy-eloszlású.

Ha ξ és η független $N(0,1)$ eloszlású változók, akkor a hányadosuk sűrűségfüggvénye

$$\begin{aligned} h(u) &\overset{\circ}{=} \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}} \exp\left(-\frac{1}{2}(yu)^2\right)\exp\left(-\frac{1}{2}y^2\right)|y|\,dy = \\ &= \frac{1}{\pi}\int_0^{\infty} \exp\left(-\frac{1}{2}y^2\left(1+u^2\right)\right) y\,dy = \\ &= \frac{1}{\pi\left(u^2+1\right)}, \end{aligned}$$

vagyis a ξ/η hányados Cauchy-eloszlású. Az $|\eta|$ sűrűségfüggvénye

$$\frac{2}{\sqrt{2\pi}}\exp\left(-\frac{1}{2}y^2\right),$$

így a számolást megismételve azonnal látható, hogy a $\xi/|\eta|$ szintén Cauchy-eloszlású. Teljesen analóg módon ha $(\xi_1, \ldots, \xi_n)$ n-darab független $N(0,1)$ eloszlású változó, és a ξ_0 a többi változótól független, és szintén $N(0,1)$ eloszlású, akkor a

$$\left(\frac{\xi_1}{\xi_0}, \ldots, \frac{\xi_n}{\xi_0}\right)$$

eloszlásának sűrűségfüggvénye[20]

$$\begin{aligned} h\left(u_1,\dots u_n\right) &= \frac{1}{\left(\sqrt{2\pi}\right)^{n+1}}\int_{\mathbb{R}}\exp\left(-\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}\left(yu_k\right)^2\right)\exp\left(-\frac{1}{2}y^2\right)|y|^n\,dy = \\ &= \frac{2}{\left(\sqrt{2\pi}\right)^{n+1}}\int_0^\infty \exp\left(-\frac{1}{2}y^2\left(\sum_{k=1}^{n}u_k^2+1\right)\right)y^n dy = \\ &= \frac{2}{\left(\sqrt{2\pi}\right)^{n+1}}\frac{1}{\left(\sum_{k=1}^n u_k^2+1\right)^{\frac{n+1}{2}}}\int_0^\infty \exp\left(-\frac{1}{2}v^2\right)v^n dv = \\ &= \frac{2}{\left(\sqrt{2\pi}\right)^{n+1}}\frac{\left(\sqrt{2}\right)^{n-1}}{\left(\sum_{k=1}^n u_k^2+1\right)^{\frac{n+1}{2}}}\int_0^\infty \exp\left(-s\right)s^{\frac{n+1}{2}-1}ds = \\ &= \frac{\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)}{\pi^{(n+1)/2}}\cdot\frac{1}{\left(\sum_{k=1}^n u_k^2+1\right)^{\frac{n+1}{2}}}. \end{aligned}$$

Analóg számolással látható, hogy a

$$\left(\frac{\xi_1}{|\xi_0|},\dots,\frac{\xi_n}{|\xi_0|}\right)$$

eloszlásának sűrűségfüggvénye szintén h.

□

Térjünk rá a szorzatra. Legyen s a $\phi \mathrel{\hat{=}} \xi\cdot\eta$ szorzat sűrűségfüggvénye és jelölje S az eloszlásfüggvényt.

$$S\left(z\right)=\mathbf{P}\left(\xi\eta<z\right)=\mathbf{P}\left(\left(\xi,\eta\right)\in B\left(z\right)\right),$$

ahol

$$B\left(z\right)\mathrel{\hat{=}}\left\{\left(x,y\right):xy<z\right\}.$$

Ha f a (ξ,η) sűrűségfüggvénye, akkor $S\left(z\right)=\int_{B(z)}fd\lambda_2$. Az integrált a Fubini-tétel alapján kettős integrállá alakítva

$$S\left(z\right)=\int_{\mathbb{R}}\int_{B(z,y)}f\left(x,y\right)dxdy,$$

ahol

$$B\left(z,y\right)\mathrel{\hat{=}}\begin{cases}\left(-\infty,z/y\right) & \text{ha} \quad y>0\\ \left(-\infty,\infty\right) & \text{ha} \quad y=0,z>0\\ \emptyset & \text{ha} \quad y=0,z\le 0\\ \left(z/y,\infty\right) & \text{ha} \quad y<0\end{cases}.$$

Az x szerinti belső integrálban $x=u/y$ helyettesítést végezve, ha $y>0$, akkor

$$\int_{-\infty}^{z}f\left(\frac{u}{y},y\right)\frac{1}{y}du,$$

[20] Vegyük észre, hogy az $|y|$ az n-edik hatványon szerepel, ugyanis a (8.10) meghatározásakor az $|y|$ kifejezéssel minden komponensnél a helyettesítéskor szorozni kell.

ha pedig $y < 0$, akkor

$$\int_z^{-\infty} f\left(\frac{u}{y}, y\right) \frac{1}{y} du = \int_{-\infty}^{z} f\left(\frac{u}{y}, y\right) \frac{-1}{y} du.$$

Az $y = 0$ eset mértéke nulla, ezért összefoglalva

$$S(z) = \int_{\mathbb{R}} \int_{-\infty}^{z} f\left(\frac{u}{y}, y\right) \left|\frac{1}{y}\right| du dy,$$

ahol az egyszerűség kedvéért az integrandus nulla, ha $y = 0$. Fubini-tétel alapján felcserélve az integrálokat

$$S(z) = \int_{-\infty}^{z} \int_{\mathbb{R}} f\left(\frac{u}{y}, y\right) \left|\frac{1}{y}\right| dy du.$$

Mivel ismételten a Fubini-tétel alapján az

$$u \mapsto \int_{\mathbb{R}} f\left(\frac{u}{y}, y\right) \left|\frac{1}{y}\right| dy$$

függvény integrálható, ezért az $S(z)$-nek létezik s sűrűségfüggvénye és

$$s(u) = \int_{\mathbb{R}} f\left(\frac{u}{y}, y\right) \left|\frac{1}{y}\right| dy. \tag{8.14}$$

Ha ξ és η független, akkor

$$s(u) = \int_{\mathbb{R}} f_\xi\left(\frac{u}{y}\right) f_\eta(y) \left|\frac{1}{y}\right| dy.$$

Ismét érdemes megjegyezni, hogy a (8.10) és a (8.12) összefüggések az integráltranszformációs tétel alapján is meghatározhatók. Ha például

$$\varphi(x, y) \stackrel{\circ}{=} (xy, y),$$

akkor a $G = \{(u, v) : v \neq 0\}$ halmazon

$$\varphi^{-1}(u, v) = \left(\frac{u}{v}, v\right),$$

a derivált determinánsának abszolút értéke

$$\left|\det\begin{pmatrix} 1/v & -u/v^2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right| = \left|\frac{1}{v}\right|,$$

ezért a φ-vel transzformált eloszlás sűrűségfüggvénye

$$f\left(\frac{u}{v}, v\right)\left|\frac{1}{v}\right|,$$

amiből a $\xi \cdot \eta$ sűrűségfüggvénye az első változó szerinti peremeloszlás sűrűségfüggvénye, vagyis

$$s(u) = \int_{\mathbb{R}} f\left(\frac{u}{v}, v\right) \left|\frac{1}{v}\right| dv.$$

