13. fejezet

Centrális határeloszlás-tétel

A valószínűségszámítás legfontosabb állításai azok, amelyek független valószínűségi változók normalizált összegeire vonatkoznak. A legfontosabb ilyen tételek a nagy számok törvényei és a centrális határeloszlás-tétele. Az első szerint független, azonos eloszlású változók számtani átlaga egy konstanshoz tart. Mi történik azonban, ha az összeget nem a tagok számával osztjuk? Ez a kérdés a valószínűségszámítás talán legjelentősebb problémája, amelyre többször vissza fogunk térni. Ebben a fejezetben feltételezzük, hogy a közös eloszlásnak van σ szórása, az általános eset vizsgálatát a következő fejezetekre hagyjuk. Ha feltesszük, hogy van szórás, és az összeget standardizáljuk, akkor az így kapott változó a standard normális eloszláshoz tart. Mivel független változók varianciája összegződik, ilyenkor a normalizáló konstans $\sigma\sqrt{n}$. Az, hogy az összeget éppen $\sigma\sqrt{n}$-nel kell normalizálni, igen fontos! A centrális határeloszlás tétele statisztikai tétel, vagyis bizonyos, célszerűen megadott formulák határeloszlását megadó matematikai állítás, és nem természeti törvény. Ez a megjegyzés azért is fontos, mivel ez alapján a tétel általánosításai, a stabil eloszlásokhoz való konvergenciát leíró tételek, jóval érthetőbbek és természetesebbek, hiszen csak annyit mondanak, hogy ha nincsen szórás, akkor más normalizáló konstanst kell alkalmazni, és ilyenkor nem a normális eloszlást, hanem egy rokon eloszlástípust fogunk kapni. Ugyancsak hangsúlyozni kell, hogy a tétel eloszlásokról, és nem változókról, szól. Mivel a valószínűségszámítást az eloszlásokról szóló matematikai területetként definiáltuk, bizonyos értelemben joggal mondhatjuk, hogy a centrális határeloszlás-tétele a leginkább valószínűségszámítási tétel.

13.1. Egydimenziós határeloszlás-tételek

Először a legegyszerűbb esetet vizsgáljuk, megmutatjuk, hogy tetszőleges független, azonos eloszlású, szórással rendelkező valószínűségi változók standardizált összege gyengén tart a normális eloszláshoz. Alapvetően támaszkodni fogunk a korábbi fejezetek eredményeire, nevezetesen arra, hogy ha eloszlások sorozatának karakterisztikus függvénye pontonként az $\exp\left(-t^2/2\right)$ függvényhez tart, akkor az eloszlások sorozata gyengén tart az $N(0,1)$ eloszláshoz.

13.1.1. Karakterisztikus függvény sorbafejtése

A normalizáló konstans szoros kapcsolatban van az összeadandó változók $V(x) \stackrel{\circ}{=} \mathbf{P}(|\xi| > x)$ farokeloszlásának nagyságrendjével. Az, hogy a ξ változónak van szórása, tulajdonképpen a V nagyságrendjére vonatkozó megkötés. Mivel a tételekben a farokeloszlások játszák a meghatározó szerepet, nem véletlen, hogy a tételek legegyszerűbb bizonyítása a Fourier-transzformációra épül. Miként folyamatosan hangsúlyozzuk, a Fourier-transzformáció lényege, hogy a V végtelenben való nagyságrendje szoros kapcsolatban van a karakterisztikus függvény origóban való simaságával.

13.1 Lemma.
Ha a ξ változónak létezik az m-edik momentuma, akkor a φ karakterisztikus függvényére

$$\varphi(t) = \sum_{k=0}^{m} \frac{(it)^k}{k!} \mathbf{M}\left(\xi^k\right) + \frac{(it)^m}{m!} \varepsilon(t),$$

ahol az ε függvényre fennállnak a

$$\lim_{t \to 0} \varepsilon(t) = 0 \tag{13.1}$$

és az $|\varepsilon| \leq 3 \cdot \mathbf{M}(|\xi|^m)$ összefüggések, tehát

$$\varphi(t) = \sum_{k=0}^{m} \frac{t^k}{k!} \varphi^{(k)}(0) + o(t^m). \tag{13.2}$$

Speciálisan, ha az eloszlásnak van szórása, akkor a karakterisztikus függvénye másodrendben közelíthető a Taylor-polinomjával.