A formulák megjegyzésében talán segít a következő némiképpen heurisztikus gondolatmenet: Ha ξ és η valószínűségi változók, akkor a ξ/η értéke úgy lehet u ha valamilyen y-ra a ξ értéke uy és az η értéke y. A sűrűségfüggvény interpretációja alapján

$$\mathbf{P}(\eta \approx y) \approx f_\eta(y)\, dy.$$

Számoljuk ki annak a valószínűségét, hogy ξ értéke közelítőleg uy, vagyis számoljuk ki annak a valószínűségét, hogy a ξ/y közelítőleg u, vagyis számoljuk ki a ξ/y sűrűségfüggvényét az u helyen. Ha $y > 0$, akkor

$$F_{\xi/y}(x) \circeq \mathbf{P}\left(\frac{\xi}{y} < x\right) = \mathbf{P}(\xi < yx) = F_\xi(yx).$$

Ebből x szerint deriválva $\mathbf{P}(\xi \approx yu) \approx f_\xi(yu)\, ydu$. Ha $y < 0$, akkor

$$F_{\xi/y}(x) \circeq \mathbf{P}\left(\frac{\xi}{y} < x\right) = \mathbf{P}(\xi > yx) = 1 - F_\xi(yx),$$

amit deriválva x szerint $\mathbf{P}(\xi \approx yu) \approx -f_\xi(yu)\, ydu$. Ebből következően tetszőleges y-ra

$$\mathbf{P}(\xi \approx yu) = f_\xi(yu)\, |y|\, du.$$

Az y lehetséges értékeire összegezve, ha $h(u)\, du$ jelöli a $\xi/\eta \approx u$ esemény valószínűségét, akkor a ξ és az η függetlensége miatt

$$\begin{aligned}
h(u)\, du &\approx \mathbf{P}\left(\frac{\xi}{\eta} \approx u\right) \approx \sum_y \mathbf{P}(\xi \approx yu, \eta \approx y) = \\
&= \sum_y \mathbf{P}(\xi \approx yu)\, \mathbf{P}(\eta \approx y) \approx \\
&\approx \sum_y \mathbf{P}(\xi \approx yu)\, f_\eta(y)\, dy \approx \\
&\approx \int_{\mathbb{R}} \mathbf{P}(\xi \approx yu)\, f_\eta(y)\, dy \approx \\
&\approx \int_{\mathbb{R}} f_\xi(yu)\, |y|\, du f_\eta(y)\, dy.
\end{aligned}$$

A du kifejezéssel osztva

$$h(u) = \int_{\mathbb{R}} f_\xi(yu)\, |y|\, f_\eta(y)\, dy.$$

A $\xi\eta$ sűrűségfüggvényére vonatkozó képlet heurisztikus indoklása analóg módon végezhető el.

8.14 Példa.
Független normális eloszlású változók szorzatának sűrűségfüggvénye.

Ha ξ és η független $N(0,1)$ eloszlású változók, akkor a szorzatuk sűrűségfüggvénye:

$$\begin{aligned} s(u) &= \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}} \exp\left(-\frac{1}{2}\left(\frac{u}{v}\right)^2\right)\exp\left(-\frac{1}{2}v^2\right)\frac{1}{|v|}dv = \\ &= \frac{1}{\pi}\int_0^\infty \exp\left(-\frac{1}{2}\left(\frac{u^2}{v^2}+v^2\right)\right)\frac{1}{v}dv = \\ &= \frac{1}{\pi}\frac{1}{2}\int_0^\infty \exp\left(-\left(\frac{u^2}{4t}+t\right)\right)\frac{1}{t}dt = \frac{1}{\pi}K_0(|u|), \end{aligned}$$

ahol a K_0 a módosított Bessel-függvények családjába tartozó úgynevezett Mac-Donald-függvény. A K_0 integrált szokás a megfelelő Bessel-függvény Zommerfeld-féle alakjának is mondani[21]. Érdemes megjegyezni, hogy a K_0 az $u=0$ pontban $+\infty$. A K_0 függvény néhány jellemző értéke:

$u:$	$0,1$	$0,5$	1	$1,5$	2	$2,5$	3
$K_0(u):$	$2,4271$	$0,9244$	$0,4210$	$0,2138$	$0,1139$	$0,0623$	$0,0347$

A függvény egy másik fontos tulajdonsága, hogy ha $u\to\infty$, akkor

$$K_0(u) = \sqrt{\frac{\pi}{2u}}\exp(-u)\left(1+O\left(\frac{1}{u}\right)\right).$$

□

8.15 Példa.
Két független Cauchy-eloszlású változó szorzatának sűrűségfüggvénye

$$s(u) = \frac{2\ln|u|}{\pi^2(u^2-1)}.$$

Valóban, ha ξ és η független Cauchy-eloszlású változók, akkor a szorzatuk sűrűségfüggvénye:

$$\begin{aligned} s(u) &= \frac{1}{\pi^2}\int_{\mathbb{R}} \frac{1}{1+(u/y)^2}\frac{1}{1+y^2}\frac{1}{|y|}dy = \\ &= \frac{2}{\pi^2}\int_0^\infty \frac{y}{y^2+u^2}\frac{1}{1+y^2}dy = \\ &= \frac{2}{\pi^2}\int_0^\infty \frac{y}{u^2-1}\left[\frac{1}{1+y^2}-\frac{1}{y^2+u^2}\right]dy = \\ &= \frac{2\ln|u|}{\pi^2(u^2-1)}. \end{aligned}$$

□

[21] V.ö.: [4]

8.4.1. Student-eloszlás

Legyen $\xi \cong N(0,1)$ és tekintsük a $t_n \doteq \xi/\chi_n$ változó eloszlását, ahol a χ_n-ről feltesszük, hogy független a ξ-től és értelemszerűen χ_n eloszlású. A t_n változó eloszlását n szabadságfokú Student-eloszlásnak mondjuk. Számoljuk ki a t_n sűrűségfüggvényét. A (8.11) képletet kell alkalmazni az

$$\begin{aligned} f_\xi(x) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\exp\left(-\frac{x^2}{2}\right), \\ f_\eta(x) &= h_n(x) = \frac{1}{2^{n/2-1}\Gamma(n/2)}x^{n-1}\exp\left(-\frac{x^2}{2}\right), \quad x \geq 0 \end{aligned}$$

szereposztással. Ha $x \in \mathbb{R}$ akkor

$$\begin{aligned} t_n(x) &= \frac{1}{2^{n/2-1}\Gamma(n/2)}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^\infty y\exp\left(-\frac{(xy)^2}{2}\right)y^{n-1}\exp\left(-\frac{y^2}{2}\right)dy = \\ &= \frac{1}{2^{n/2-1}\Gamma(n/2)}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^\infty y^n\exp\left(-y^2\left(1+x^2\right)/2\right)dy. \end{aligned}$$

A megszokott $u = y^2\left(1+x^2\right)/2$ helyettesítéssel

$$\begin{aligned} t_n(x) &= \frac{1}{2^{n/2-1}\Gamma(n/2)}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^\infty\left(\sqrt{\frac{2u}{1+x^2}}\right)^n\exp(-u)\frac{dy}{du}du = \\ &= \frac{1}{\sqrt{\pi}\Gamma(n/2)}\frac{1}{(1+x^2)^{(n+1)/2}}\Gamma\left(\frac{n}{2}-\frac{1}{2}+1\right) = \\ &= \frac{\Gamma((n+1)/2)}{\sqrt{\pi}\Gamma(n/2)}\frac{1}{(1+x^2)^{(n+1)/2}}. \end{aligned}$$

Ha $n = 1$, akkor

$$t_1(x) = \frac{\Gamma(2/2)}{\sqrt{\pi}\Gamma(1/2)}\frac{1}{(1+x^2)} = \frac{1}{\sqrt{\pi}\sqrt{\pi}}\frac{1}{(1+x^2)} = \frac{1}{\pi(1+x^2)},$$

ami éppen a Cauchy-eloszlás. Határozzuk meg a t_n várható értékét és szórását. A várható érték meghatározása első ránézésre igen egyszerű, mivel a sűrűségfüggvény páros, és így a várható érték, ha létezik, csak nulla lehet. Ha azonban $n = 1$, akkor nincs várható érték[22]! Térjünk rá a szórások meghatározására. Ha $n = 1$, akkor mivel nem definiált a várható érték, nem definiált a szórás sem. Ha $n \geq 2$, akkor

$$\begin{aligned} \mathbf{D}^2(t_n) &= \frac{1}{\sqrt{\pi}}\frac{\Gamma((n+1)/2)}{\Gamma(n/2)}\int_{\mathbb{R}}\frac{x^2}{(1+x^2)^{(n+1)/2}}dx = \\ &= \frac{1}{\sqrt{\pi}}\frac{\Gamma((n+1)/2)}{\Gamma(n/2)}2\int_0^\infty\frac{x^2}{(1+x^2)^{(n+1)/2}}dx. \end{aligned}$$

[22] V.ö.: 1.4. példa, 5. oldal.

Ha $t = x^2 / \left(1 + x^2\right)$, vagyis ha $x = \sqrt{t/(1-t)}$, akkor

$$\begin{aligned}
\mathbf{D}^2(t_n) &= \frac{1}{\sqrt{\pi}} \frac{\Gamma((n+1)/2)}{\Gamma(n/2)} 2 \int_0^1 t(1-t)^{(n-1)/2} \frac{dx}{dt} dt = \\
&= \frac{1}{\sqrt{\pi}} \frac{\Gamma((n+1)/2)}{\Gamma(n/2)} \int_0^1 t(1-t)^{(n-1)/2} \frac{\sqrt{1-t}}{\sqrt{t}} \frac{1}{(1-t)^2} dt = \\
&= \frac{1}{\sqrt{\pi}} \frac{\Gamma((n+1)/2)}{\Gamma(n/2)} \int_0^1 t^{1/2} (1-t)^{n/2-2} dt = \\
&= \frac{1}{\sqrt{\pi}} \frac{\Gamma((n+1)/2)}{\Gamma(n/2)} B\left(\frac{3}{2}, \frac{n}{2} - 1\right).
\end{aligned}$$

A levezetésből világos, hogy amennyiben $n/2 - 1 \leq 0$, vagyis $n < 3$, akkor a szórás végtelen. Ha $n \geq 3$, akkor

$$\begin{aligned}
\mathbf{D}^2(t_n) &= \frac{1}{\sqrt{\pi}} \frac{\Gamma((n+1)/2)}{\Gamma(n/2)} \frac{\Gamma(1/2+1)\Gamma(n/2-1)}{\Gamma(3/2+(n-2)/2)} = \frac{\frac{1}{2}\sqrt{\pi}\Gamma(n/2-1)}{\sqrt{\pi}\Gamma(n/2)} = \\
&= \frac{1}{2} \frac{\Gamma(n/2-1)}{(n/2-1)\Gamma(n/2-1)} = \frac{1}{n-2}.
\end{aligned}$$

Esetenként Student-eloszláson a

$$\widetilde{t}_n = \sqrt{n} t_n = \sqrt{n} \frac{\xi}{\chi_n} = \frac{\xi}{\sqrt{\left(\xi_1^2 + \ldots + \xi_n^2\right)/n}}$$

változó eloszlását szokás érteni. A t_n eloszlásából a $\widetilde{t}_n$ eloszlása

$$\widetilde{F}(x) = \mathbf{P}\left(\widetilde{t}_n < x\right) = \mathbf{P}\left(\sqrt{n} t_n < x\right) = F\left(\frac{x}{\sqrt{n}}\right),$$

amiből a sűrűségfüggvény

$$\frac{\Gamma((n+1)/2)}{\sqrt{\pi n}\Gamma(n/2)} \frac{1}{(1+x^2/n)^{(n+1)/2}}.$$

A már belátottak alapján világos, hogy ha $n \geq 2$, akkor a várható érték nulla, ha pedig $n \geq 3$, akkor a variancia

$$\mathbf{D}^2\left(\widetilde{t}_n\right) = \frac{n}{n-2}.$$

8.16 Állítás.
Ha $n \to \infty$, akkor minden $x \in \mathbb{R}$ esetén a $\widetilde{t}_n$ sűrűségfüggvénye a standard normális eloszlás sűrűségfüggvényéhez tart[23].

[23]Evidens módon a nagy számok erős törvénye miatt a $\sqrt{\left(\xi_1^2 + \ldots + \xi_n^2\right)/n}$ nevező majdnem mindenhol az $\mathbf{M}\left(\xi_k^2\right) = 1$ konstanhoz tart, és mivel a számláló tekinthető egy rögzített normális eloszlású változónak, ezért a kifejezés majdnem mindenhol a számlálóban álló normális eloszlású változóhoz tart.

Bizonyítás: A sűrűségfüggvények konvergenciájának igazolásához tekintsük először a

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\left(1+x^2/n\right)^{(n+1)/2}}=\lim_{n\to\infty}\exp\left(-\frac{1}{2}\left(n+1\right)\ln\left(1+\frac{x^2}{n}\right)\right)$$

határértéket. Az exponenciális függvény folytonossága alapján elegendő meghatározni a kitevő határértékét. A l'Hôpital-szabály szerint

$$\lim_{u\to\infty}\left(u+1\right)\ln\left(1+\frac{x^2}{u}\right)=\lim_{v\to 0}\frac{\ln\left(1+vx^2\right)}{v}+\ln\left(1\right)=\lim_{v\to 0}\frac{x^2/\left(1+vx^2\right)}{1}=x^2.$$