Bizonyítás: Tekintsük az $\exp(iu) = \cos u + i \sin u$ Taylor-polinomját:

$$\begin{aligned}
\cos u &= 1 - \frac{u^2}{2!} + \frac{u^4}{4!} + \ldots + \frac{u^m}{m!} \cos^{(m)}(\lambda_1(u) u) \\
\sin u &= u - \frac{u^3}{3!} + \frac{u^5}{5!} + \ldots + \frac{u^m}{m!} \sin^{(m)}(\lambda_2(u) u)
\end{aligned}$$

ahol $0 \leq \lambda_1(u) \leq 1$ és $0 \leq \lambda_2(u) \leq 1$. Ebből

$$\begin{aligned}
\exp(iu) &= 1 + iu + \frac{(iu)^2}{2!} + \frac{(iu)^3}{3!} + \frac{(iu)^4}{4!} + \ldots + \\
&\quad + \frac{(iu)^m}{m!} \left[\cos^{(m)}(\lambda_1(u) u) + i \sin^{(m)}(\lambda_2(u) u)\right].
\end{aligned}$$

Vegyük észre, hogy a második sorban szereplő Lagrange-féle maradék

$$\frac{(iu)^m}{m!} \left[\pm \cos(\nu_1(u) u) \pm i \sin(\nu_2(u) u)\right]$$

alakú, ahol a $\nu_1(u)$, illetve a $\nu_2(u)$, a $\lambda_1(u)$, illetve a $\lambda_2(u)$ értékek valamelyike. Az $u \stackrel{\circ}{=} t\xi(\omega)$ értéket véve, majd mind a két oldal várható értékét képezve:

$$\varphi(t) = \sum_{k=1}^{m} \frac{(it)^k}{k!} \mathbf{M}\left(\xi^k\right) + \frac{(it)^m}{m!} \varepsilon(t)$$

ahol

$$\varepsilon(t) \stackrel{\circ}{=} \mathbf{M}\left(\xi^m\left[\cos\left(\nu_1(t\xi)t\xi\right) + i\sin\left(\nu_2(t\xi)t\xi\right) - 1\right]\right).$$

Ha $t \to 0$, akkor a várható értékben szereplő kifejezés nullához tart. Mivel a feltétel szerint a ξ-nek létezik az m-dik momentuma, és ezért a $|\xi|^m$ integrálható, így az

$$\left|\xi^m\left[\cos\left(\nu_1(t\xi)t\xi\right) + i\sin\left(\nu_2(t\xi)t\xi\right) - 1\right]\right| \le 3\left|\xi^m\right|$$

becslés alapján a várható érték alatti kifejezésnek van integrálható majoránsa, és így a határérték bevihető az integrál mögé, vagyis[1]

$$\lim_{t\to 0} \varepsilon(t) = \mathbf{M}\left(\lim_{t\to 0} \xi^m\left[\cos\left(\nu_1(t\xi)t\xi\right) + i\sin\left(\nu_2(t\xi)t\xi\right) - 1\right]\right) = 0.$$

□

13.1.2. Azonos eloszlású független valószínűségi változók

Legyen F tetszőleges olyan eloszlás, amelynek létezik szórása, és legyen $(\xi_n)_n$ F eloszlású, független változók sorozata. Jelölje σ a közös szórást, μ a közös várható értéket, S_n az első n változó összegét, vagyis $S_n \stackrel{\circ}{=} \sum_{k=1}^{n} \xi_k$, és tekintsük a standardizált $\eta_n \stackrel{\circ}{=} (S_n - n\mu)/\sigma\sqrt{n}$ változót. Ha φ jelöli az F karakterisztikus függvényét, akkor

$$\varphi_{\eta_n}(t) = \varphi\left(\frac{t}{\sigma\sqrt{n}}\right)^n \exp\left(-\frac{in\mu t}{\sigma\sqrt{n}}\right).$$

Az egyszerűbb jelölés céljából felthető, hogy $\mu = 0$, $\sigma = 1$. A 13.1. lemma alapján

$$\begin{aligned} \varphi(t) &= 1 + i\mu t + \frac{(it)^2}{2!}\left(\sigma^2 + \mu^2\right) + o\left(t^2\right) = \\ &= 1 - \frac{t^2}{2} + o\left(t^2\right). \end{aligned}$$

amiből

$$\varphi_{\eta_n}(t) = \left(1 - \frac{t^2}{2n} + o\left(\frac{t^2}{n}\right)\right)^n.$$