Számoljuk ki a konstansokból álló

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\Gamma\left(\left(n+1\right)/2\right)}{\sqrt{\pi n}\Gamma\left(n/2\right)}=\frac{1}{\sqrt{\pi}}\lim_{n\to\infty}\frac{\Gamma\left(\left(n+1\right)/2\right)}{\sqrt{n}\Gamma\left(n/2\right)}$$

határértéket! A határérték kiszámításakor szükségünk lesz a

$$\Gamma\left(x\right)=\lim_{k\to\infty}\frac{k!k^x}{x\left(x+1\right)\left(x+2\right)\dots\left(x+k\right)}\tag{8.15}$$

formulára[24]. Ha $n=2k$ páros, akkor

$$\frac{\Gamma\left(\left(n+1\right)/2\right)}{\sqrt{n}\Gamma\left(n/2\right)}=\frac{\Gamma\left(k+1/2\right)}{\sqrt{2k}\Gamma\left(k\right)}=\frac{\left(k-1/2\right)\left(k-3/2\right)\dots\left(1/2\right)\Gamma\left(1/2\right)}{\sqrt{2k}\left(k-1\right)!}.\tag{8.16}$$

Ha a (8.13) képletben $x=1/2$, akkor[25] a (8.14)

$$\frac{\Gamma\left(x\right)}{\sqrt{2}}\frac{x\left(x+1\right)\dots\left(x+k-1\right)}{k^{1/2}\left(k-1\right)!}\to\frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Hasonlóan kell számolni, ha $n=2k+1$.

□

8.17 Állítás.
Ha $\left(\xi_k\right)_{k=1}^n$ *független, azonos* $N\left(m,\sigma\right)$ *eloszlású változók, és*

$$\overline{\xi}\doteq\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n\xi_i,\quad s\doteq\sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n\left(\xi_i-\overline{\xi}\right)^2}{n-1}},$$

akkor az s *eloszlása* χ_{n-1} *és a*

$$\tau\doteq\sqrt{\frac{n}{n-1}}\frac{\left(\overline{\xi}-m\right)}{s}$$

$n-1$ *szabadságfokú Student-eloszlás.*

[24] V.ö.: [9] 569. oldal, 6.44. állítás.

[25] Megjegyezzük, hogy általában igaz, hogy $\Gamma\left(n+a\right)/\Gamma\left(n\right)\sim n^a$.

Bizonyítás: Ha

$$\xi_i' \circeq \xi_i - m, \quad \overline{\xi'} \circeq \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\xi_i',$$

akkor $\overline{\xi} - m = \overline{\xi'}$ és

$$\sum_{i=1}^{n}\left(\xi_i - \overline{\xi}\right)^2 = \sum_{i=1}^{n}\left(\xi_i - m + m - \overline{\xi}\right)^2 = \sum_{i=1}^{n}\left(\xi_i' - \overline{\xi'}\right)^2,$$

ami alapján feltehetjük, hogy $m = 0$. Továbbá ha $\sigma\xi_i'' = \xi_i$ akkor

$$\frac{\overline{\xi}}{\sqrt{\sum_{i=1}^{n}\left(\xi_i - \overline{\xi}\right)^2}} = \frac{\sigma\overline{\xi''}}{\sqrt{\sum_{i=1}^{n}\sigma^2\left(\xi_i'' - \overline{\xi''}\right)^2}} = \frac{\overline{\xi''}}{\sqrt{\sum_{i=1}^{n}\left(\xi_i'' - \overline{\xi''}\right)^2}},$$

ami alapján feltehető, hogy $\sigma = 1$.

Legyen $\mathbf{T} = (t_{ij})$ olyan ortonormált mátrix, amely első sora csupa $1/\sqrt{n}$-ből áll[26]. Ha $\eta_i \circeq \sum_{j=1}^{n} t_{ij}\xi_j$, akkor

$$\eta_1 = \frac{1}{\sqrt{n}}\sum_{i=1}^{n}\xi_i = \sqrt{n}\overline{\xi},$$

és az ortonormalitás miatt

$$\sum_{i=1}^{n}\eta_i^2 = \sum_{i=1}^{n}\xi_i^2.$$

A η_i változók evidens módon normálisak, megmutatjuk, hogy függetlenek maradnak[27]. A $(\xi_i)_{i=1}^{n}$ változók együttes sűrűségfüggvénye

$$f(x_1, \ldots, x_n) = \prod_{i=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\exp\left(-\frac{x_i^2}{2}\right) = \frac{1}{\left(\sqrt{2\pi}\right)^n}\exp\left(-\frac{1}{2}\sum x_i^2\right).$$

Az integráltranszformációs tétel alapján az $(\eta_i)_{i=1}^{n}$ sűrűségfüggvénye

$$\begin{aligned} g(x_1, \ldots, x_k) &= f\left(\mathbf{T}^{-1}(x_1, \ldots, x_n)\right)\left|\det\left(\mathbf{T}^{-1}\right)\right| = \\ &= f(x_1, \ldots, x_n), \end{aligned}$$

[26] Ilyen mátrix biztosan van: az $\left(1/\sqrt{n}, \ldots, 1/\sqrt{n}\right)$ vektort egészítsük ki ortonormált bázissá. A bázisvektorokból mint sorvektorokból álló mátrix éppen megfelelő.

[27] V.ö.: 10.51. állítás, 494. oldal.

ahol felhasználtuk, hogy egy ortonormált transzformáció inverze is ortonormált, illetve, hogy a determinánsa ± 1. Ebből az η_i változók függetlensége már evidens. Mivel

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{n}\left(\xi_i-\overline{\xi}\right)^2 &= \sum_{i=1}^{n}\left(\xi_i^2-2\xi_i\overline{\xi}+\left(\overline{\xi}\right)^2\right)= \\ &= \sum_{i=1}^{n}\xi_i^2-\sum_{i=1}^{n}2\xi_i\overline{\xi}+\sum_{i=1}^{n}\left(\overline{\xi}\right)^2= \\ &= \sum_{i=1}^{n}\xi_i^2-2n\left(\overline{\xi}\right)^2+n\left(\overline{\xi}\right)^2= \\ &= \sum_{i=1}^{n}\xi_i^2-n\left(\overline{\xi}\right)^2=\sum_{i=1}^{n}\xi_i^2-\eta_1^2=\sum_{i=2}^{n}\eta_i^2,\end{aligned}$$

ezért az s eloszlása χ_{n-1}, és az s független a $\sqrt{n}\overline{\xi}=\eta_1$ változótól, és evidens módon

$$\tau=\frac{\sqrt{n}\overline{\xi}}{\sqrt{n-1}s}=\frac{\eta_1}{\sqrt{\sum_{i=2}^{n}\eta_i^2}}\cong\frac{N(0,1)}{\chi_{n-1}}.$$

□

8.4.2. Fisher-féle F eloszlás

Az m,n szabadságfokú Fisher-féle F eloszláson az

$$F(m,n)\overset{\circ}{=}\frac{1/m\sum_{i=1}^{m}\xi_i^2}{1/n\sum_{i=1}^{n}\eta_i^2}$$

változó eloszlását értjük, ahol a ξ_i és az η_j független $N(0,1)$ eloszlású változók. Legyen $\kappa=(m/n)\,F(m,n)$. A κ két független χ^2 eloszlás hányadosa. Határozzuk meg a κ sűrűségfüggvényét. Ha $x,y>0$, akkor

$$\frac{1}{2^{(m+n)/2}\Gamma(m/2)\Gamma(n/2)}\int_0^\infty y\,(xy)^{m/2-1}\exp\left(-\frac{xy}{2}\right)y^{n/2-1}\exp\left(-\frac{y}{2}\right)dy=$$

$$=\frac{x^{m/2-1}}{2^{(m+n)/2}\Gamma(m/2)\Gamma(n/2)}\int_0^\infty y^{(m+n)/2-1}\exp\left(-\frac{y}{2}(1+x)\right)dy.$$

Az integrandust ismételten a Γ függvényre akarjuk visszavinni, ezért $t=\frac{y}{2}(1+x)$ helyettesítést végzünk.

$$\begin{aligned}&\frac{x^{m/2-1}}{2^{(m+n)/2}\Gamma(m/2)\Gamma(n/2)}\int_0^\infty\left(\frac{2t}{1+x}\right)^{(m+n)/2-1}\frac{2\exp(-t)}{1+x}dt= \\ =\;&\frac{\Gamma((m+n)/2)}{\Gamma(m/2)\Gamma(n/2)}\frac{x^{m/2-1}}{(1+x)^{(m+n)/2}}.\end{aligned}$$

Mivel $F = (n/m) \cdot \kappa$, ezért a már többször látott transzformációval, ha $x > 0$, akkor

$$f_{m,n}(x) = \frac{\Gamma((m+n)/2)}{\Gamma(m/2)\Gamma(n/2)} \frac{m}{n} \left(\frac{m}{n}x\right)^{m/2-1} \frac{1}{(1+(m/n)x)^{(m+n)/2}}.$$

Számoljuk ki a várható értéket és a szórást.

$$\mathbf{M}(\kappa) = \frac{\Gamma((m+n)/2)}{\Gamma(m/2)\Gamma(n/2)} \int_0^\infty x^{m/2} \left(\frac{1}{1+x}\right)^{(m+n)/2} dx.$$

Az integrálban $t = x/(1+x)$ helyettesítést végezve

$$\begin{aligned}\int_0^\infty \frac{x^{m/2}}{(1+x)^{(m+n)/2}} dx &= \int_0^1 \left(\frac{t}{1-t}\right)^{m/2} (1-t)^{(m+n)/2} \frac{1}{(1-t)^2} dt = \\ &= B(m/2+1, n/2-1).\end{aligned}$$

Világos, hogy csak akkor véges az integrál, ha $n/2 - 1 > 0$, vagyis $n \geq 3$. Ekkor

$$\begin{aligned}\mathbf{M}(\kappa) &= \frac{\Gamma((m+n)/2)}{\Gamma(m/2)\Gamma(n/2)} \frac{\Gamma(m/2+1)\Gamma(n/2-1)}{\Gamma((m+n)/2)} = \\ &= \frac{m}{2}\frac{2}{n-2} = \frac{m}{n-2}. \\ \mathbf{M}(F) &= \frac{n}{m}\frac{m}{n-2} = \frac{n}{n-2}.\end{aligned}$$

Térjünk rá a szórásra!

$$\mathbf{M}(\kappa^2) = \frac{\Gamma((m+n)/2)}{\Gamma(m/2)\Gamma(n/2)} \int_0^\infty x^{m/2+1} \frac{1}{(1+x)^{(m+n)/2}} dx.$$

Ismét $t = x/(1+x)$ helyettesítést alkalmazva

$$\int_0^\infty \frac{x^{m/2+1}}{(1+x)^{(m+n)/2}} dx = B\left(\frac{m}{2}+2, \frac{n}{2}-2\right).$$

Világos, hogy csak akkor véges a szórás, ha $n/2 - 2 > 0$, vagyis $n \geq 5$.

$$\begin{aligned}\mathbf{M}(\kappa^2) &= \frac{\Gamma((m+n)/2)}{\Gamma(m/2)\Gamma(n/2)} \frac{\Gamma(m/2+2)\Gamma(n/2-2)}{\Gamma((m+n)/2)} = \\ &= \frac{(m/2+1)\,m/2}{(n/2-1)(n/2-2)} = \\ &= \frac{(m+2)\,m}{(n-2)(n-4)}.\end{aligned}$$

Ebből

$$\begin{aligned}\mathbf{D}^2(\kappa) &= \frac{(m+2)\,m}{(n-2)(n-4)} - \frac{m^2}{(n-2)^2} = \frac{2m(n+m-2)}{(n-2)^2(n-4)}, \\ \mathbf{D}^2(F) &= \frac{n^2}{m^2}\mathbf{D}^2(\kappa) = \frac{n^2}{m^2}\frac{2m(n+m-2)}{(n-2)^2(n-4)} = \frac{2n^2(n+m-2)}{m(n-2)^2(n-4)}.\end{aligned}$$

8.4.3. z-eloszlás

A Fischer-féle z-eloszláson definíció szerint a

$$z(m,n) \stackrel{\circ}{=} \ln \sqrt{F(m,n)} = \frac{1}{2} \ln \frac{(1/m)\sum_{i=1}^{m} \xi_i^2}{(1/n)\sum_{i=1}^{n} \eta_i^2}$$

változó eloszlását értjük. A sűrűségfüggvények transzformációs szabálya alapján a z eloszlás sűrűségfüggvénye ha $\varphi(u) = \ln \sqrt{u}$

$$f_{m,n}\left(\varphi^{-1}(x)\right) \frac{d}{dx}\varphi^{-1}(x) = f_{m,n}(\exp(2x))\, 2\exp(2x),$$

ami egyszerű számolással az

$$2m^{m/2}n^{n/2}\frac{\Gamma((m+n)/2)}{\Gamma(m/2)\Gamma(n/2)}\frac{\exp(mx)}{(n+m\exp(2x))^{(m+n)/2}}$$

alakra hozható.

8.5. Béta és gamma eloszlások

8.18 Definíció.
Ha α és β pozitív számok, akkor az

$$f(x) \stackrel{\circ}{=} \frac{\Gamma(\alpha+\beta)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} x^{\alpha-1}(1-x)^{\beta-1}, \quad x \in (0,1)$$

sűrűségfüggvénnyel rendelkező eloszlást (α,β) paraméterű béta eloszlásnak hívjuk és $B(a,\beta)$ módon jelöljük[28].