[1] Vegyük észre, hogy a bizonyítás során azt is igazoltuk, hogy ha létezik az m-edik momentum, akkor a karakterisztikus függvény m-szer deriválható. Ha ezt tudjuk, akkor a (13.2) már teljesül, ugyanis ez tetszőleges m-szer deriválható függvényre érvényes. Az, hogy egy m-szer deriválható $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ függvényre teljesül a (13.2) a legegyszerűbben úgy igazolhatjuk, ha észrevesszük, hogy az $r_m(x) \stackrel{\circ}{=} f(x) - T_m(x)$ maradék első m deriváltja az $x = 0$ pontban 0, és az $r_m(x)/x^m$ hányadosra $(m-1)$-szer alkalmazzuk a l'Hôpital-szabályt, majd az m-edik lépésben felhasználjuk, hogy az $r_m^{(m-1)}$ függvény a 0 pontban deriválható.

Ha $|a| \leq 1$, és $|b| \leq 1$, akkor

$$|a^n - b^n| = \left|(a-b)\sum_{k=0}^{n-1} a^k b^{n-k-1}\right| \leq n\,|a-b|\,,$$

következésképpen, ha $n \to \infty$, akkor minden t-re

$$\left|\varphi_{\eta_n}(t) - \left(1 - \frac{t^2}{2n}\right)^n\right| \leq no\left(\frac{t^2}{n}\right) = t^2 \frac{o\left(t^2/n\right)}{t^2/n} \to 0, \qquad (13.3)$$

tehát minden t-re

$$\varphi_{\eta_n}(t) \to \exp\left(-\frac{t^2}{2}\right),$$

vagyis a folytonossági tétel alapján érvényes a következő:

13.2 Tétel. (Statisztikai centrális határeloszlás-tétel)
Ha $(\xi_n)_n$ szórással rendelkező, független, azonos eloszlású változók egy sorozata, akkor az η_n standardizált változó eloszlása gyengén tart az $N(0,1)$ eloszláshoz.

13.3 Példa.
A χ_n^2 eloszlás közelítése normális eloszlással.

Ha $\xi_k \cong N(0,1)$, akkor $\mathbf{M}\left(\xi_k^2\right) = 1$, $\mathbf{M}\left(\xi_k^4\right) = 3$, ezért $\mathbf{D}^2\left(\xi_k^2\right) = 2$, amiből az

$$\eta_n \stackrel{\circ}{=} \frac{\sum_{k=1}^n \xi_k^2 - n}{\sqrt{2n}} \cong \frac{\chi_n^2 - n}{\sqrt{2n}}$$

változó eloszlása gyengén tart az $N(0,1)$ eloszláshoz. Ebből következően, ha H_n jelöli a χ_n^2 eloszlásfüggvényét, akkor elég nagy n-re

$$H_n(x) \stackrel{\circ}{=} \mathbf{P}\left(\chi_n^2 < x\right) = \mathbf{P}\left(\frac{\chi_n^2 - n}{\sqrt{2n}} < \frac{x-n}{\sqrt{2n}}\right) \approx \Phi\left(\frac{x-n}{\sqrt{2n}}\right),$$

ahol Φ a standard normális eloszlás eloszlásfüggvénye.

$\square$

13.4 Példa.
A χ_n eloszlás közelítése normális eloszlással.

Tekintsük a $g(x) \stackrel{\circ}{=} \sqrt{|x|}$ folytonos függvényt, és $\eta_n \xrightarrow{w} N(0,1)$ legyen az előző példában szereplő standardizált sorozat. A g deriválható az $a \stackrel{\circ}{=} 1$ pontban, tehát az

$$u(x) \stackrel{\circ}{=} \begin{cases} \frac{g(x+a)-g(a)}{x} & \text{ha} \quad x \neq 0 \\ g'(a) & \text{ha} \quad x = 0 \end{cases}$$

függvény folytonos. A Cramér-lemma[2] elemi verziója szerint, ha $b_n \stackrel{\circ}{=} \sqrt{2/n} \to 0$, akkor

$$b_n \eta_n \xrightarrow{w} 0.$$

[2]V.ö.: 15.2. lemma, 677. oldal.