Számoljuk ki a $B(\alpha,\beta)$ eloszlás várható értéket és a szórást!

$$\begin{aligned}
\mathbf{M}(B(\alpha,\beta)) &= \frac{\Gamma(\alpha+\beta)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}\int_0^1 x^{\alpha}(1-x)^{\beta-1}dx = \\
&= \frac{\Gamma(\alpha+\beta)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}\frac{\Gamma(\beta)\Gamma(\alpha+1)}{\Gamma(\alpha+\beta+1)} = \\
&= \frac{\alpha}{\alpha+\beta}.
\end{aligned}$$

Hasonlóan

$$\mathbf{M}\left(B^2(\alpha,\beta)\right) = \frac{\Gamma(\alpha+\beta)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}\frac{\Gamma(\beta)\Gamma(\alpha+2)}{\Gamma(\alpha+\beta+2)} = \frac{(\alpha+1)\alpha}{(\alpha+\beta+1)(\alpha+\beta)},$$

[28]A terminológia némiképpen pontatlan, de remélhetőleg nem félreérthető. A $B(\alpha,\beta)$ eloszlás sűrűségfüggvénye a $B(\alpha,\beta)$ függvény magfüggvénye.

amiből

$$\begin{aligned}\mathbf{D}^2\left(B\left(\alpha,\beta\right)\right) &= \frac{\left(\alpha+1\right)\alpha}{\left(\alpha+\beta+1\right)\left(\alpha+\beta\right)}-\frac{\alpha^2}{\left(\alpha+\beta\right)^2}= \\ &= \frac{\left(\alpha+1\right)\alpha\left(\alpha+\beta\right)-\alpha^2\left(\alpha+\beta+1\right)}{\left(\alpha+\beta\right)^2\left(\alpha+\beta+1\right)}=\frac{\alpha\beta}{\left(\alpha+\beta\right)^2\left(\alpha+\beta+1\right)}.\end{aligned}$$

Béta eloszlásra jó példa[29] a

$$B \mathrel{\hat{=}} \frac{\kappa}{1+\kappa}=\frac{\sum_{i=1}^n \xi_i^2}{\sum_{i=1}^n \xi_i^2+\sum_{i=1}^m \eta_i^2}, \tag{8.17}$$

ugyanis a transzformációs képlet szerint a B sűrűségfüggvénye

$$\begin{aligned}f_\kappa\left(\varphi^{-1}\left(x\right)\right)\frac{d}{dx}\varphi^{-1}\left(x\right) &= f_\kappa\left(\frac{x}{1-x}\right)\frac{1}{\left(1-x\right)^2}= \\ &= \frac{\Gamma\left(\left(m+n\right)/2\right)}{\Gamma\left(m/2\right)\Gamma\left(n/2\right)}x^{m/2-1}\left(1-x\right)^{n/2-1}.\end{aligned}$$

8.19 Definíció.
Ha λ és a pozitív számok, akkor az

$$f\left(x\right) \mathrel{\hat{=}} \frac{\lambda^a}{\Gamma\left(a\right)}x^{a-1}\exp\left(-\lambda x\right), \quad x>0$$

sűrűségfüggvénnyel rendelkező eloszlást (a,λ) paraméterű gamma eloszlásnak hívjuk és $\Gamma\left(a,\lambda\right)$ módon jelöljük.[30]

A Γ eloszlás jelentőségét az adja, hogy egyrészt az exponenciális eloszlás általánosítása, $\Gamma\left(1,\lambda\right)$ éppen a λ paraméterű exponenciális eloszlás, másrészt szorosan kötődik a normális eloszlás négyzetének eloszlásához.

8.20 Állítás.
A χ_n^2 és a $\Gamma\left(n/2,1/2\right)$ eloszlások megegyeznek[31].

8.21 Állítás.
Ha $\left(\tau_k\right)_{k=1}^n$ független, azonos λ paraméterű exponenciális eloszlású változók, akkor a

$$\sigma_n \mathrel{\hat{=}} \tau_1+\tau_2+\ldots+\tau_n \tag{8.18}$$

eloszlása $\Gamma\left(n,\lambda\right)$, általánosabban ha a τ_i független változók eloszlása $\Gamma\left(a_i,\lambda\right)$, akkor a (8.16) összeg eloszlása $\Gamma\left(\sum_{i=1}^n a_i,\lambda\right)$.

[29] V.ö.: (**??**), **??**. oldal.
[30] Ismételten némiképpen zavaró lehet, hogy szintén Γ jelöli a Γ eloszláshoz szorosan kötődő Γ függvényt.
[31] V.ö.: (**??**), **??**. oldal.

Bizonyítás: A $\Gamma(1,\lambda)$ sűrűségfüggvénye

$$\frac{\lambda^1}{\Gamma(1)} x^{1-1} \exp(-\lambda x) = \lambda \exp(-\lambda x), \quad x > 0,$$

éppen a λ paraméterű exponenciális eloszlás sűrűségfüggvénye. Az állítást elegendő két változóra belátni, az általános eset ebből indukcióval következik.

$$\begin{aligned}
& \int_0^x \frac{\lambda^a}{\Gamma(a)} (x-t)^{a-1} \exp(-\lambda(x-t)) \frac{\lambda^b}{\Gamma(b)} t^{b-1} \exp(-\lambda t)\, dt = \\
= \ & \frac{\lambda^{a+b}}{\Gamma(a)\Gamma(b)} \exp(-\lambda x) \int_0^x (x-t)^{a-1} t^{b-1} dt = \\
= \ & \frac{\lambda^{a+b}}{\Gamma(a)\Gamma(b)} \exp(-\lambda x) \int_0^1 (x-xz)^{a-1} (xz)^{b-1} x dz = \\
= \ & \frac{\lambda^{a+b}}{\Gamma(a)\Gamma(b)} \exp(-\lambda x)\, x^{a+b-1} \int_0^1 (1-z)^{a-1} z^{b-1} dz = \\
= \ & \frac{\lambda^{a+b}}{\Gamma(a+b)} \exp(-\lambda x)\, x^{a+b-1},
\end{aligned}$$

ahol az utolsó lépésben felhasználtuk a gamma és a béta függvények közötti nevezetes azonosságot.

□

8.22 Példa.
Az exponenciális és a Poisson-eloszlás kapcsolata.

Legyen $0 \leq t < \infty$, és $(\tau_n)_n$ független, azonos λ paraméterű exponenciális eloszlású változók. A $(\tau_n)_n$ változók tekinthetők egymást követő események időpontjainak. Legyen $\xi(t)$ a $[0,t]$ időszak alatt bekövetkezett események száma. Határozzuk meg a $\xi(t)$ eloszlását. Vezessük be a $\sigma_n \triangleq \sum_{k=1}^n \tau_k$ változót. Az előző példa alapján a σ_n eloszlása $\Gamma(n,\lambda)$. Parciálisan integrálva, illetve felhasználva, hogy $\Gamma(n) = (n-1)!$

$$\begin{aligned}
\mathbf{P}(\xi(t) < n) &= \mathbf{P}(\sigma_n > t) = \int_t^\infty \frac{\lambda^n}{\Gamma(n)} x^{n-1} \exp(-\lambda x)\, dx = \\
&= \left[\frac{(\lambda x)^n}{n!} \exp(-\lambda x) \right]_t^\infty + \int_t^\infty \frac{\lambda^{n+1} x^n}{\Gamma(n+1)} \exp(-\lambda x)\, dx = \\
&= -\frac{(\lambda t)^n}{n!} \exp(-\lambda t) + \mathbf{P}(\xi(t) < n+1).
\end{aligned}$$

Ebből

$$\mathbf{P}(\xi(t) = n) = \mathbf{P}(\xi(t) < n+1) - \mathbf{P}(\xi(t) < n) = \frac{(\lambda t)^n}{n!} \exp(-\lambda t),$$

tehát a $\xi(t)$ λt paraméterű Poisson-eloszlást alkot.