Az u folytonos, tehát[3]

$$u\left(b_n\eta_n\right) \xrightarrow{w} u\left(0\right) = g'\left(a\right).$$

Ugyancsak a Cramér-lemma szerint

$$u\left(b_n\eta_n\right)\cdot\eta_n \xrightarrow{w} g'\left(a\right)\cdot N\left(0,1\right),$$

vagyis

$$\begin{aligned}
\theta_n &\mathrel{\mathring{=}} \sqrt{\frac{n}{2}}g\left(\sqrt{\frac{2}{n}}\eta_n+1\right)-\sqrt{\frac{n}{2}}g\left(1\right)= \\
&= \sqrt{\frac{n}{2}}\sqrt{\left|\frac{\chi_n^2-n}{n}+1\right|}-\sqrt{\frac{n}{2}} \xrightarrow{w} g'\left(1\right)N\left(0,1\right)= \\
&= \frac{1}{2}N\left(0,1\right),
\end{aligned}$$

ami másképpen

$$\sqrt{2}\chi_n-\sqrt{2n} \xrightarrow{w} N\left(0,1\right).$$

Ha G_n a χ_n eloszlásfüggvénye, akkor

$$G_n\left(x\right) \mathrel{\mathring{=}} \mathbf{P}\left(\chi_n<x\right)=\mathbf{P}\left(\sqrt{2}\chi_n-\sqrt{2n}<\sqrt{2}x-\sqrt{2n}\right)\approx\Phi\left(\sqrt{2}\cdot x-\sqrt{2n}\right).$$

Ebből ugyanakkor a χ_n^2 H_n eloszlásfüggvényére a

$$H_n\left(x\right) \mathrel{\mathring{=}} \mathbf{P}\left(\chi_n^2<x\right)=\mathbf{P}\left(\chi_n<\sqrt{x}\right)\approx\Phi\left(\sqrt{2x}-\sqrt{2n}\right)$$

becslést kapjuk.

□

13.5 Példa.
Diszkrét bolyongás origóba való visszatéréseinek átlagos száma.

Legyen $\left(w_n\right)_n$ az origóból kiinduló $1/2$ valószínűséggel ±1 értékkel változó bolyongás. A diszkrét Tanaka-formula[4] szerint

$$\left|w_n\right|=\sum_{k=1}^{n}\operatorname{sgn}\left(w_{n-1}\right)\left[w_n-w_{n-1}\right]+V_n,$$

ahol V_n az $n-1$ időpontig az origóba való visszatérések száma. Mivel a centrális határeloszlás-tétel szerint

$$\frac{w_n}{\sqrt{n}} \xrightarrow{w} N\left(0,1\right),$$

ezért[5]

$$\frac{\left|w_n\right|}{\sqrt{n}} \xrightarrow{w} \left|N\left(0,1\right)\right|.$$

[3]V.ö.: 11.56. állítás, 511. oldal.
[4]V.ö.: 9.150. példa, 405. oldal.
[5]V.ö.: 11.56. állítás, 511. oldal.

Ugyanakkor

$$\left\| \frac{|w_n|}{\sqrt{n}} \right\|_2^2 = \left\| \frac{w_n}{\sqrt{n}} \right\|_2^2 = 1,$$

tehát a sorozat egyenletesen integrálható. A Szkorohod-reprezentáció következménye[6] miatt

$$\begin{aligned} \mathbf{M}\left(\frac{|w_n|}{\sqrt{n}}\right) & \to \quad \mathbf{M}\left(|N(0,1)|\right) = \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{\infty} x \exp\left(-\frac{x^2}{2}\right) dx = \\ & = \quad \sqrt{\frac{2}{\pi}} = 0,797\,88. \end{aligned}$$

A Tanaka-formulában az első tag martingál, és ezért a várható értéke nulla, tehát

$$\mathbf{M}\left(|w_n|\right) = \mathbf{M}\left(V_n\right),$$

következésképpen

$$\mathbf{M}\left(V_n\right) \sim \sqrt{\frac{2}{\pi} n}.$$

Például ha $n = 10.000$, akkor $\mathbf{M}\left(V_n\right) \approx 80$, vagyis az időpontok kevesebb mint 1%-ban lesz a bolyongás az origóban.