□

8.23 Definíció.
Ha α és β pozitív paraméterek, akkor a

$$g(x) \stackrel{\circ}{=} \frac{\Gamma(\alpha+\beta)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} x^{\alpha-1} \frac{1}{(1+x)^{\alpha+\beta}}, \quad x > 0$$

sűrűségfüggvénnyel rendelkező eloszlást általánosított béta eloszlásnak nevezzük. Az általánosított béta eloszlást $\widetilde{B}(\alpha,\beta)$-val fogjuk jelölni.

A $\widetilde{B}$ és a B eloszlások között, miként a nevük is mutatja, szoros összefüggés van.

8.24 Állítás.
Ha a ξ béta eloszlású, akkor az $\eta \stackrel{\circ}{=} \xi/(1-\xi)$ általánosított béta eloszlású. Ha η általánosított béta eloszlású, akkor a $\xi \stackrel{\circ}{=} \eta/(1+\eta)$ béta eloszlású.

Bizonyítás: Ha $\varphi(u) \stackrel{\circ}{=} u/(1-u)$, akkor $\varphi^{-1}(x) = x/(1+x)$, és a sűrűségfüggvények transzformációs szabálya szerint

$$\begin{aligned} g(x) &= f\left(\varphi^{-1}(x)\right) \frac{d}{dx}\varphi^{-1}(x) = \\ &= \frac{\Gamma(\alpha+\beta)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} \left(\frac{x}{1+x}\right)^{\alpha-1} \left(1-\frac{x}{1+x}\right)^{\beta-1} \frac{1}{(1+x)^2} = \\ &= \frac{\Gamma(\alpha+\beta)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} x^{a-1} \frac{1}{(1+x)^{\alpha+\beta}}. \end{aligned} \tag{8.19}$$

A fordított irány igazolása analóg.

□

8.25 Állítás.
Ha $\xi \cong \Gamma(a,\lambda)$ és $\eta \cong \Gamma(b,\lambda)$ valamint a ξ és az η függetlenek, akkor

$$\frac{\xi}{\eta} \cong \widetilde{B}(a,b), \quad \frac{\xi}{\xi+\eta} \cong B(a,b). \tag{8.20}$$

Bizonyítás: A hányados valószínűségi változó sűrűségfüggvényének képletét felírva, és kihasználva a két változó nem negativitását, ha $u > 0$, akkor

$$\begin{aligned} & \int_0^\infty \frac{\lambda^a}{\Gamma(a)} (uy)^{a-1} \exp(-\lambda uy) \frac{\lambda^b}{\Gamma(b)} y^{b-1} \exp(-\lambda y)\, y dy = \\ = & \frac{\lambda^{a+b}}{\Gamma(a)\Gamma(b)} u^{a-1} \int_0^\infty y^{a+b-1} \exp(-\lambda y(u+1))\, dy = \\ = & \frac{\lambda^{a+b}}{\Gamma(a)\Gamma(b)} u^{a-1} \int_0^\infty \left(\frac{t}{\lambda(1+u)}\right)^{a+b-1} \exp(-t) \frac{1}{\lambda(1+u)} dt = \\ = & \frac{1}{\Gamma(a)\Gamma(b)} u^{a-1} \frac{1}{(1+u)^{a+b}} \int_0^\infty t^{a+b-1} \exp(-t)\, dt = \\ = & \frac{\Gamma(a+b)}{\Gamma(a)\Gamma(b)} u^{a-1} \frac{1}{(1+u)^{a+b}}, \end{aligned}$$

ami éppen a $\widetilde{B}(a,b)$. A második állítás igazolása a következő[32]:

$$\begin{aligned}\mathbf{P}\left(\frac{\xi}{\xi+\eta}<x\right) &= \mathbf{P}\left(\frac{\xi/\eta}{1+\xi/\eta}<x\right)= \\ &= \mathbf{P}\left(\frac{\xi}{\eta}<x\left(1+\frac{\xi}{\eta}\right)\right)= \\ &= \mathbf{P}\left(\frac{\xi}{\eta}<\frac{x}{1-x}\right),\end{aligned}$$

így deriválással az imént belátottak alapján a sűrűségfüggvény

$$\frac{\Gamma(a+b)}{\Gamma(a)\Gamma(b)}\left(\frac{x}{1-x}\right)^{a-1}\frac{1}{(1+x/(1-x))^{a+b}}\frac{1}{(1-x)^2}.$$

Ez elemi számolással

$$\frac{\Gamma(a+b)}{\Gamma(a)\Gamma(b)}\left(\frac{x}{1-x}\right)^{a-1}(1-x)^{a+b}\frac{1}{(1-x)^2},$$

ami pedig

$$\frac{\Gamma(a+b)}{\Gamma(a)\Gamma(b)}x^{a-1}(1-x)^{b-1},$$

ami éppen a $B(a,b)$ sűrűségfüggvénye.

□

8.26 Állítás.
Ha a $\xi\cong\Gamma(a,\lambda)$ és az $\eta\cong\Gamma(b,\lambda)$ függetlenek, akkor függetlenek a $\zeta\mathrel{\hat=}\xi+\eta$ és a $\kappa\mathrel{\hat=}\xi/\eta$ változók is. Hasonlóan függetlenek a $\xi+\eta$ és a $\xi/(\xi+\eta)$ változók.

Bizonyítás: A (ξ,η) együttes sűrűségfüggvénye

$$f(x,y)\mathrel{\hat=}\frac{\lambda^a}{\Gamma(a)}x^{a-1}\exp(-\lambda x)\frac{\lambda^b}{\Gamma(b)}y^{b-1}\exp(-\lambda y).$$

Ha $\varphi(x,y)\mathrel{\hat=}(x/y,x+y)$, akkor $(\kappa,\zeta)=\varphi(\xi,\eta)$. Mivel

$$\varphi^{-1}(p,q)=(pq/(1+p),q/(1+p)).$$

és

$$\begin{aligned}\left|\det\left(\left(\varphi^{-1}\right)'\right)\right| &= \begin{vmatrix}\frac{q}{(1+p)^2} & \frac{p}{1+p}\\ -\frac{q}{(1+p)^2} & \frac{1}{1+p}\end{vmatrix}= \\ &= \frac{1}{(1+p)^3}(q+pq)= \\ &= \frac{q}{(1+p)^2},\end{aligned}$$

[32] V.ö.: (**??**), **??**. oldal.

ezért a transzformált sűrűségfüggvény

$$\begin{aligned}
g &\overset{\circ}{=} f\left(\varphi^{-1}\right)\left|\det\left(\left(\varphi^{-1}\right)'\right)\right| = \\
&= \frac{\lambda^{a+b}}{\Gamma(b)\Gamma(a)}\left(\frac{pq}{1+p}\right)^{a-1}\left(\frac{q}{1+p}\right)^{b-1}\exp(-\lambda q)\frac{q}{(1+p)^2} = \\
&= \frac{\Gamma(a+b)}{\Gamma(b)\Gamma(a)}\frac{p^{a-1}}{(1+p)^{a+b}}\frac{\lambda^{a+b}}{\Gamma(a+b)}q^{a+b-1}\exp(-\lambda q) = \\
&= f_\kappa(p)\, f_\zeta(q),
\end{aligned}$$

vagyis a két változó valóban független. A második állítás bizonyítása analóg.