□

13.6 Példa.
Standardizált Poisson-eloszlás határértéke.

A λ paraméterű Poisson-eloszlás karakterisztikus függvénye $\exp\left(\lambda\left(\exp\left(it\right)-1\right)\right)$, és mivel az eloszlás várható értéke λ a szórása $\sqrt{\lambda}$, ezért a standardizált változó karakterisztikus függvénye

$$\begin{aligned} \varphi(t) &= \exp\left(\lambda\left(\exp\left(\frac{it}{\sqrt{\lambda}}\right)-1\right)\right)\exp\left(\frac{-\lambda it}{\sqrt{\lambda}}\right) = \\ &= \exp\left(\lambda\left(\exp\left(\frac{it}{\sqrt{\lambda}}\right)-1\right)-i\sqrt{\lambda}t\right) = \\ &= \exp\left(\lambda\left(1+\frac{it}{\sqrt{\lambda}}+\frac{(it)^2}{2\lambda}+o\left(\frac{1}{\lambda}\right)-1\right)-i\sqrt{\lambda}t\right) = \\ &= \exp\left(-\frac{t^2}{2}+\lambda o\left(\frac{1}{\lambda}\right)\right), \end{aligned}$$

tehát $\lim_{\lambda\to\infty}\varphi(t) = \exp\left(-t^2/2\right)$.

□

13.7 Példa.
A függetlenség helyett nem írható korrelálatlanság.

[6]V.ö.: 11.30. következmény, 491. oldal.

Ha $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P}) \stackrel{\circ}{=} ([0,1], \mathcal{B}, \lambda)$, akkor a $\xi_n \stackrel{\circ}{=} \cos(2\pi n x)$ sorozat ortogonális, vagyis ha $m \neq n$, akkor $\mathbf{M}(\xi_n \xi_m) = \mathbf{M}(\xi_n)\mathbf{M}(\xi_m) = 0$, és a változók eloszlása azonos, ugyanis tetszőleges k-ra

$$\int_0^1 \cos^k 2\pi n x \, dx = \int_0^n \cos^k 2\pi u \, \frac{du}{n} = \int_0^1 \cos^k 2\pi x \, dx,$$

így Meyer tétele[7] alapján tetszőleges B Borel-halmazra

$$\mathbf{P}(\xi_n \in B) = \int_0^1 \chi_B \cdot \cos 2\pi n x \, dx = \int_0^1 \chi_B \cdot \cos 2\pi x \, dx = \mathbf{P}(\xi_1 \in B).$$

Az (1.4) miatt

$$\sum_{k=1}^{n} (\xi_k - \mathbf{M}(\xi_k)) \stackrel{m.m.}{=} \frac{1}{2} \frac{\sin((2n+1)x/2)}{\sin(x/2)} - \frac{1}{2},$$

amiből

$$\frac{\sum_{k=1}^{n} (\xi_k - \mathbf{M}(\xi_k))}{\sqrt{n}} \stackrel{m.m.}{\to} 0,$$

és mivel a pontonként konvergenciából következik a gyenge konvergencia, ezért az η_n nem tart a normális eloszláshoz.

□

Fontos hangsúlyozni, hogy az $\eta_n \to N(0,1)$ csak a gyenge konvergencia szerint teljesül, vagyis csak a változók eloszlására érvényes, és nem magukra a változókra.

13.8 Állítás.
Nincs olyan η normális eloszlású változó, amely az $(\eta_n)_n$ standardizált sorozat sztochasztikus konvergenciában vett határértéke, vagyis nincs olyan η, hogy ha $\varepsilon > 0$ akkor[8]

$$\lim_{n\to\infty} \mathbf{P}(|\eta_n - \eta| > \varepsilon) = 0.$$

Bizonyítás: Megjegyezzük, hogy a centrális határeloszlás-tétel bizonyítása szempontjából érdektelen, hogy az η_n egy rögzített $(\xi_k)_k$ sorozat részletösszeg sorozata, vagy hogy minden n-re különböző $\xi_{n,k}$ $(k = 1, 2, \ldots, n)$ azonos eloszlású, független változók összege. A bizonyításban egyedül csak annak volt szerepe, hogy az η_n karakterisztikus függvénye azonos eloszlású változók karakterisztikus függvényének szorzata. A jelen állítás igazolására rátérve, ha az állítással ellentétben található lenne egy

[7] Felhasználva, hogy a $(\xi_n)_n$ család korlátos. V.ö.: 2.42. példa, 45. oldal. Természetesen közvetlenül a nívóhalmazok vizsgálatából is egyszerűen belátható, hogy az eloszlások azonosak.

[8] Az állítás némiképpen meglepő, ugyanis ellentmondani látszik a Szkorohod-reprezentációnak. Ugyanakkor nincsen ellentmondás, ugyanis a Szkorohod-reprezentáció szerint létező sorozat nem lesz független, azonos eloszlású változók normalizált összege. Ennek oka, például, hogy az eloszlások összegére nem érvényes a törlési szabály, stb.

η, amelyre $\eta_n \xrightarrow{P} \eta$, akkor az $\eta_{2n} \xrightarrow{P} \eta$ is teljesülne. A sztochasztikusan konvergens sorozatok lineáris teret alkotnak[9], így $\eta_{2n} - \eta_n \xrightarrow{P} 0$. Másrészt azonban

$$\eta_{2n} = \frac{1}{\sigma\sqrt{2n}} \left(\sum_{k=1}^{n} \xi_k + \sum_{k=n+1}^{2n} \xi_k \right) = \frac{\eta_n + \eta_n'}{\sqrt{2}},$$

ahol $\eta_n' \doteq \left(\sum_{k=n+1}^{2n} \xi_k \right) / \sigma\sqrt{n}$. Ez alapján

$$\eta_{2n} - \eta_n = \eta_n \left(\frac{1}{\sqrt{2}} - 1 \right) + \frac{1}{\sqrt{2}} \eta_n'.$$

A centrális határeloszlás-tétel alapján, felhasználva a jelen bizonyítás elején tett megjegyzést, az η_n és az η_n' karakterisztikus függvénye a $N(0,1)$ karakterisztikus függvényéhez tart. Az η_n és a η_n' változók függetlenek, hiszen nem tartalmaznak közös összeadandót, így[10]

$$\begin{aligned} \varphi_{\eta_{2n} - \eta_n}(t) &\to \exp\left(-\frac{1}{2} \left(t \left(\frac{1}{\sqrt{2}} - 1 \right) \right)^2 \right) \exp\left(-\frac{1}{2} \left(t \frac{1}{\sqrt{2}} \right)^2 \right) = \\ &= \exp\left(-\frac{1}{2} \left(2 - \sqrt{2} \right) t^2 \right), \end{aligned}$$

vagyis az $\eta_{2n} - \eta_n$ nem tart gyengén a δ_0 eloszláshoz, ami ellentmondás, mivel a sztochasztikus konvergenciából következik a gyenge konvergencia.

□

13.1.3. Véletlen tagszámú összegek

A centrális határeloszlás-tétel nagyszámú általánosítása szinte átláthatatlan, és vizsgálatuk önálló matematikai területnek tekinthető. Az általánosítások egyik iránya a véletlen tagszámú összegekre vonatkozik. Az ilyen kiterjesztések közül a legegyszerűbb a következő[11]:

13.9 Állítás.
Tegyük fel, hogy a $(\zeta_n)_n$ sorozatnak van határeloszlása, vagyis alkalmas F eloszlásra

$$\zeta_n \xrightarrow{w} \zeta \cong F.$$

Ha $(\nu_n)_n$ a $(\zeta_n)_n$ sorozattól független, $\mathbb{N}$ értékű változókból álló sorozat, amelyre $\nu_n \xrightarrow{p} \infty$, akkor

$$\eta_n(\omega) \doteq \zeta_{\nu_n(\omega)}(\omega) \xrightarrow{w} \zeta.$$

[9] V.ö.: 3.14. következmény, 117. oldal.
[10] V.ö.: 11.47. következmény, 503. oldal.
[11] Az állításban a kulcs feltétel, hogy az összegzésben szereplő tagszámokat megadó változók függetlenek az eredeti sorozattól!

Speciálisan, ha $(\xi_k)_k$ független, azonos eloszlású, σ szórással és μ várható értékkel rendelkező változók sorozata, akkor

$$\eta_n(\omega) \mathrel{\hat{=}} \frac{\sum_{k=1}^{\nu_n(\omega)} \xi_k(\omega) - \nu_n(\omega)\mu}{\sigma\sqrt{\nu_n(\omega)}} \xrightarrow{w} \xi \cong N(0,1),$$

ahol, miként az állítás első felében, a $(\nu_n)_n$ olyan $\mathbb{N}$ értékű, a $(\xi_k)_k$ sorozattól független sorozat, amelyre $\nu_n \xrightarrow{p} \infty$.