□

8.27 Következmény.
Ha $(\xi_k)_{k=1}^m$ *és* $(\eta_k)_{k=1}^n$ *független,* $N(0,1)$ *eloszlású változók, akkor a*

$$\chi^2_{n+m} \overset{\circ}{=} \sum_{i=1}^m \xi_i^2 + \sum_{i=1}^n \eta_i^2$$

független az

$$F(m,n) \overset{\circ}{=} \frac{n}{m}\frac{\xi_1^2+\ldots+\xi_m^2}{\eta_1^2+\ldots+\eta_n^2},$$

illetve a

$$\widetilde{B}\left(\frac{m}{2},\frac{n}{2}\right) \overset{\circ}{=} \frac{\xi_1^2+\ldots+\xi_m^2}{\xi_1^2+\ldots+\xi_m^2+\eta_1^2+\ldots+\eta_n^2}$$

változóktól.

Bizonyítás: A feltételezett függetlenség alapján a

$$\chi^2_n = \sum_{i=1}^n \eta_i^2 \cong \Gamma\left(\frac{n}{2},\frac{1}{2}\right), \quad \chi^2_m = \sum_{i=1}^m \xi_i^2 \cong \Gamma\left(\frac{m}{2},\frac{1}{2}\right)$$

változók függetlenek, így az előzőek alapján az állítás nyilvánvaló.

□

8.28 Következmény.
Ha $\xi \cong N(0,1)$, *akkor*

$$\xi^2 = 2\cdot\gamma\cdot\beta,$$

ahol a γ *és a* β *változók függetlenek,* $\gamma \cong \Gamma(1,1)$, *vagyis a* γ $\lambda = 1$ *paraméterű exponenciális eloszlású változó, és* $\beta \cong B(1/2,1/2)$.

Bizonyítás: $\xi^2 \cong \Gamma(1/2,1/2)$. Ha $\xi' \cong N(0,1)$, és a ξ és a ξ' függetlenek, akkor a

$$\xi^2 = \left(\xi^2+\xi'^2\right)\frac{\xi^2}{\xi^2+\xi'^2}$$

előállításban az első tényező

$$\Gamma(1/2, 1/2) + \Gamma(1/2, 1/2) \cong \Gamma(1, 1/2),$$

vagyis a $\lambda = 1/2$ paraméterű exponenciális eloszlású változó, és a (8.15) sor alapján a második tényező eloszlása $B(1/2, 1/2)$. A 8.25. állítás alapján a két komponens független.

□

8.29 Példa.
Exponenciális eloszlású valószínűségi változók összege és az egyenletes eloszlásból származó rendezett minta kapcsolata.

Legyenek $(\xi_k)_{k=1}^n$ független azonos, λ paraméterű exponenciális eloszlású valószínűségi változók. Legyen $\sigma_m \mathrel{\hat{=}} \sum_{k=1}^m \xi_k$. Határozzuk meg az $\eta_k \mathrel{\hat{=}} \sigma_k/\sigma_n$ változók eloszlását.

$$\mathbf{P}(\eta_1 < x) = \mathbf{P}\left(\frac{\xi_1}{\xi_1 + \ldots + \xi_n} < x\right).$$

A ξ_1 eloszlása $\Gamma(1, \lambda)$, a $\sum_{k=2}^n \xi_k$ eloszlása $\Gamma(n-1, \lambda)$. Ebből a (**??**) miatt az η_1 eloszlása $B(1, n-1)$. A $B(1, n-1)$ eloszlás sűrűségfüggvénye

$$f_1(x) \mathrel{\hat{=}} \frac{\Gamma(n)}{\Gamma(1)\Gamma(n-1)} x^{1-1}(1-x)^{n-2}, \quad x \in (0,1).$$

A $\Gamma(n) = (n-1)!$ értéket beírva

$$f_1(x) = (n-1)(1-x)^{n-2} \quad x \in (0,1).$$

Legyenek $(\tau_k)_{k=1}^{n-1}$ a $(0,1)$ intervallumon egyenletes eloszlású változók és jelölje τ_1^* a legkisebb elemet, vagyis $\tau_1^* \mathrel{\hat{=}} \min \tau_k$. $\{\tau_1^* < x\}$ pontosan akkor, ha legalább egy elem az $(n-1)$-ből kisebb mint x, tehát

$$F_1(x) \mathrel{\hat{=}} \mathbf{P}(\tau_1^* < x) = 1 - (1-x)^{n-1}.$$

A τ_1^* sűrűségfüggvénye

$$F_1'(x) = (n-1)(1-x)^{n-2}$$

amely éppen azonos az $f_1(x)$ függvénnyel, vagyis az η_1 eloszlása azonos a τ_1^* eloszlásával. Hasonlóan a $\sum_{i=1}^k \xi_i$ eloszlása $\Gamma(k, \lambda)$ a $\sum_{i=k+1}^n \xi_i$ eloszlása $\Gamma(n-k, \lambda)$ így az η_k eloszlása $B(k, n-k)$, amely sűrűségfüggvénye

$$\frac{\Gamma(n)}{\Gamma(k)\Gamma(n-k)} x^{k-1}(1-x)^{n-k-1} = (n-1)\binom{n-2}{k-1} x^{k-1}(1-x)^{n-k-1}.$$

Határozzuk meg az τ_k^* eloszlásfüggvényét. Az egyszerűbb jelölés kedvéért legyen először τ_k^* egyenletes eloszlásból származó n elemű rendezett minta k-dik eleme. A $\{\tau_k^* < x\}$ esemény ekvivalens avval, hogy legalább k változó kisebb mint x. Ebből

$$F_k(x) \mathrel{\hat{=}} \mathbf{P}(\tau_k^* < x) = \sum_{i=k}^n \binom{n}{i} x^i (1-x)^{n-i}.$$

A derivált kiszámolásának komplikáltsága miatt a sűrűségfüggvény meghatározása a következő:

$$\frac{F_k(x+h)-F_k(x)}{h}=\frac{\mathbf{P}\left(x\le\tau_k^*<x+h\right)}{h}.$$

A $\mathbf{P}\left(x\le\tau_k^*<x+h\right)$ annak a valószínűsége, hogy $(k-1)$ változó kisebb mint x és $(n-k)$ nagyobb mint $x+h$ és egy változó éppen az $[x,x+h)$ intervallumba esik.

$$\mathbf{P}\left(x\le\tau_k^*<x+h\right)=n\binom{n-1}{k-1}hx^{k-1}(1-x)^{n-k}.$$

Ebből a sűrűségfüggvény

$$n\binom{n-1}{k-1}x^{k-1}(1-x)^{n-k}.$$

Ha n helyébe $(n-1)$-et írunk, akkor éppen az η_k sűrűségfüggvényét kapjuk.

$\square$