Bizonyítás: Vezessük be a $p_{nk} \mathrel{\hat{=}} \mathbf{P}(\nu_n = k)$ valószínűségeket. A bizonyítás érdemi részeként meg fogjuk mutatni, hogy ha $f_k \to f_\infty$ konvergens számsorozat, akkor

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{\infty} f_k p_{nk} = f_\infty. \tag{13.4}$$

Ez, valamint a $(\zeta_n)_n$ és a $(\nu_n)_n$ függetlensége alapján, ha x az F folytonossági pontja, akkor

$$\begin{aligned}
\mathbf{P}(\eta_n < x) &= \sum_{k=1}^{\infty} \mathbf{P}(\eta_n < x, \nu_n = k) = \\
&= \sum_{k=1}^{\infty} \mathbf{P}(\zeta_k < x, \nu_n = k) = \\
&= \sum_{k=1}^{\infty} \mathbf{P}(\zeta_k < x)\, \mathbf{P}(\nu_n = k) = \\
&= \sum_{k=1}^{\infty} \mathbf{P}(\zeta_k < x)\, p_{nk} \to \lim_k \mathbf{P}(\zeta_k < x) = F(x).
\end{aligned}$$

A (13.4) igazolása a következő. A $P_n \mathrel{\hat{=}} (p_{nk})_k$ sorozatokat tekinthetjük a $K \mathrel{\hat{=}} \mathbb{N} \cup \{\infty\}$ pontokra koncentrálódott reguláris valószínűségi mértékeknek. A K kompakt metrikus tér, ezért a $(P_n)_n$ rendelkezik gyenge konvergenciában konvergens részsorozattal. A $\nu_n \xrightarrow{p} \infty$ miatt tetszőleges $k \in \mathbb{N}$ pontra $\lim_n p_{nk} = 0$, következésképpen[12] a sorozatnak egyetlen torlódási pontja van δ_∞, és így $P_n \xrightarrow{w} \delta_\infty$. Az $(f_k)_k$ tekinthető a K téren értelmezett f folytonos, korlátos függvénynek, következésképpen

$$\sum_{k=1}^{\infty} f_k p_{nk} = \int_{\mathbb{K}} f dP_n \to \int_{\mathbb{K}} f d\delta_1 = f_\infty.$$

□

13.1.4. Lokális alak

A centrális határeloszlás-tétele az eloszlásfüggvények konvergenciáját vizsgálja. Milyen további feltételek mellett konvergálnak a sűrűségfüggvények?

[12] Minden zárt halmazra teljesül a $\limsup_n P_n(C) \le \delta_\infty(C)$, ugyanis ha $\infty \in C$, akkor $\delta_\infty(C) = 1$, ha $\infty \notin C$, akkor a C zártsága miatt a C véges számú elemet tartalmaz, ezért $\limsup_n P_n(C) = 0$.

13.10 Példa.
A gyenge konvergenciából általában nem következik a sűrűségfüggvények konvergenciája.

Emlékeztetünk, hogy még egyenletesen konvergens sorozatokat sem lehet feltétlenül tagonként differenciálni. Tekintsük az

$$f_n(x) \mathrel{\stackrel{\circ}{=}} 1 - \cos 2\pi nx, \quad x \in (0,1)$$

sorozatot. Ekkor, ha $x \in (0,1)$, akkor

$$F_n(x) = \int_0^x (1 - \cos 2\pi nt)\, dt = \left[t - \frac{\sin 2\pi nt}{2\pi n}\right]_0^x = x - \frac{\sin 2\pi nx}{2\pi n}.$$

Evidens módon az F_n eloszlásfüggvény, és egyenletesen tart a $[0,1]$-en $f \equiv 1$ sűrűségfüggvényhez tartozó eloszláshoz, de az f_n sorozat majdnem mindenhol divergál[13].

□

Ha a φ integrálható, akkor érvényes a karakterisztikus függvényt és a sűrűségfüggvényt összekötő

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} \varphi(t) \exp(-itx)\, dt$$

inverziós formula. Ilyenkor az f korlátos, folytonos függvény. A sűrűségfüggvények konvergenciájának igazolása az alábbi észrevételre épül:

13.11 Állítás.
Ha az $(F_n)_n$ eloszlások $(\varphi_n)_n$ karakterisztikus függvényei integrálhatóak, az F eloszlás φ karakterisztikus függvénye szintén integrálható és

$$\|\varphi_n - \varphi\|_1 \mathrel{\stackrel{\circ}{=}} \int_{\mathbb{R}} |\varphi_n(t) - \varphi(t)|\, dt \to 0, \tag{13.5}$$

akkor az $(F_n)_n$ eloszlások $(f_n)_n$ sűrűségfüggvényei egyenletesen tartanak az F eloszlás f sűrűségfüggvényéhez.

Bizonyítás: Az inverziós formula alapján

$$\begin{aligned} |f_n(x) - f(x)| &= \frac{1}{2\pi} \left| \int_{\mathbb{R}} \exp(-itx)\, \varphi_n(t)\, dt - \int_{\mathbb{R}} \exp(-itx)\, \varphi(t)\, dt \right| \leq \\ &\leq \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} |\varphi_n(t) - \varphi(t)|\, dt \to 0. \end{aligned}$$

□

13.12 Példa.
Ha a karakterisztikus függvények konvergálnak, de a (13.5) nem teljesül, akkor a sűrűségfüggvények nem feltétlenül konvergálnak.

---
[13] V.ö.: 3.36. példa, 129. oldal.

Legyen f olyan páros sűrűségfüggvény, amelynek a φ karakterisztikus függvénye pozitív[14]. Tekintsük az

$$f_t(x) \circeq \frac{1-\cos tx}{1-\varphi(t)} f(x)$$

képlettel definált függvényt. Az f_t nem negatív, és

$$\int_{\mathbb{R}} f_t(x)\,dx = \frac{\int_{\mathbb{R}} f(x)\,dx - \int_{\mathbb{R}} f(x)\cos tx dx}{1-\varphi(t)} = \frac{1-\varphi(t)}{1-\varphi(t)} = 1,$$

következésképpen az f_t egy eloszlás sűrűségfüggvénye. Az f_t szintén páros, a karakterisztikus függvénye

$$\begin{aligned}
\varphi_t(u) &= \frac{\int_{\mathbb{R}} f(x)(1-\cos tx)\cos ux dx}{1-\varphi(t)} = \\
&= \frac{\varphi(u) - \int_{\mathbb{R}} f(x)\cos tx \cos ux dx}{1-\varphi(t)} = \\
&= \frac{\varphi(u) - 1/2\int_{\mathbb{R}} f(x)(\cos(u+t)x + \cos(u-t)x dx)}{1-\varphi(t)} = \\
&= \frac{\varphi(u) - 1/2\varphi(u+t) - 1/2\varphi(u-t)}{1-\varphi(t)}.
\end{aligned}$$

A Riemann—Lebesgue-lemma alapján

$$\lim_{t\to\infty} \varphi(u \pm t) = \int_{\mathbb{R}} f(x)\cos(u \pm t) x dx = 0,$$

tehát $\lim_{t\to\infty} \varphi_t(u) = \varphi(u)$, de a koszinuszos tag miatt a $\lim_{t\to\infty} f_t(x)$ határérték nem létezik.

□

13.13 Állítás.
Ha az F eloszlás φ karakterisztikus függvénye nem negatív, akkor a φ integrálhatóságának szükséges és elégséges feltétele, hogy az F eloszlásnak legyen korlátos sűrűségfüggvénye.

Bizonyítás: Az egyik irány része az inverziós formulának. Miként beláttuk, ha a φ integrálható, akkor az F-nek van korlátos sűrűségfüggvénye[15]. Tegyük fel, hogy $\varphi \geq 0$ és hogy az F-nek van korlátos f sűrűségfüggvénye. Induljunk ki az $\varphi(t) = \int_{\mathbb{R}} \exp(itx) f(x)\,dx$ definícióból. Az $N(0,\sigma)$ eloszlás sűrűségfüggvényével beszorozva és integrálva

$$\begin{aligned}
I &\circeq \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} \varphi(t) \exp\left(-\frac{t^2}{2\sigma^2}\right) dt = \\
&= \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}}\int_{\mathbb{R}} \exp(itx) f(x) \exp\left(-\frac{t^2}{2\sigma^2}\right) dx dt.
\end{aligned}$$

[14] Ilyen például a normális eloszlás sűrűségfüggvénye.
[15] Ilyenkor a $\varphi \geq 0$-ra nincs szükség.